Theory of Programming Languages
程序设计语言理论

张昱

Department of Computer Science and Technology
University of Science and Technology of China

October, 2008

第四章 简单类型

4.1 函数类型 [PFPL, 14]

4.2 积类型(元组、记录) [PFPL, 17]

4.3 和类型(和、变式) [PFPL, 18]

4.4 一般递归 [PFPL, 15,16,21]

4.1 函数(Function)

λ 抽象：函数定义

$\lambda x{:}\mathbf{nat}.x+x$，$x$是函数的参数，$x+x$ 是函数体

λ 应用：函数应用，左结合

$(\lambda x{:}\mathbf{nat}.x+x)\ 2$

4.1.1 函数类型 [PFPL]

4.1.2 语法 [PFPL, 14.1]

4.1.3 静态语义 [PFPL, 14.2]

4.1.4 动态语义 [PFPL, 14.3]

4.1.5 安全[PFPL, 14.4]

4.1.6 大步语义[PFPL, 14.5]

4.1.1 函数类型-1

- 函数类型：$\sigma \to \tau$，σ是定义域(论域)，τ是值域
  - 例：$d : \mathbf{nat} \to \mathbf{nat}$，如果$e : \mathbf{nat}$,则$d\ e : \mathbf{nat}$
  - $\to$是右结合的，λ抽象体尽可能向右扩展

  在函数式语言中,函数是first-class对象(能参加计算,传递)
- α等价公理(约束变元改名公理)

  $\lambda x : \sigma . M = \lambda y : \sigma . [y / x]M$，　M中无自由出现的y
- β等价公理(等式公理)

  $(\lambda x : \sigma . M)N = [N / x]M$

  对函数应用求值就是在函数体中用实在变元代替形式变元
- β归约

  $(\lambda x : \sigma . M)N \mapsto [N / x]M$

  归约是建立在α等价上的，因为在代换时约束变元可能需要改名

4.1.1 函数类型-2

- 同余(Congruence)规则

$$\frac{M_1 = M_2 \quad N_1 = N_2}{M_1 N_1 = M_2 N_2}$$

相等的函数作用于相等的变元产生相等的结果

- 高阶函数类型：参数或函数值类型为函数类型
  - **nat→(nat→nat)** 即为 **nat→nat→nat**
    例：加法 **plus = λ*x* : nat. λ*y* : nat. *x*+*y***
    plus 2 : nat→nat **plus 2 3 : nat** (结果为5)
  - **(nat→nat)→nat→nat**
    例：对函数 *f* 执行两次 **twicef = λ *f* : nat→nat. λ *n* : nat.*f* (*f n*)**
    ~~**twicef plus**~~ ~~**twicef plus 2**~~ plus的类型为**nat→nat→nat**
    twicef (plus 2): nat →nat
    twicef (plus 2) 3 : nat (结果为7)

4.1.1 函数类型-3

- 高阶函数类型：参数或函数值类型为函数类型
  - (nat→nat)→nat→nat 即为 (nat→nat)→(nat→nat)

    例：对函数 f 执行两次 twicef = λ f : nat→nat. λ n : nat.f (f n)

    例：恒等函数 identf = λ f : nat→nat. f

    ~~identf plus~~ ~~identf plus 2~~ plus的类型为nat→nat→nat

    identf (plus 2): nat →nat

    identf (plus 2) 3 : nat (结果为5)

  - nat→(nat →nat) →nat

    例：对函数 f 执行两次 twicef1 = λ n : nat. λ f : nat→nat. f (f n)

    twicef1 3 : (nat →nat) →nat

    twicef1 3 (plus 2): nat (结果为7)

4.1.2 语言L{→}的语法

- 抽象语法

  Types　τ ::= arr (τ_1; τ_2)

  Expr's　e ::= x | lam[τ] ($x.e$) | ap(e_1; e_2)

  x：λ抽象的形式变元(形参)

  e：λ抽象的体

  e_1：函数，　e_2：函数实参

- 抽象语法　　vs. 具体语法 (PFPL中的表示法)

抽象语法	具体语法
arr (τ_1; τ_2)	$\tau_1 \rightarrow \tau_2$
lam[τ] ($x.e$)	λ (x :τ . e)
ap(e_1; e_2)	$e_1(e_2)$

从e_0:τ映射到$[e_0/x]e_1$的函数

$[e_2/x]e_1$

- 定义 let[τ](e_2; $x.e_1$) 代表ap(lam[τ](x. e_1); e_2)

例：　(λx:nat.x+x) 2

具体语法 λ (x:nat.x+x) (2)

抽象语法 ap(lam[nat](x.plus(x; x)); num[2])

let [nat] (num[2]; x.plus(x; x))

4.1.3 L{→}的静态语义-1

❖ 定型规则 （Γ：定型上下文）

➢ 变元 $\dfrac{}{\Gamma, x:\tau \vdash x:\tau}$ (14.2a)

➢ λ抽象 $\dfrac{\Gamma, x:\tau_1 \vdash e:\tau_2}{\Gamma \vdash \mathtt{lam}[\tau_1](x.e):\mathtt{arr}(\tau_1;\tau_2)}$ (14.2b)

➢ λ应用 $\dfrac{\Gamma \vdash e_1:\mathtt{arr}(\tau_2;\tau) \quad \Gamma \vdash e_2:\tau_2}{\Gamma \vdash \mathtt{ap}(e_1;e_2):\tau}$ (14.2c)

❖ 引理4.1(定型的逆转) 假设 $\Gamma \vdash e:\tau$

1.如果$e = x$，则 $\Gamma = \Gamma', x:\tau$

2.如果$e = \mathtt{lam}[\tau_1](x.e)$，则$\tau = \mathtt{arr}(\tau_1;\tau_2)$且$\Gamma, x:\tau_1 \vdash e_2:\tau_2$

3.如果$e = \mathtt{ap}(e_1;e_2)$，则存在τ_2使得$\Gamma \vdash e_1:\mathtt{arr}(\tau_2,\tau)$
且$\Gamma \vdash e_2:\tau_2$

对逆转引理的证明可按定型规则进行归纳证明。

4.1.3 L{→}的静态语义-2

❖ 定型断言满足置换性质

➢ 引理14.2(置换) 如果$\Gamma, x:\tau \vdash e':\tau'$并且$\Gamma \vdash e:\tau$，那么$\Gamma \vdash [e/x]e':\tau'$

证明：对$\Gamma, x:\tau \vdash e':\tau'$的推导进行归纳，考虑(14.2)中的每一条规则，即e'的每一种可能，分别证明。

例：对ap(lam[nat](x. plus(x;x)); num[2]) 进行类型检查

自底向上的类型检查

$$\frac{\Gamma, x:\mathtt{nat} \vdash \mathtt{plus}(x;x):\mathtt{nat}}{\Gamma \vdash \mathtt{lam}[\mathtt{nat}](x.\mathtt{plus}(x;x)):\mathtt{arr}(\mathtt{nat};\mathtt{nat})}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathtt{lam}[\mathtt{nat}](x.\mathtt{plus}(x;x)):\mathtt{arr}(\mathtt{nat};\mathtt{nat}) \quad \Gamma \vdash \mathtt{num}[2]:\mathtt{nat}}{\Gamma \vdash \mathtt{ap}(\mathtt{lam}[\mathtt{nat}](x.\mathtt{plus}(x;x));\mathtt{num}[2]):\mathtt{nat}}$$

4.1.4 L{→}的动态语义-1

❖语言L{→}的动态语义

由在闭式上的结构操作语义来给出

- λ抽象是值 $\overline{\texttt{lam}[\tau](x.e)\ \texttt{val}}$

  这里对函数体 e 的形式没有限制

函数的两种动态语义

- **call-by-value**(按值调用)语义：实参在通过置换传递到函数之前被求值。
- **call-by-name**(按名调用)语义：实参未经求值即传递到函数，对参数的求值将推迟到实际被需要的时候进行。

4.1.4 L{→}的动态语义-2

- call-by-value(按值调用)语义

$$\frac{e_1 \mapsto e_1'}{\mathtt{ap}(e_1;e_2) \mapsto \mathtt{ap}(e_1';e_2)} \qquad \frac{e_1\ \mathtt{val} \quad e_2 \mapsto e_2'}{\mathtt{ap}(e_1;e_2) \mapsto \mathtt{ap}(e_1;e_2')}$$

$$\frac{e_2\ \mathtt{val}}{\mathtt{ap}(\mathtt{lam}[\tau_2](x.e_1);e_2) \mapsto [e_2/x]e_1} \qquad \textbf{(14.4)}$$

例 **ap(lam[nat](*x*. plus(*x*, *x*)); plus(num[2];num[2]))**

$$\begin{aligned}
&\mathtt{ap}(\mathtt{lam}[\mathtt{nat}](x.\mathtt{plus}(x;x));\mathtt{plus}(\mathtt{num}[2];\mathtt{num}[2])) \\
\mapsto\ &\mathtt{ap}(\mathtt{lam}[\mathtt{nat}](x.\mathtt{plus}(x;x));\mathtt{num}[4]) \\
\mapsto\ &\mathtt{plus}(\mathtt{num}[4];\mathtt{num}[4])) \\
\mapsto\ &\mathtt{num}[8]
\end{aligned}$$

4.1.4 L{→}的动态语义-3

❖call-by-name(按名调用)语义

$$\frac{e_1 \mapsto e_1'}{\mathtt{ap}(e_1;e_2) \mapsto \mathtt{ap}(e_1';e_2)} \qquad \frac{}{\mathtt{ap}(\mathtt{lam}[\tau_2](x.e_1);e_2) \mapsto [e_2/x]e_1} \quad (14.5)$$

注意：未要求 e_2一定是值

例 **ap(lam[nat](*x*. plus(*x*; *x*)); plus(num[2];num[2]))**

$$\begin{aligned}
&\mathtt{ap}(\mathtt{lam}[\mathtt{nat}](x.\mathtt{plus}(x;x));\mathtt{plus}(\mathtt{num}[2];\mathtt{num}[2])) \\
&\quad\mapsto\quad \mathtt{plus}(\mathtt{plus}(\mathtt{num}[2];\mathtt{num}[2]);\mathtt{plus}(\mathtt{num}[2];\mathtt{num}[2])) \\
&\quad\mapsto\quad \mathtt{plus}(\mathtt{num}[4];\mathtt{plus}(\mathtt{num}[2];\mathtt{num}[2])) \\
&\quad\mapsto\quad \mathtt{plus}(\mathtt{num}[4];\mathtt{num}[4]) \\
&\quad\mapsto\quad \mathtt{num}[8]
\end{aligned}$$

4.1.5 L{→}的类型安全-1

❖ 定理14.3(保持性) *If* $e : \tau$ *and* $e \mapsto e'$, *then* $e' : \tau$.

