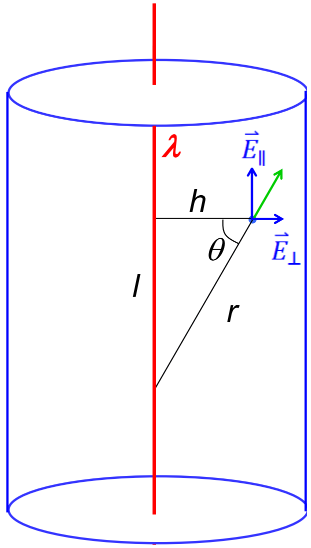
第1章 电力与电场

§ 1.4 高斯定理

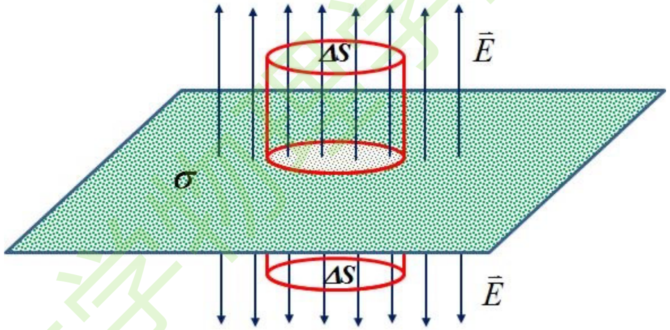
$$\boxed{\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

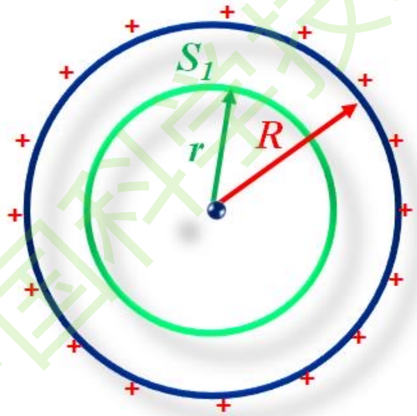
高斯定理应用举例