证明：假若采用call-by-value语义，证明对转换规则(14.4)归纳。

考虑规则 $$\frac{e_2 \ \mathrm{val}}{\mathrm{ap}(\mathrm{lam}[\tau_2]\,(x.e_1);e_2) \mapsto [e_2/x]e_1}$$

假设 $\mathrm{ap}(\mathrm{lam}[\tau_2]\,(x.e_1);e_2) : \tau_1$

由定型逆转引理14.1的2，有 $e_2 : \tau_2$ 和 $x : \tau_2 \vdash e_1 : \tau_1$

再由置换引理14.2,有 $[e_2/x]e_1 : \tau_1$

……

4.1.5 L{→}的类型安全-2

- **引理14.4(范式)** *If* val *and* $e : arr(\tau_1; \tau_2)$, *then* $e = lam[\tau_1](x.e_2)$ *for some* x *and* e_2 *such that* $x : \tau_1 \vdash e_2 : \tau_2$.

- **定理14.5(进展性)** 如果$e:\tau$,则e或者是一个值，或者存在e'使得 $e \mapsto e'$

  证明：证明对定型规则(14.2)归纳。注意这里只考虑闭项，在定型推导上没有假设，即Γ为空。

  考虑规则(14.2c)

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathtt{arr}(\tau_2;\tau) \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash \mathtt{ap}(e_1;e_2) : \tau}$$

  对e_1归纳(e_1是值或者是$e_1 \rightarrow e'_1$)，再结合转换规则证明……

4.1.6 L{→}的大步语义-1

- 计算(求值)语义
  - λ抽象 $\dfrac{}{\mathtt{lam}[\tau](x.e) \Downarrow \mathtt{lam}[\tau](x.e)}$ (14.6)
  - λ应用 $\dfrac{e_1 \Downarrow \mathtt{lam}[\tau](x.e) \quad e_2 \Downarrow v_2 \quad [v_2/x]e \Downarrow v}{\mathtt{ap}(e_1;e_2) \Downarrow v}$
- 环境语义：引入环境(记录自由变元的绑定)
  - λ抽象 $\dfrac{}{\mathcal{E} \vdash \mathtt{lam}[\tau](x.e) \Downarrow \mathtt{lam}[\tau](x.e)}$ (14.7)
  - λ应用 $\dfrac{\mathcal{E} \vdash e_1 \Downarrow \mathtt{lam}[\tau](x.e) \quad \mathcal{E} \vdash e_2 \Downarrow v_2 \quad \mathcal{E}, x \Downarrow v_2 \vdash e \Downarrow v}{\mathcal{E} \vdash \mathtt{ap}(e_1;e_2) \Downarrow v}$

  当将函数应用到实参时，在整个函数体求值过程中，函数的形参被绑定到实参值。
  - 这个环境语义是不正确的，因为它与求值语义中的置换语义不一致。

4.1.6 L{→}的大步语义-2

- 为什么环境语义不正确？它使用环境(记录自由变元绑定)假设，该假设对那些返回值包含自由变元的函数的求值会不正确.

例: $e = \mathtt{ap}(\mathtt{lam}[\mathtt{nat}](x.\mathtt{lam}[\mathtt{nat}](y.x)); \mathtt{num}[3])$

由求值语义规则，

$$\frac{e_1 \Downarrow \mathtt{lam}[\tau](x.e) \quad e_2 \Downarrow v_2 \quad [v_2/x]e \Downarrow v}{\mathtt{ap}(e_1; e_2) \Downarrow v}$$

由于 $[\mathtt{num}[3]/x]\mathtt{lam}[\mathtt{nat}](y.x) \Downarrow \mathtt{lam}[\mathtt{nat}](y.\mathtt{num}[3])$

故**e** 求值为 $\mathtt{lam}[\mathtt{nat}](y.\mathtt{num}[3])$

对于包含 **e** 的表达式 $e' = \mathtt{let}(e; f.\mathtt{ap}(f; \mathtt{num}[4]))$

由置换语义可得 $e' \mapsto^* \mathtt{ap}([\mathtt{lam}[\mathtt{nat}](y.\mathtt{num}[3]); \mathtt{num}[4])$ ([e/f])

$e' \Downarrow \mathtt{num}[3]$ ([num[4]/y])

4.1.6 L{→}的大步语义-3

例： $e = \mathtt{ap}(\mathtt{lam}[\mathtt{nat}](x.\mathtt{lam}[\mathtt{nat}](y.x)); \mathtt{num}[3])$

但是由环境语义规则， $e' = \mathtt{let}(e; f.\mathtt{ap}(f; \mathtt{num}[4]))$

$$\frac{\mathcal{E} \vdash e_1 \Downarrow \mathtt{lam}[\tau](x.e) \quad \mathcal{E} \vdash e_2 \Downarrow v_2 \quad \mathcal{E}, x \Downarrow v_2 \vdash e \Downarrow v}{\mathcal{E} \vdash \mathtt{ap}(e_1; e_2) \Downarrow v} \quad (14.8)$$

e 的值由外层λ抽象确定，它以 $x \Downarrow \mathtt{num}[3]$ 为假设

由(14.7a) $\mathtt{lam}[\mathtt{nat}](y.x) \Downarrow \mathtt{lam}[\mathtt{nat}](y.x)$

e 求值到开式 $\mathtt{lam}[\mathtt{nat}](y.x)$ ，其中*x* 是自由的

但是对*e* ' 的求值来说，其假设为$f \Downarrow \mathtt{lam}[\mathtt{nat}](y.x)$ ，而没有对 *x* 的假设，这样对 *f* **num[4]**求值就有麻烦，因为*f* 的函数体有内部的λ抽象，即*x*. （ $\mathtt{lam}[\mathtt{nat}](y.x) \Downarrow \mathtt{lam}[\mathtt{nat}](y.x)$ ）

这就导致求值受阻，因为没有对*x* 的绑定.

4.1.6 L{→}的大步语义-4

例： $e = \mathtt{ap}(\mathtt{lam}[\mathtt{nat}](x.\mathtt{lam}[\mathtt{nat}](y.x)); \mathtt{num}[3])$

$e' = \mathtt{let}(e; f.\mathtt{ap}(f; \mathtt{num}[4]))$

导致麻烦的原因是：出现在***e***内层λ抽象中的变元 ***x*** 作为外层λ抽象的值返回时，将逃逸出其作用域。

结果，在环境假设中没有对 ***x*** 的绑定，从而导致求值受阻.

求值断言中的环境假设：类似于栈的行为

高阶语言中的变元：类似于堆的行为

前者不符合后者！

4.1.7 闭包(Closures)-1

如何解决在环境语义中遇到的问题?

必须保证λ抽象中的自由变元没有从环境中脱离绑定!

- 将环境当作显式置换
  - 显式置换是一个数据结构:记录变元将被置换成什么
  - 仅当遇到变元时,才将变元代换为在环境中对应的绑定
    ——推迟置换 $[v_1,\ldots,v_k/x_1,\ldots,x_k]\mathtt{lam}[\tau](x.e)$
  - 在对λ抽象求值的地方，将环境附加在该λ抽象上，
    从而有：**clo[τ](*E*,*x.e*)** ——闭包

    环境***E***通过为λ抽象中的自由变量提供绑定，来"封闭"自由变量。

4.1.7 闭包(Closures)-2

❖L{→}的环境语义

- 值　　*Values*　　$V ::= \mathrm{clo}[\tau](E; x.e)$

  值不再是表达式形式，而是一种特有的语法范畴

- 环境　　*Env's*　　$E ::= \bullet \mid E, x \mapsto v$

  环境不再是假言求值断言中的假设，而是可以出现在闭包中的一个数据结构

$$\frac{}{\mathcal{E}, x \Downarrow v \vdash x \Downarrow v} \qquad (14.9a)$$

$$\frac{E = \{x_1 \mapsto v_1 \ldots x_k \mapsto v_k\}}{x_1 \Downarrow v_1, \ldots, x_k \Downarrow v_k \vdash \mathrm{lam}[\tau](x.e) \Downarrow \mathrm{clo}[\tau](E; x.e)} \qquad (14.9b)$$

将k个变量的求值假设保存到环境E中

4.1.7 闭包(Closures)-3

❖L{→}的环境语义

$$\frac{\mathcal{E} \vdash e_1 \Downarrow \mathtt{clo}[\tau](E; x.e) \qquad \mathcal{E} \vdash e_2 \Downarrow v \qquad E = \{ x_1 \mapsto v_1 \ldots x_k \mapsto v_k \} \qquad x_1 \Downarrow v_1, \ldots, x_k \Downarrow v_k, x \Downarrow v \vdash e \Downarrow w}{\mathcal{E} \vdash \mathtt{ap}(e_1; e_2) \Downarrow w} \quad \textbf{(14.9c)}$$

从环境**E**中取得的假设

例： $e = \mathtt{ap}(\mathtt{lam}[\mathtt{nat}](x.\mathtt{lam}[\mathtt{nat}](y.x)), \mathtt{num}[3])$

$e' = \mathtt{let}(e, f.\mathtt{ap}(f, \mathtt{num}[4]))$

对*e* 求值，应用**(14.9c)**，对于前提**(**红圈部分**)**，由**(14.9b)**有

$$\vdash \mathtt{lam}[\mathtt{nat}](x.\mathtt{lam}[\mathtt{nat}](y.x)) \Downarrow \mathtt{clo}[\mathtt{nat}](E; x.\mathtt{lam}[\mathtt{nat}](y.x))$$

$$E = \{\ \}$$

4.1.7 闭包(Closures)-4

例： 需要计算

$$x \Downarrow \mathtt{num}[3] \vdash \mathtt{lam}[\mathtt{nat}](y.x) \Downarrow ?$$

由(14.9b)有

$$x \Downarrow \mathtt{num}[3] \vdash \mathtt{lam}[\mathtt{nat}](y.x) \Downarrow \mathtt{clo}[\mathtt{nat}](E'; y.x)$$

$$E' = \{x \mapsto \mathtt{num}[3]\}$$

则有 $\vdash e \Downarrow \mathtt{clo}[\mathtt{nat}](E'; y.x)$ $E' = \{x \mapsto \mathtt{num}[3]\}$

接下来计算 $e' = \mathtt{let}(e, f.\mathtt{ap}(f, \mathtt{num}[4]))$

由

$$\frac{\mathcal{E} \vdash e_1 \Downarrow v_1 \quad \mathcal{E}, x \Downarrow v_1 \vdash e_2 \Downarrow v_2}{\mathcal{E} \vdash \mathtt{let}(e_1; x.e_2) \Downarrow v_2}$$

需要计算 $f \Downarrow \mathtt{clo}[\mathtt{nat}](E'; y.x) \vdash \mathtt{ap}(f, \mathtt{num}[4]) \Downarrow ?$

由(14.9c)有 $x \Downarrow \mathtt{num}[3], y \Downarrow \mathtt{num}[4] \vdash x \Downarrow \mathtt{num}[3]$

$$\vdash e' \Downarrow \mathtt{num}[3]$$

4.2 积类型(元组、记录)

二元积(binary product): 一组序对(pair);
消去形式(运算): 投影 – 选择序对中的第一项或第二项

空积(nullary product): 唯一的没有值的空元组，没有消去形式

有限积(finited product): n元组(记录); 消去形式: 投影

4.2.1 空积和二元积 [PFPL, 17.1]

4.2.2 有限积 [PFPL, 17.2]

4.2 积类型(元组、记录)

- 序对(二元组)示例
  - 复数 **nat × nat** **<3, 4>** **3-实部, 4-虚部**
  - 二元函数 如 **plus1 : nat × nat → nat** **plus1 <*x*, *y*>**
- 元组示例
  - 如 **<str, str, nat>** **<*"Zhang"*, *"DS"*, *88* >**
  - 多元函数 如 **max3 : <nat,nat,nat> → nat** **max3 <*3*, *2*, *5*>**
- 记录示例
  - 类型 **<sname:str, cname:str, score:nat>**
    记录 **<sname = *"Zhang"*, cname = *"DS"*, score = *88* >**

4.2.1 空积和二元积-1

❖抽象语法

Types τ **::= unit | prod** $(\tau_1; \tau_2)$

Expr's e **::= triv | pair(**e_1**;** e_2**) | fst(**e**) | snd(**e**)**

抽象语法	具体语法	
unit	**unit**	空积(nullary)类型
triv	< >	空元组
prod $(\tau_1; \tau_2)$	$\tau_1 \times \tau_2$	二元积类型，**prod**:二元积类型构造子
pair(e_1**;** e_2**)**	$<e_1, e_2>$	二元组序对，**pair**:二元组项构造子
fst(e**)**	**fst(**e**)**	消去形式：第一投影
snd(e**)**	**snd(**e**)**	消去形式：第二投影

pair : $\tau_1 \rightarrow \tau_2 \rightarrow$ **prod** (τ_1, τ_2) **fst : prod** $(\tau_1, \tau_2) \rightarrow \tau_1$

4.2.1 空积和二元积-2

❖静态语义

空积的引入规则

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathtt{triv} : \mathtt{unit}}$$

二元积的引入规则

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \tau_1 \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash \mathtt{pair}(e_1;e_2) : \mathtt{prod}(\tau_1;\tau_2)}$$

二元积的消去规则

$$\frac{\Gamma \vdash e : \mathtt{prod}(\tau_1;\tau_2)}{\Gamma \vdash \mathtt{fst}(e) : \tau_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash e : \mathtt{prod}(\tau_1;\tau_2)}{\Gamma \vdash \mathtt{snd}(e) : \tau_2}$$

(17.1)

❖动态语义

空值和序对都是值

$$\frac{}{\mathtt{triv\ val}} \qquad \frac{\{e_1\ \mathtt{val}\} \quad \{e_2\ \mathtt{val}\}}{\mathtt{pair}(e_1;e_2)\ \mathtt{val}}$$

尚未完成到序对的求值时，允许在投影下归约

$$\frac{e \mapsto e'}{\mathtt{fst}(e) \mapsto \mathtt{fst}(e')} \qquad \frac{e \mapsto e'}{\mathtt{snd}(e) \mapsto \mathtt{snd}(e')}$$

(17.2)

$$\left\{\frac{e_1 \mapsto e_1'}{\mathtt{pair}(e_1;e_2) \mapsto \mathtt{pair}(e_1';e_2)}\right\} \qquad \left\{\frac{e_1\ \mathtt{val} \quad e_2 \mapsto e_2'}{\mathtt{pair}(e_1;e_2) \mapsto \mathtt{pair}(e_1;e_2')}\right\}$$

求值到序对时，可以进行投影，结果是相应的分量

$$\frac{\{e_1\ \mathtt{val}\} \quad \{e_2\ \mathtt{val}\}}{\mathtt{fst}(\mathtt{pair}(e_1;e_2)) \mapsto e_1} \qquad \frac{\{e_1\ \mathtt{val}\} \quad \{e_2\ \mathtt{val}\}}{\mathtt{snd}(\mathtt{pair}(e_1;e_2)) \mapsto e_2}$$

- **惰性(lazy)语义**
  省去{ }中的规则或前提
- **急切(eager)语义**
  包含{ }中的规则或前提

4.2.1 空积和二元积-3

例 $\mathtt{ap}(\mathtt{lam}[\mathtt{prod}(\mathtt{nat};\mathtt{nat})](x.\mathtt{fst}(x));\mathtt{pair}(\mathtt{num}[2];\mathtt{plus}(\mathtt{num}[3];\mathtt{num}[4])))$

- **Call-by-value，eager急切求值语义**

$$\begin{aligned}
&\mathtt{ap}(\mathtt{lam}[\mathtt{prod}(\mathtt{nat};\mathtt{nat})](x.\mathtt{fst}(x));\mathtt{pair}(\mathtt{num}[2];\mathtt{plus}(\mathtt{num}[3];\mathtt{num}[4])))\\
&\quad\mapsto\quad \mathtt{ap}(\mathtt{lam}[\mathtt{prod}(\mathtt{nat};\mathtt{nat})](x.\mathtt{fst}(x));\mathtt{pair}(\mathtt{num}[2];\mathtt{num}[7]))\\
&\quad\mapsto\quad \mathtt{fst}(\mathtt{pair}(\mathtt{num}[2];\mathtt{num}[7]))\\
&\quad\mapsto\quad \mathtt{num}[2]
\end{aligned}$$

- **Call-by-name，eager急切求值语义**

$$\begin{aligned}
&\mathtt{ap}(\mathtt{lam}[\mathtt{prod}(\mathtt{nat};\mathtt{nat})](x.\mathtt{fst}(x));\mathtt{pair}(\mathtt{num}[2];\mathtt{plus}(\mathtt{num}[3];\mathtt{num}[4])))\\
&\quad\mapsto\quad \mathtt{fst}(\mathtt{pair}(\mathtt{num}[2];\mathtt{plus}(\mathtt{num}[3];\mathtt{num}[4])))\\
&\quad\mapsto\quad \mathtt{fst}(\mathtt{pair}(\mathtt{num}[2];\mathtt{plus}(\mathtt{num}[7]))\\
&\quad\mapsto\quad \mathtt{num}[2]
\end{aligned}$$

4.2.1 空积和二元积-4

例 $\mathtt{ap}(\mathtt{lam}[\mathtt{prod}(\mathtt{nat};\mathtt{nat})](x.\mathtt{snd}(x));\mathtt{pair}(\mathtt{num}[2];\mathtt{plus}(\mathtt{num}[3];\mathtt{num}[4])))$

- **Call-by-value，lazy惰性求值语义**

$$\begin{aligned}
&\mathtt{ap}(\mathtt{lam}[\mathtt{prod}(\mathtt{nat};\mathtt{nat})](x.\mathtt{snd}(x));\mathtt{pair}(\mathtt{num}[2];\mathtt{plus}(\mathtt{num}[3];\mathtt{num}[4])))\\
&\quad\mapsto\quad \mathtt{snd}(\mathtt{pair}(\mathtt{num}[2];\mathtt{plus}(\mathtt{num}[3];\mathtt{num}[4])))\\
&\quad\mapsto\quad \mathtt{plus}(\mathtt{num}[3];\mathtt{num}[4])\\
&\quad\mapsto\quad \mathtt{num}[7]
\end{aligned}$$

- **Call-by-name，lazy惰性求值语义**

  同上

4.2.2 有限积-1

❖抽象语法

Types τ **::= prod[** I **](**$i \mapsto \tau_i$**)** ***I*:索引集合**

Expr's e **::= tuple[** I **](**$i \mapsto e_i$**) | proj[** I **][** i **](**e**)**

抽象语法	具体语法	
prod[I **](**$i \mapsto \tau_i$**)**	$\prod_{i \in I} \tau_i$	***n*元积类型, prod: 类型构造子**
tuple[I **](**$i \mapsto e_i$**)**	$< e_i >_{i \in I}$	***n*元组, tuple: 项构造子**
proj[I **][** i **](**e**)**	$e.i$	**第*i* 投影 (0 ⩽ *i* ⩽ *n*-1)**

❖静态语义

$$\frac{(\forall i \in I)\ \Gamma \vdash e_i : \tau_i}{\Gamma \vdash \mathtt{tuple}[I]\,(i \mapsto e_i) : \mathtt{prod}[I]\,(i \mapsto \tau_i)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : \mathtt{prod}[I]\,(i \mapsto e_i) \quad j \in I}{\Gamma \vdash \mathtt{proj}[I]\,[j]\,(e) : \tau_j}$$

(17.3)

4.2.2 有限积-2

❖动态语义

$$\frac{\{(\forall i \in I)\ e_i\ \mathsf{val}\}}{\mathtt{tuple}[I]\ (i \mapsto e_i)\ \mathsf{val}}$$

$$\frac{e_j \mapsto e_j' \quad (\forall i \neq j)\ e_j' = e_j}{\mathtt{tuple}[I]\ (i \mapsto e_i) \mapsto \mathtt{tuple}[I]\ (i \mapsto e_i')}$$

$$\frac{\mathtt{tuple}[I]\ (i \mapsto e_i)\ \mathsf{val}}{\mathtt{proj}[I]\ [j]\ (\mathtt{tuple}[I]\ (i \mapsto e_i)) \mapsto e_j}$$

改为: $e_i' = e_i$

(17.4)

❖安全性

4.2.2 有限积-3

- 多元函数与高阶函数
  - 二元函数　例：**plus1 ： nat × nat → nat**

    plus1 = lam[prod(nat; nat)] (*x*.plus(fst(*x*); snd(*x*)))

    对**ap(plus1;pair(num[2]; num[3]))**求值得**num[5]**
  - 高阶函数　例：**plus2 ： nat → nat → nat**

    plus2 = lam[nat](*x*.lam[nat](*y*.plus(*x*, y)))

    对**ap(ap(plus2;num[2]); num[3])**求值得**num[5]**
- 多元函数与高阶函数的相互转换
  - **Currying**：多元函数到高阶函数的转换

    curry = λ *f* : nat × nat → nat. λ *x*:nat. λ *y*:nat. *f* <*x*, *y*>
  - **Uncurrying**：高阶函数到多元函数的转换

    uncurry = λ*f* : nat → nat → nat. λ *x* : nat × nat. *f* (fst *x*) (snd *x*)

4.3 和类型

二元和(binary sum): 从两者选择其一

空和(nullary sum): 从空中选择

n元和(n-ary sum): 从n个中选择其一

4.3.1 二元和与空和 [PFPL, 18.1]

4.3.2 有限和 [PFPL, 18.2]

4.3.3 一些有用的和类型 [PFPL, 18.3]

4.3.1 二元和与空和-1

❖ 二元和示例

- 表　　**list = unit + nat × list**

  表或者是空表**unit**，

  或者是由表头和表尾组成的表 **nat × list**

- 二叉树　　**bitree = unit + < label, bitree, bitree >**

  二叉树或者是空树**unit**，

  或者是由**label**和两棵子树组成的树

  < label, bitree, bitree >　// 三元积类型

假设**lab[str]**表示值为**str**的标签,则下面是一棵二叉树

null表示**bitree**的左标记值(类型为**unit**)

<lab[“a”], null, <lab[“b”], null, null> > // 三元组

4.3.1 二元和与空和-2

- 地址

  Addr = PhysicalAddr + VirtualAddr // 二元和类型

  PhysicalAddr = <firstlast : str, addr : str > // 记录类型,左标记类型

  VirtualAddr = <name : str, email : str > // 记录类型,右标记类型

通过左/右标记类型的分量产生**Addr**类型的元素

- **in[l] : PhysicalAddr → Addr** 左标记
- **in[r] : VirtualAddr → Addr** 右标记

引入**case** 构造子，以区分一个值是来自和类型左边的分支还是右边的分支

```
getName = λ a : Addr. case a {
                    in[l](x ) => x.firstlast
                  | in[r](y )  => y.name }
```

4.3.1 二元和与空和-3

- 抽象语法

  Types τ **::= void | sum (**τ_1**;** τ_2**)**

  Expr's e **::= abort[**τ**](**e**) | in[l][**τ**](**e**) | in[r][**τ**](**e**) |**
  case(e**;** $x_1.e_1$**;** $x_2.e_2$**)**

- 空和类型(nullary sum)

抽象语法	具体语法	
void	**void**	空和类型
abort[τ**](**e**)**	**abort**$_\tau$**(**e**)**	消去形式: 中止对e的求值

空和类型的值表示从 0 个可选项中选择一个,故空和类型没有值,因此也就没有引入形式.

其消去形式**abort[**τ**](**e**)**表示在e不能再求值时,中止对e 的求值. (如Java中的异常机制)

4.3.1 二元和与空和-4

❖ 二元和类型(binary sum)

抽象语法	具体语法	
$\mathbf{sum}(\tau_1; \tau_2)$	$\tau_1 + \tau_2$	二元和类型，sum:二元和类型构造子
$\mathbf{in[l][}\tau\mathbf{](}e\mathbf{)}$	$\mathbf{in[l](}e\mathbf{)}$	引入形式：左标记；$e : \tau_1$
$\mathbf{in[r][}\tau\mathbf{](}e\mathbf{)}$	$\mathbf{in[r](}e\mathbf{)}$	引入形式：右标记；$e : \tau_2$
$\mathbf{case(}e\mathbf{;}\ x_1.e_1\mathbf{;}\ x_2.e_2\mathbf{)}$	$\mathbf{case}\ e\{\ \mathbf{in[l](}x_1\mathbf{)} \Rightarrow e_1 \mid \mathbf{in[r](}x_2\mathbf{)} \Rightarrow e_2\}$	

消去形式：分情况分析值标记，得到相应的体e_1或e_2

引入形式定义如何由类型为τ_1或τ_2的表达式e构造类型为$\mathbf{sum}(\tau_1; \tau_2)$的值$\mathbf{in[l][}\tau\mathbf{](}e\mathbf{)}$(左标记值)或$\mathbf{in[r][}\tau\mathbf{](}e\mathbf{)}$ (右标记值)

消去形式定义对类型为$\mathbf{sum}(\tau_1; \tau_2)$的值的运算，它需要区分值是左标记值$\mathbf{in[l][}\tau\mathbf{](}e\mathbf{)}$还是右标记值$\mathbf{in[r][}\tau\mathbf{](}e\mathbf{)}$来分情况处理。

4.3.1 二元和与空和-4

❖静态语义

$$\frac{\Gamma \vdash e : \mathtt{void}}{\Gamma \vdash \mathtt{abort}[\tau](e) : \tau}$$

空和的消去规则

二元和的引入规则

$$\frac{\Gamma \vdash e : \tau_1 \quad \tau = \mathtt{sum}(\tau_1;\tau_2)}{\Gamma \vdash \mathtt{in}[\mathtt{l}][\tau](e) : \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : \tau_2 \quad \tau = \mathtt{sum}(\tau_1;\tau_2)}{\Gamma \vdash \mathtt{in}[\mathtt{r}][\tau](e) : \tau}$$

二元和的消去规则

$$\frac{\Gamma \vdash e : \mathtt{sum}(\tau_1;\tau_2) \quad \Gamma, x_1 : \tau_1 \vdash e_1 : \tau \quad \Gamma, x_2 : \tau_2 \vdash e_2 : \tau}{\Gamma \vdash \mathtt{case}(e; x_1.e_1; x_2.e_2) : \tau}$$

(18.1)

不是取记录中的成员；而是e_2中带约束变元 x_2

$$\frac{e \mapsto e'}{\mathtt{abort}[\tau](e) \mapsto \mathtt{abort}[\tau](e')}$$

❖动态语义

左标记值和右标记值是值

$$\frac{\{e\ \mathsf{val}\}}{\mathtt{in}[\mathtt{l}][\tau](e)\ \mathsf{val}} \qquad \frac{\{e\ \mathsf{val}\}}{\mathtt{in}[\mathtt{r}][\tau](e)\ \mathsf{val}}$$

(18.2)

急切语义下，e未完成求值时，允许在引入形式(标记)下归约

$$\left\{\frac{e \mapsto e'}{\mathtt{in}[\mathtt{l}][\tau](e) \mapsto \mathtt{in}[\mathtt{l}][\tau](e')}\right\}$$

$$\left\{\frac{e \mapsto e'}{\mathtt{in}[\mathtt{r}][\tau](e) \mapsto \mathtt{in}[\mathtt{r}][\tau](e')}\right\}$$

- 惰性(lazy)语义
  省去{ }中的规则或前提
- 急切(eager)语义
  包含{ }中的规则或前提

4.3.1 二元和与空和-5

❖动态语义 (18.2)

$$\frac{e \mapsto e'}{\texttt{case}(e; x_1.e_1; x_2.e_2) \mapsto \texttt{case}(e'; x_1.e_1; x_2.e_2)}$$

$$\frac{\{e\ \texttt{val}\}}{\texttt{case}(\texttt{in}[\texttt{l}]\,[\tau]\,(e); x_1.e_1; x_2.e_2) \mapsto [e/x_1]e_1}$$

$$\frac{\{e\ \texttt{val}\}}{\texttt{case}(\texttt{in}[\texttt{r}]\,[\tau]\,(e); x_1.e_1; x_2.e_2) \mapsto [e/x_2]e_2}$$

尚未求值到左/右标记值时，该规则允许在消去形式下归约

对标记值根据其标记，决定按哪一种情况进行置换

- 惰性(lazy)语义
  省去{ }中的规则或前提
- 急切(eager)语义
  包含{ }中的规则或前提

4.3.1 二元和与空和-6

- 安全性(略)
- unit vs. void
  - 空积类型**unit**只有一个值**triv**
    空和类型**void**没有值
  - 如果e : **unit**，假使e 求值到v，则v : **unit**
    如果e : **void**，则由e 一定不会求得值，因为如果e 能求值到v，则v : **void**，而**void**类型没有值
  - 在许多程序语言(如C语言)中的**void**类型实际上是**unit**类型。

4.3.2 有限和-1

- n元和（略）
- 带标签的和/变式(labelled variants)

Types τ **::= sum[** I **](** $i \mapsto \tau_i$ **)**

Expr's e **::= inj[** I **][** j **](**e**) | case[**I**] (**e**;** $i \mapsto x_i.e_i$ **)**

抽象语法	具体语法	
sum[I **](** $i \mapsto \tau_i$ **)**	$\Sigma_{i \in I} \tau_i$	有限和类型
inj[I **][** j **](**e**)**	**in[**j**](**e**)**	引入形式
case[I**] (**e**;** $i \mapsto x_i.e_i$**)**	**case** e **{ in[** i **](**x_i**)=>**e_i**}** $_{i \in I}$	消去形式

- C语言中的union类型就是变式类型

4.3.2 有限和-2

❖静态语义

引入规则

$$\frac{\Gamma \vdash e : \tau_j \quad j \in I}{\Gamma \vdash \mathtt{inj}[I][j](e) : \mathtt{sum}[I](i \mapsto \tau_i)} \qquad (18.3)$$

消去规则

$$\frac{\Gamma \vdash e : \mathtt{sum}[I](i \mapsto \tau_i) \quad (\forall i \in I)\, \Gamma, x_i : \tau_i \vdash e_i : \tau}{\Gamma \vdash \mathtt{case}[I](e; i \mapsto x_i.e_i) : \tau}$$

❖动态语义

$$\frac{\{e\ \mathsf{val}\}}{\mathtt{inj}[I][j](e)\ \mathsf{val}} \qquad (18.4)$$

$$\left\{ \frac{e \mapsto e'}{\mathtt{inj}[I][j](e) \mapsto \mathtt{inj}[I][j](e')} \right\}$$

4.3.2 有限和-3

- 动态语义

$$\frac{e \mapsto e'}{\texttt{case}[I]\,(e; i \mapsto x_i.e_i) \mapsto \texttt{case}[I]\,(e'; i \mapsto x_i.e_i)}$$

$$\frac{\texttt{inj}[I]\,[j]\,(e)\ \texttt{val}}{\texttt{case}[I]\,(\texttt{inj}[I]\,[j]\,(e); i \mapsto x_i.e_i) \mapsto [e/x_j]e_j} \qquad (18.4)$$

- 安全性（略）

4.3.3 一些有用的和类型-Boolean

❖ Boolean类型

➢ 语法

Types τ **::= bool**

Expr's e **::= tt | ff | if(**e**;** e_1**;** e_2**)**

tt 和 ff是引入形式，分别表示真和假， if(e; e_1; e_2)是消去形式

➢ 具体的定义（由空积与二元和定义）

bool = sum(unit, unit)

tt = in[l][bool](triv) (18.5)

ff = in[r][bool](triv)

if(e**;** e_1**;** e_2**) = case(** e**;** $x_1.e_1$**;** $x_2.e_2$ **)**

x_1 和 x_2 是任意的变元，使得 $x_1\#e_1$ (e_1中无自由出现的x_1)且 $x_2\#e_2$

4.3.3 一些有用的和类型-枚举类型

❖ 枚举类型

例如：扑克牌的花色

- 类型 **card = unit + (unit + (unit + unit))**
- 引入形式： **hearts | spades | diamonds | clubs**

  hearts = in[l](triv) spades = in[r](in[l](triv))

  diamonds = in[r](in[r](in[l](triv)))

  clubs = in[r](in[r](in[r](triv)))
- 消去形式

  case *e* { hearts => e_0, spades => e_1, diamonds => e_2,

  clubs => e_3 }

4.3.3 一些有用的和类型-option-1

❖ 选项类型option

Types τ **::= opt(**τ**)**

Expr's e **::= null | just(**e**) | ifnull[**τ**](**e**;** e_1**;** $x.e_2$**)**

- 类型 **opt(**τ**) = sum(unit;** τ**)**表示类型τ 的可选值类型
- 引入形式
  - **null = in[l][opt(**τ**)](triv)** 左标记，表示由空值形成的左标记值
  - **just(**e**) = in[r][opt(**τ**)](**e**)** 右标记，表示类型为τ 的表达式e形成的右标记值
- 消去形式

  ifnull[τ**](**e**;** e_1**;** $x.e_2$**) = case(** e**;** _**.**e_1**;** $x_2.e_2$ **)**

  下划线表示任意不出现在e_1中的变元

4.3.3 一些有用的和类型-option-2

- 理解空指针错误(null pointer fallacy)

  ——option类型的意义之一

  - 起因：在OO语言中，所有对象都是引用(指针)，对象的引用可能为空，不能通过空引用来访问对象的域.
  - 如何避免空指针错误?

    一些语言提供空指针的检测函数 $\mathbf{null} : \tau \to \mathbf{bool}$

    $\mathbf{if\ null}(e)\ \mathbf{then}\ \ldots error \ldots\ \mathbf{else}\ \ldots ok \ldots$
  - 但是空指针异常仍然普遍, 原因: 1)缺少空指针检测; 2)极少在程序的异常处进行空指针检测
  - 解决：用$\mathbf{opt}(\tau)$描述类型为τ的可选值类型，其值或者为τ类型的值，或者为空.

    消去形式 $\mathbf{ifnull}[\tau](e; \ldots error \ldots; x.\ \ldots ok \ldots)$

    在静态语义和动态语义中，针对这两种情况分别处理，并进行传播。

4.4 一般递归-1

递归论:能行性论(讨论可计算/可判定)，数理逻辑的一个分支，研究递归函数及其推广的学科。递归函数是数论函数的一种，其定义域与值域都是自然数集。

函数$f(x)$的可计算性: 当x的值给出后，如果$f(x)$有定义，则可以在有限步内得出该函数的值; 当$f(x)$无定义时，如果能在有限步内判知，则说f是可完全计算的，如果不能在有限步内判知，则说f是可半计算的。

17世纪,Pascal(法):正式使用与递归式密切相关的数学归纳法

19世纪,Dedekind(德),Peano(意):用原始递归式定义加和乘

1923,Skolem:提出并证明“一切初等数论中的函数都可以由原始递归式定义，即都是原始递归函数”。

4.4 一般递归-2

1931，Gödel(奥地利):在证明其著名的不完全性定理时，以原始递归式为主要工具把所有元数学的概念都算术化了。
=>出现了原始递归函数论

不完全性定理：在形式数论(算术逻辑)演绎系统中，总可以找出一个合理的命题使得在该系统中既无法证明它为真，也无法证明它为假。

什么是原始递归式？什么是原始递归函数？

本原函数：1)零函数$O(x)=0$；2)后继函数$S(x)=x+1$；3)广义幺函数或射影函数$Imn(x_1,\ldots, x_m)= x_n\ (1 \leqslant n \leqslant m)$

4.4 一般递归-3

原始递归式(primitive recursion):

$$\begin{cases} f(u_1,\cdots,u_n,0) = A(u_1,\cdots,u_n) \\ f(u_1,\cdots,u_n,S(x)) = B(u_1,\cdots,u_n,x,f(u_1,\cdots,u_n,x)) \end{cases}$$

多参数(u)

$$\begin{cases} f(u,0) = A(u) \\ f(u,S(x)) = B(u,x,f(u,x)) \end{cases}$$

单参数(u)

由A、B两函数,依次计算$f(u,0)$, $f(u,1)$, $f(u,2)$,….

只要A、B为全函数且可计算,则新函数f也是全函数且可计算

原始递归函数: 由本原函数出发，经过原始递归式与有限次的复合而作出的函数。

叠置(复合):由一个 m元函数 f与 m个 n元函数 $g_1, g_2, \ldots, g_m$ 而造成新函数 $f(g_1(x_1, \ldots, x_n), g_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$, 后者亦可记为 $f(g_1, \ldots, g_m)(x_1, \ldots, x_n)$。

本原函数是全函数且可计算，故原始递归函数也是全函数且可计算。

4.4 一般递归-4

Ackermann(德)：提出非原始递归的可计算函数，否定了"原始递归函数可能穷尽一切可计算的函数"的猜测.

$$\begin{cases} g(0,n) = n+1 \\ g(S(m),0) = g(m,1) \\ g(S(m),S(n)) = g(m,g(S(m),n)) \end{cases}$$

1934，Gödel(奥地利):提出一般递归函数的定义

有序递归式(半递归式):

$$\begin{cases} f(u,0) = A(u) \\ f(u,S(x)) = B(u,x,f(u,g(u,S(x)))) \end{cases}$$

与原始递归式的不同在于：它不是把 $f(u, S(x))$的计算化归于$f(u, x)$的计算，而是先化归于$f(u,g(u, S(x)))$的计算，然后化归于$f(u, g(u, g(u, S(x))))$的计算(记做 $f(u, g_u^2(S(x)))$，再化归于 $f(u, g_u^3(S(x)))$ 的计算，……。

如果有一个m，使得 $g_u^m(S(x))=0$，即函数 g_u 在 $S(x)$ 处归宿于0，则 $f(u, g_u^m(S(x))) = f(u, 0) = A(u)$

4.4 一般递归-5

有序递归式(半递归式): $\begin{cases} f(u,0) = A(u) \\ f(u,S(x)) = B(u,x,f(u,g(u,S(x)))) \end{cases}$

如果不存在一个m，使得 $g_u{}^m(S(x))=0$，即函数 g_u 在$S(x)$处不归宿于0，将导致永远化归下去而得不到结果，从而$f(u, S(x))$不仅不能被计算，而且没有定义。

即使A、B与g是全函数且可计算，而由半递归式所定义的函数未必是全函数，也可能是部分函数。但只要有定义的地方，即g_u归宿于0的地方，就一定能计算。

递归半函数(递归部分函数): 由本原函数出发，经过半递归式与有限次的复合而作出的函数。

如果作出的函数是全函数，则称做递归全函数(一般递归函数)

4.4 一般递归-6

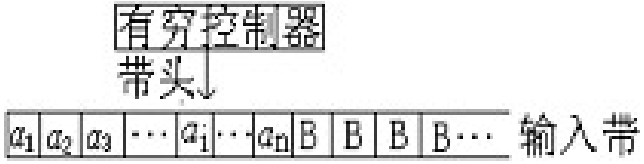
1936，Church(美):提出"可计算函数恰巧是一般递归函数"（判定性问题 Entscheidungs problem ）

和 Kleene在 20 世纪三十年代引入λ 演算(无类型的)

1936，Turing(英):提出Turing机，指出可计算函数恰巧是可用Turing机所计算的函数。

1936，Kleene(美)：证明一般递归函数就是Turing机所计算的函数。

——Church-Turing论点



4.4.1 Gödel的T [PFPL, 15]

4.4.2 Ackermann函数 [PFPL, 15.4]

4.4.3 Plotkin的PCF [PFPL, 16]

4.4.4 递归类型 [PFPL, 21]

4.4.1 Gödel的T-1

❖ L{nat,→}: Gödel的T

- 原始递归函数：由本原函数出发，经过原始递归式与有限次的复合而作出的函数。

$$\begin{cases} f(u,0) = A(u) \\ f(u,S(x)) = B(u,x,f(u,x)) \end{cases}$$

❖ 语法

Types τ **::= nat | arr(**τ_1**;** τ_2**)**

Expr's e **::=** x **| z | s(**e**) | rec [**τ**](**e**;** e_0**;** x**.** y**.**e_1**) |**
lam[τ**](** x**.**e**) | ap(**e_1**;** e_2**)**

- **nat**的引入形式：**z** – 零；**s(***e***)** – e的后继，记 $\overline{n}$ 表示对**z** 应用n次**s**
- **rec[**τ**](**e**;** e_0**;** x**.** y**.**e_1**)**：原始递归式。
  表示从初值e_0开始，按 $x.y.e_1$ 进行复迭变换，折叠 e 次所得的结果。其中，x 表示e的前驱，y 表示复迭 x 次的结果。

注：在 **rec[**τ**](**e**;** e_0**;** x**.** y**.**e_1**)** 中，e_0与$A(u)$对应，e_1与$B(u, x, f(x))$对应，x与x对应，y与$f(x)$对应。

4.4.1 Gödel的T-2

复迭式(iteration) $\mathbf{iter}[\tau](e; e_0; y.e_1)$有时作为 $\mathbf{rec}[\tau](e; e_0; x.\, y.e_1)$的替换物。但复迭式的约束变元只有$y$，而没有 x 。

- 复迭式是原始递归式的特例,因为总能忽略对前驱的绑定
- 原始递归式可以由复迭式定义(在复迭计算的同时计算前驱)

抽象语法	具体语法	
$\mathbf{arr}\ (\tau_1; \tau_2)$	$\tau_1 \rightarrow \tau_2$	全函数类型
$\mathbf{lam}[\tau](x.e)$	$\lambda(x{:}\tau.e)$	函数定义（引入形式）
$\mathbf{ap}(e_1; e_2)$	$e_1(e_2)$	函数应用（消去形式）
$\mathbf{rec}[\tau](e; e_0; x.\, y.e_1)$	$\mathbf{rec}\ e\ \{\ \mathbf{z}{=>}e_0 \mid \mathbf{s}(x)\ \mathbf{with}\ y\ {=>}e_1\}$	

具有引入和消去的双重含义

- **with**子句的目的是重复将 y 绑定到递归调用的结果上。

4.4.1 Gödel的T-3

例：阶乘函数 $\begin{cases} f(0) = S(0) \\ f(S(x)) = S(x) * f(x) \end{cases}$

具体语法表示

fct = λ(*n*:nat.rec *n* { z => s(z) | s(*x*) with *y* => s(*x*)*y})

抽象语法表示

fct = lam[nat](*n*.rec[arr(nat;nat)](*n*; s(z); *x*.*y*.times(s(*x*); y)))

4.4.1 Gödel的T-4

❖静态语义

变元的定型规则

$$\frac{}{\Gamma, x : \mathtt{nat} \vdash x : \mathtt{nat}}$$

nat 的引入规则(零)

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathtt{z} : \mathtt{nat}}$$

nat 的引入规则(后继)

$$\frac{\Gamma \vdash e : \mathtt{nat}}{\Gamma \vdash \mathtt{s}(e) : \mathtt{nat}}$$

原始递归式的定型规则

$$\frac{\Gamma \vdash e : \mathtt{nat} \quad \Gamma \vdash e_0 : \tau \quad \Gamma, x : \mathtt{nat}, y : \tau \vdash e_1 : \tau}{\Gamma \vdash \mathtt{rec}[\tau](e; e_0; x.y.e_1) : \tau}$$

函数的引入规则

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash e : \tau \quad x \# \Gamma}{\Gamma \vdash \mathtt{lam}[\sigma](x.e) : \mathtt{arr}(\sigma; \tau)}$$

函数的消去规则

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathtt{arr}(\tau_2; \tau) \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash \mathtt{ap}(e_1; e_2) : \tau}$$

(15.1)

➢ 引理15.1(置换) 如果$\Gamma, x : \tau \vdash e' : \tau'$并且$\Gamma \vdash e : \tau$，那么$\Gamma \vdash [e/x]e' : \tau'$

4.4.1 Gödel的T-5

❖动态语义 (15.2)

假设对s(e)采用惰性语义，对函数应用采用按名调用语义

闭值

$$\frac{}{\mathtt{z}\ \mathtt{val}} \qquad \frac{}{\mathtt{s}(e)\ \mathtt{val}} \qquad \frac{}{\mathtt{lam}[\tau](x.e)\ \mathtt{val}}$$

$$\frac{e_1 \mapsto e_1'}{\mathtt{ap}(e_1;e_2) \mapsto \mathtt{ap}(e_1';e_2)} \qquad \frac{}{\mathtt{ap}(\mathtt{lam}[\tau](x.e);e_2) \mapsto [e_2/x]e}$$

函数应用的动态语义(基于置换语义)

$$\frac{e \mapsto e'}{\mathtt{rec}[\tau](e;e_0;x.y.e_1) \mapsto \mathtt{rec}[\tau](e';e_0;x.y.e_1)}$$

e未完全求值时，允许在原始递归式下归约

$$\frac{}{\mathtt{rec}[\tau](\mathtt{z};e_0;x.y.e_1) \mapsto e_0} \qquad \frac{}{\mathtt{rec}[\tau](\mathtt{s}(e);e_0;x.y.e_1) \mapsto [e,\mathtt{rec}[\tau](e;e_0;x.y.e_1)/x,y]e_1}$$

原始递归式的两种求值：1) 初值；
2)在计算e_1前对e 递归调用

由于函数应用采用惰性语义(按名调用)，如果e1无需y来定值，则该递归调用不会被执行！

4.4.1 Gödel的T-6

- 引理15.2(范式) (略)
- 定理15.3(安全性) (略)

❖ 观测等价(observational equivalence)

$$e_1 \cong e_2 : \tau\ [\Gamma], \quad \Gamma \vdash e_1 : \tau,\ \Gamma \vdash e_2 : \tau$$

表示两个具有相同类型的开式e_1和e_2在L{nat, →}程序中是无区别的，从而可以自由地在任意上下文中互换。

观测等价满足的性质:

- 一致性: 零和非零不等价
- 同余性(congruence):对于任何的子表达式，用一个等价的表达式代替该子表达式，则新表达式仍和源表达式等价。
- 符号执行(symbolic execution):应用动态语义规则求值时保持等价

4.4.1 Gödel的T-7

- 终止性
  - 定理15.4 (终止性)如果$e:\tau$,则存在v val使得$e \mapsto^* v$.
  - L{nat, →}不存在无限循环，用它编写的函数是数学上的全函数。
- 可定义性
  - 数学函数$f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$在L{nat, →}中是可定义的，当且仅当存在类型为nat→nat的表达式e_f能正确地模仿f在所有可能输入上的行为。

$$e_f(\overline{n}) \cong \overline{f(n)} : nat, \quad n \in \mathrm{N}$$

例1:后继函数可定义为表达式 succ=λ(*x*:nat.s(*x*))

例2:加倍函数d(*n*)=2 × *n*可定义为表达式

e_d =λ(*x*:nat.rec *x*{z=>z | s(*u*) with *v*=>s(s(*v*))})

4.4.1 Gödel的T-8

❖可定义性

例2:加倍函数d(*n*)=2 × *n*可定义为表达式

e_d =λ(*x*:nat.rec *x*{z=>z | s(*u*) with *v*=>s(s(*v*))})

证明:

由观测可知 $e_f(\overline{0}) \cong \overline{0} : nat$ ，

假设 $e_f(\overline{n}) \cong \overline{d(n)} : nat$

$$\begin{array}{rcl} e_d(\overline{n+1}) & \cong & s(s(e_d(\overline{n}))) \\ & \cong & \overline{s(s(\overline{2 \times n}))} \\ & \cong & \overline{2 \times (n+1)} \\ & \cong & \overline{d(n+1)} \end{array}$$

4.4.2 Ackermann函数-1

- **Ackermann函数**

$$\begin{cases} f(u,0) = A(u) \\ f(u,S(x)) = B(u,x,f(u,x)) \end{cases}$$

$A(0, n) = n + 1$

$A(m+1, 0) = A(m, 1)$

$$\begin{cases} f(u,0) = A(u) \\ f(u,S(x)) = B(u,x,f(u,g(u,S(x)))) \end{cases}$$

$A(m+1, n+1) = A(m,\ A(m+1,\ n\ ))$

Ackermann函数不是原始递归函数。

- **Ackermann函数是可定义的**

观察$A(m+1, n)$，它是从$A(m, 1)$开始，对$A(m, _)$迭代n次

定义高阶函数 **it : (nat→nat) →nat →nat →nat**为

$$\lambda(f : \mathrm{nat} \to \mathrm{nat}.\lambda(n : \mathrm{nat}.\mathrm{rec}\ n\{\mathrm{z} \Rightarrow \mathrm{id} \mid \mathrm{s}(\_)\ \mathrm{with}\ g \Rightarrow f \circ g\}))$$

其中**id=λ (x:nat.x) , g**是取n的前驱时**it**对应的函数值

$f \circ g = \lambda$ (x:nat.f (g (x)))

容易得到 $\mathtt{it}(f)(\overline{n})(\overline{m}) \cong f^{(n)}(\overline{m}) : \mathtt{nat}$

右边的表达式是从$\overline{m}$开始的f的n次复合

4.4.2 Ackermann函数-2

- **Ackermann函数是可定义的**

it= λ**(** f **:** nat $\to$ nat.λ**(** n **:** nat.rec n{z $\Rightarrow$ id | s(_) with $g \Rightarrow f \circ g$}))

id=λ **(**x**:nat.**x**)** , $f \circ g$ =λ **(**x**:nat.**f **(**g **(**x**)))** $\quad \mathtt{it}(f)(\overline{n})(\overline{m}) \cong f^{(n)}(\overline{m}) : \mathtt{nat}$

由此，可以定义**Ackermann**函数a **: nat** $\to$**nat** $\to$**nat**为

λ**(**m **:** nat.rec m{z $\Rightarrow$ succ | s(_) with $f \Rightarrow \lambda$**(**n **:** nat.it**(** f **)(**n**)(** f **(**$\overline{1}$**)))})**

可以得到以下等式，这些等式表明**Ackermann**函数是可定义的。

$$
\begin{array}{rcl}
a\ (\overline{0})\ (\overline{n}) & \cong & s\ (\overline{n}) \\
a\ (\overline{m+1})\ (\overline{0}) & \cong & a\ (\overline{m})\ (\overline{1}) \\
a\ (\overline{m+1})\ (\overline{n+1}) & \cong & a\ (\overline{m})\ (a\ (s\ (\overline{m}))\ (\overline{n}))
\end{array}
$$

f

$$
\begin{array}{rcll}
a\ (\overline{m+1})\ (\overline{0}) & \cong & \mathtt{it}\ (a\ (\overline{m}))\ (\overline{0})\ (a\ (\overline{m})\ (\overline{1})) & [App.\ a] \\
& \cong & a\ (\overline{m})\ (\overline{1}) & [App.\ \mathtt{it}]
\end{array}
$$

4.4.2 Ackermann函数-3

❖ Ackermann函数是可定义的

it= λ**(** f **:** nat $\to$ nat.λ**(** n **:** nat.rec n{z $\Rightarrow$ id | s(_) with $g \Rightarrow f \circ g$}))

id=λ **(**x**:nat.**x**)** , $f \circ g$ =λ **(**x**:nat.**f **(**g **(**x**)))** $\quad \mathtt{it}(f)(\overline{n})(\overline{m}) \cong f^{(n)}(\overline{m}) : \mathtt{nat}$

由此，可以定义**Ackermann**函数a **: nat** $\to$**nat** $\to$**nat**为

λ**(**m **:** nat.rec m{z $\Rightarrow$ succ | s(_) with $f \Rightarrow \lambda$**(**n **:** nat.it**(** f **)(**n**)(** f **(**$\overline{1}$**)))})**

可以得到以下等式，这些等式表明**Ackermann**函数是可定义的。

$$
\begin{aligned}
a\ (\overline{0})\ (\overline{n}) &\cong s\ (\overline{n}) \\
a\ (\overline{m+1})\ (\overline{0}) &\cong a\ (\overline{m})\ (\overline{1}) \\
a\ (\overline{m+1})\ (\overline{n+1}) &\cong a\ (\overline{m})\ (a\ (s(\overline{m}))\ (\overline{n}))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a\ (\overline{m+1})\ (\overline{n+1}) &\cong \mathtt{it}\ (a\ (\overline{m}))\ (\overline{n+1})\ (a\ (\overline{m})\ (\overline{1})) && [App.\ a] \\
&\cong a\ (\overline{m})\ (\mathtt{it}\ (a\ (\overline{m}))\ \overline{n})\ (a\ (\overline{m})\ (\overline{1})) && [App.\ \mathtt{it}]
\end{aligned}
$$

g

$$
a\ (\overline{m})\ (a\ (s\ (\overline{m}))\ (\overline{n})) \cong a\ (\overline{m})\ (\mathtt{it}\ (a\ (\overline{m}))\ (\overline{n}))\ (a\ (\overline{m})\ (\overline{1})) \quad [App.\ 2nd\ a]
$$

4.4.3 Plotkin的PCF-1

❖L{nat →}: Plotkin的PCF

- 使用一般递归式集成函数和自然数

$$\begin{cases} f(u,0) = A(u) \\ f(u,S(x)) = B(u,x,f(u,g(u,S(x)))) \end{cases}$$

- 部分函数，类型系统不再保证终止性
- 递归定义的不动点(fixed point)

  如果$F:\sigma\to\sigma$是某类型σ到它自己的函数，那么F的不动点是使得$F(x)=x$的值$x:\sigma$.
  - 自然数上的平方函数的不动点有0和1
  - 恒等函数有无数个不动点
  - 后继函数没有不动点

4.4.3 Plotkin的PCF-2

- 阶乘函数是方程

  $f : nat \to nat = \lambda y : nat.\text{ifz } y \{ z\Rightarrow s(z) | s(x)\Rightarrow y * f(x) \}$

  的解。
- 阶乘函数是

  $F = \lambda f : nat \to nat.\ \lambda y : nat.\text{ifz } y \{ z\Rightarrow s(z) | s(x)\Rightarrow y * f(x) \}$

  的不动点。
- 不动点算子$fix_\sigma : (\sigma\to\sigma)\to\sigma$：对每个类型$\sigma$，函数$fix_\sigma$为$\sigma$到$\sigma$的函数产生一个不动点。

  e.g.针对上述阶乘函数，有$fix_\sigma(F) = f$。

  $fix_\sigma = \lambda f : \sigma\to\sigma.\ f(fix_\sigma(F))$

  $fix_\sigma(M) = M(fix_\sigma(M))$

4.4.3 Plotkin的PCF-3

❖ 语法

Types τ **::= nat | parr(**τ_1**;** τ_2**)**

Expr's e **::=** x **| z | s(**e**) | ifz(**e**;** e_0**;** $x.e_1$**) |**
lam[τ**](** $x.e$**) | ap(**e_1**;** e_2**) | fix[**τ**](** $x.e$**)**

- **fix[**τ**](**$x.e$**)**：一般递归式。$x:\tau$ 且$e:\tau$
- **ifz(**e**;** e_0**;** $x.e_1$**)**：e是z,则为e_0； 否则将e的前驱绑定到x计算e_1 (递归计算)。

抽象语法	具体语法	
parr (τ_1**;** τ_2**)**	$\tau_1 \rightharpoonup \tau_2$	部分函数类型
ifz(e**,** e_0**;** $x.e_1$**)**	**ifz** e{z=>e_0 | s(x) =>e_1}	
fix[τ**](**$x.e$**)**	**fix** $x:\tau$ **is** e	一般递归式，不动点 τ是函数类型

4.4.3 Plotkin的PCF-4

❖静态语义

(16.1)

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau}$$

变元的定型规则

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathtt{z} : \mathtt{nat}}$$

nat 的引入规则(零)

$$\frac{\Gamma \vdash e : \mathtt{nat}}{\Gamma \vdash \mathtt{s}(e) : \mathtt{nat}}$$

nat的引入规则(后继)

$$\frac{\Gamma \vdash e : \mathtt{nat} \quad \Gamma \vdash e_0 : \tau \quad \Gamma, x : \mathtt{nat} \vdash e_1 : \tau}{\Gamma \vdash \mathtt{ifz}(e; e_0; x.e_1) : \tau}$$

条件分支的定型规则

$$\frac{\Gamma, x : \tau_1 \vdash e : \tau_2}{\Gamma \vdash \mathtt{lam}[\tau_1](x.e) : \mathtt{parr}(\tau_1; \tau_2)}$$

函数的引入规则

4.4.3 Plotkin的PCF-5

❖静态语义 (16.1)

函数的消去规则

$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \mathtt{parr}(\tau_2;\tau) \quad \Gamma \vdash e_2 : \tau_2}{\Gamma \vdash \mathtt{ap}(e_1;e_2) : \tau}$$

一般递归式的定型规则
递归自引用: 在类型检查期间，用递归式本身来代换e中出现的x

$$\frac{\Gamma, \mathtt{fix}[\tau](x.e) : \tau \vdash [\mathtt{fix}[\tau](x.e)/x]e : \tau}{\Gamma \vdash \mathtt{fix}[\tau](x.e) : \tau}$$

与上一规则等价的规则
将递归自引用看成是变量

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash e : \tau}{\Gamma \vdash \mathtt{fix}[\tau](x.e) : \tau} \quad (16.2)$$

➢ 定型规则满足置换引理 (Lemma16.1)

如果$\Gamma, x : \tau \vdash e' : \tau'$并且$\Gamma \vdash e : \tau$，那么 $\Gamma \vdash [e/x]e' : \tau'$

4.4.3 Plotkin的PCF-6

❖动态语义

•惰性(lazy)语义 省去{ }中的规则或前提
•急切(eager)语义 包含{ }中的规则或前提

闭值

$$\frac{}{\mathtt{z}\ \mathtt{val}} \qquad \frac{\{e\ \mathtt{val}\}}{\mathtt{s}(e)\ \mathtt{val}} \qquad \frac{}{\mathtt{lam}[\tau](x.e)\ \mathtt{val}}$$

(16.3)

$$\left\{\frac{e \mapsto e'}{\mathtt{s}(e) \mapsto \mathtt{s}(e')}\right\}$$

在eager语义下,e未完成求值,允许在后继下归约

(16.4)

$$\frac{e \mapsto e'}{\mathtt{ifz}(e; e_0; x.e_1) \mapsto \mathtt{ifz}(e'; e_0; x.e_1)} \qquad \frac{}{\mathtt{ifz}(\mathtt{z}; e_0; x.e_1) \mapsto e_0} \qquad \frac{}{\mathtt{ifz}(\mathtt{s}(e); e_0; x.e_1) \mapsto [e/x]e_1}$$

条件分支的动态语义

$$\frac{e_1 \mapsto e_1'}{\mathtt{ap}(e_1; e_2) \mapsto \mathtt{ap}(e_1'; e_2)} \qquad \left\{\frac{e_1\ \mathtt{val} \quad e_2 \mapsto e_2'}{\mathtt{ap}(e_1; e_2) \mapsto \mathtt{ap}(e_1; e_2')}\right\} \qquad \frac{\{e_2\ \mathtt{val}\}}{\mathtt{ap}(\mathtt{lam}[\tau](x.e); e_2) \mapsto [e_2/x]e}$$

函数应用

用递归式本身代换递归式体中的变量来实现自引用——展开递归式(unfold)

$$\frac{}{\mathtt{fix}[\tau](x.e) \mapsto [\mathtt{fix}[\tau](x.e)/x]e}$$

4.4.3 Plotkin的PCF-7

❖上下文语义

- 翻译规则：将表达式分解成一个求值上下文和一个可归约式

$$\frac{e = \mathcal{E}\{e_0\} \quad e_0 \rightsquigarrow e_0' \quad e' = \mathcal{E}\{e_0'\}}{e \mapsto_c e'} \qquad (16.7)$$

- 指令步由如下规则定义

$$\frac{}{\mathtt{ifz}(\mathtt{z}; e_0; x.e_1) \rightsquigarrow e_0}$$

$$\frac{\{e\ \mathsf{val}\}}{\mathtt{ifz}(\mathtt{s}(e); e_0; x.e_1) \rightsquigarrow [e/x]e_1}$$

$$\frac{\{e_2\ \mathsf{val}\}}{\mathtt{ap}(\mathtt{lam}[\tau_2](x.e); e_2) \rightsquigarrow [e_2/x]e}$$

$$\frac{}{\mathtt{fix}[\tau](x.e) \rightsquigarrow [\mathtt{fix}[\tau](x.e)/x]e} \qquad (16.8)$$

- 惰性(lazy)语义
  省去{ }中的规则或前提
- 急切(eager)语义
  包含{ }中的规则或前提

4.4.3 Plotkin的PCF-8

❖上下文语义

➢ 求值上下文由如下规则定义

$$\frac{}{\circ\ \mathtt{ectxt}}$$

$$\left\{\frac{\mathcal{E}\ \mathtt{ectxt}}{\mathtt{s}(\mathcal{E})\ \mathtt{ectxt}}\right\}$$

$$\frac{\mathcal{E}\ \mathtt{ectxt}}{\mathtt{ifz}(\mathcal{E}; e_0; x.e_1)\ \mathtt{ectxt}}$$

$$\frac{\mathcal{E}_1\ \mathtt{ectxt}}{\mathtt{ap}(\mathcal{E}_1; e_2)\ \mathtt{ectxt}}$$

$$\left\{\frac{e_1\ \mathtt{val} \quad \mathcal{E}_2\ \mathtt{ectxt}}{\mathtt{ap}(e_1; \mathcal{E}_2)\ \mathtt{ectxt}}\right\}$$

(16.9)

- 惰性(lazy)语义
  省去{ }中的规则或前提
- 急切(eager)语义
  包含{ }中的规则或前提

4.4.3 Plotkin的PCF-PCF的可定义性-1

❖PCF的可定义性(definability)

- 一般递归式
  - 缺点：所定义的递归函数的终止性不是程序固有的，而必须由程序员证明
  - 优点：可以定义更多的函数，给程序员更多的自由

  自然数上的可计算函数在PCF中都是可编程的
  ——Church-Turing论点
- 一般递归函数 $\mathbf{fun}[\tau_1;\tau_2](x.y.e)$

  x 是代表函数本身的变量，y 是函数的参数

静态语义

$$\frac{\Gamma, \mathtt{fun}[\tau_1;\tau_2](x.y.e) : \mathtt{parr}(\tau_1;\tau_2), y:\tau_1 \vdash e:\tau_2}{\Gamma \vdash \mathtt{fun}[\tau_1;\tau_2](x.y.e) : \mathtt{parr}(\tau_1;\tau_2)} \quad (16.5)$$

4.4.3 Plotkin的PCF-PCF的可定义性-2

- 一般递归函数 $\mathbf{fun}[\tau_1;\tau_2](x.y.e)$
  x 是代表函数本身的变量，y 是函数的参数

动态语义

$$\frac{\{e_1\ \mathrm{val}\} \quad e = \mathtt{fun}[\tau_1;\tau_2]\,(x\,.\,y\,.\,e')}{\mathtt{ap}(e;e_1) \mapsto [e,e_1/x,y]e'} \qquad (16.6)$$

在函数调用时，用函数本身代换函数体中的x

- 一般递归函数可由一般递归式和非递归函数定义
  $\mathbf{fun}[\tau_1;\tau_2](x.y.e) = \mathbf{fix}[\mathbf{parr}(\tau_1;\tau_2)](x.\mathbf{lam}[\tau_1](y.e))$
- 原始递归式在PCF中是可定义的
  $\mathbf{rec}[\tau](e;\ e_0;\ x.y.e_1) = \mathbf{ap}(e';\ e)$
  其中 $e' = \mathbf{fun}[\mathbf{nat};\tau](\ f.u.\mathbf{ifz}(u;\ e_0;\ x.[\mathbf{ap}(\ f;\ x)/y]e_1)\ )$

4.4.3 Plotkin的PCF-PCF的可定义性-3

- 原始递归式在PCF中是可定义的

  $\mathbf{rec}[\tau](e; e_0; x.y.e_1) = \mathbf{ap}(e' ; e)$

  其中 $e' = \mathbf{fun}[\mathbf{nat}; \tau](\, f.u.\mathbf{ifz}(u; e_0; x.[\mathbf{ap}(\, f; x)/y]e_1)\,)$

例：阶乘函数

Gödel的T－抽象语法表示

fct = lam [nat] (*n*.rec [arr(nat:nat)]
(*n*; s(z); *x*.*y*.times(s(*x*); y))

Plotkin的PCF－抽象语法表示

fct' = lam [nat] (*n*.ap(fun[nat; nat]
(*f*.*u*.ifz(*u*; s(z); *x*.[ap(*f*; *x*)/ *y*] times (s(*x*); y))); *n*))

= lam [nat](*n*.ap(fix[parr(nat;nat)](*f*.lam[nat]
(*u*.ifz(*u*; s(z); *x*.[ap(*f*; *x*)/ *y*] times (s(*x*); y)))); *n*))

4.4.3 Plotkin的PCF-PCF的可定义性-4

- 观测同余(观测等价) $e \cong e' : \tau \ [\Gamma]$
  - 一致性：能终止的表达式和不能终止的表达式不等价
  - 同余性(congruence):对于任何的子表达式，用一个等价的表达式代替该子表达式，则新表达式仍和源表达式等价。

- 可定义性
  - 自然数的部分函数ϕ:N⇀N在PCF中是可定义的，当且仅当存在类型为nat→nat的表达式e_ϕ，使得
    $\phi(m)=n$当且仅当 $e_\phi(\overline{m}) \cong \overline{n} : \mathrm{nat}$
  - 如果ϕ完全没有定义，则e_ϕ必须是一个会导致死循环的函数

4.4.4 递归类型-1

- 递归类型示例：表
  - 用二元和表示表　　natlist = nil:unit+ cons: nat × natlist
    上述等式蕴涵着递归定义。
  - 对类型引入一个明确的递归操作符μ
    natlist = $\mu t.$ nil:unit+cons: nat × t
    读作“将natlist定义为满足t = nil:unit+cons: nat × t 的无穷的类型”
- 递归类型形式化的方法

  $\mu t.\tau$和其展开$[\mu t.\tau/t]\tau$ 之间的关系是什么?
  - 相等递归(equi-recursive): 将这两个类型表达式作为相同的定义。
    这种方法使类型表达式可以为无穷。
  - 同构递归(iso-recursive): 将一个递归类型和其展开式视为是不同的，但是二者是同构的。
    递归类型$\mu t.\tau$的展开式是用该递归类型代换τ中出现的t，即$[\mu t.\tau/t]\tau$

4.4.4 递归类型-2

❖ 同构递归类型

➢ 举例(具体语法表示)

– 递归类型： **natlist = $\mu t.$ nil:unit+cons: nat × t**

– 展开式： **nil:unit+cons: nat × $\mu t.$(nil:unit+ cons: nat × t)**

➢ 语法

Types τ **::=** t **|** $\mathrm{rec}(t.\tau)$ t是关于类型名的元变量

Expr's e **::=** $\mathrm{fold}[t.\tau](e) \mid \mathrm{unfold}(e)$

抽象语法	具体语法	
$\mathrm{rec}(t.\tau)$	$\mu t.\tau$	递归类型，其展开式为$[\mathrm{rec}(t.\tau)/t]\tau$
$\mathrm{fold}[t.\tau](e)$	$\mathrm{fold}(e)$	引入形式：折叠， $e : [\mathrm{rec}(t.\tau)/t]\tau$
$\mathrm{unfold}(e)$	$\mathrm{unfold}(e)$	消去形式：展开， $e : \mathrm{rec}(t.\tau)$

4.4.4 递归类型-3

❖ 同构递归类型

➢ 静态语义

– 一般断言：$\Delta \mid \tau$ **type**

Δ是一组有限的形如t_i **type**的假设集合

t_i为类型变量

$$\frac{}{\Delta, t \text{ type} \mid t \text{ type}}$$

$$\frac{\Delta \mid \tau_1 \text{ type} \quad \Delta \mid \tau_2 \text{ type}}{\Delta \mid \mathtt{arr}(\tau_1; \tau_2) \text{ type}}$$

$$\frac{\Delta, t \text{ type} \mid \tau \text{ type}}{\Delta \mid \mathtt{rec}(t.\tau) \text{ type}}$$

(21.1)

– 定型断言：$\Gamma \vdash e : \tau$

$$\frac{\Gamma \vdash e : [\mathtt{rec}(t.\tau)/t]\tau}{\Gamma \vdash \mathtt{fold}[t.\tau](e) : \mathtt{rec}(t.\tau)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : \mathtt{rec}(t.\tau)}{\Gamma \vdash \mathtt{unfold}(e) : [\mathtt{rec}(t.\tau)/t]\tau}$$

(21.2)

4.4.4 递归类型-4

❖ 同构递归类型

➢ 动态语义

$$\frac{\{e\ \mathsf{val}\}}{\mathtt{fold}[t.\tau]\,(e)\ \mathsf{val}}$$

$$\left\{\frac{e \mapsto e'}{\mathtt{fold}[t.\tau]\,(e) \mapsto \mathtt{fold}[t.\tau]\,(e')}\right\} \quad (21.3)$$

$$\frac{e \mapsto e'}{\mathtt{unfold}(e) \mapsto \mathtt{unfold}(e')}$$

$$\frac{\{e\ \mathsf{val}\}}{\mathtt{unfold}(\mathtt{fold}[t.\tau]\,(e)) \mapsto e}$$

eager语义下, e是值，则其fold形式是值

eager语义下,e未完成求值,则允许在fold下归约

e未完成求值，则允许在unfold下归约

eager语义下,对值e执行fold再unfold，所得为e

- 惰性(lazy)语义 省去{ }中的规则或前提
- 急切(eager)语义 包含{ }中的规则或前提

➢ 安全性（略） (Theorem 21.1)

4.4.4 递归类型-5

- 同构递归类型
  - 举例(抽象语法表示)

    natlist = sum(nil:unit; cons:prod(nat;natlist))
    - 展开式: **natlist ≅ sum(nil:unit; cons:prod(nat;natlist))**
    - 则 **nil = fold[natlist] (in[nil](triv))**

```
cons = lam[nat](n.
          lam[natlist](l.
             fold[natlist](in[cons]pair(n;l) ) )
```

判空**isnil = lam[natlist](*l*. case (unfold(*l*); *u*.tt; *p*.ff))**

取表头**head = lam[natlist](*l*.case(unfold(*l*); *u*.z; *p*.fst(*p*))**

作业

- **4.1** 试用**4.1.6**和**4.1.7**中介绍的求值语义和两种环境语义，对**twicef 3 (plus 4)**求值，其中

  twicef = λn : **nat.** λf : **nat**→**nat.** $f\ (f\ n)$

  plus = λx : **nat.** λy : **nat.** $x+y$

  要求：写出求值所依赖的规则和相应的推导结果

作业

- 4.2 为语言T{list}(在Gödel的T上增加list类型)定义静态语义和动态语义,并证明安全性。
  - 语法

τ ::= nat　　nat

| arr(τ_1, τ_2)　　$\tau_1 \rightarrow \tau_2$

| list(τ)　　τ list　　//元素类型为τ的list

e ::= x | z | s(e)　　x | zero | s(e)

| natrec [τ](e; e_0; x. y.e_1)　　natrec e { z=>e_0 | s(x) with y =>e_1}

| lam[τ](x.e)　　$\lambda(x.e)$

| ap(e_1; e_2)　　$e_1(e_2)$

| nil[τ]　　nil[τ]

| cons(e_1; e_2)　　e_1::e_2

| listrec[τ](e; e_{nil}; $x.xs.y.e_{cons}$)

listrec e { nil=>enil | x::xs with y =>econs}

作业

- **4.2 为语言T{list}(在Gödel的T上增加list类型)定义静态语义和动态语义,并证明安全性。**
  - 值

$$\frac{}{\text{z val}} \qquad \frac{e\ \text{val}}{s(e)\ \text{val}} \qquad \frac{}{\text{lam}[\tau](x.e)\ \text{val}}$$

$$\frac{}{\text{nil}[\tau]\ \text{val}} \qquad \frac{e_1\ \text{val} \qquad e_2\ \text{val}}{\text{cons}(e_1;e_2)\ \text{val}}$$

Thanks!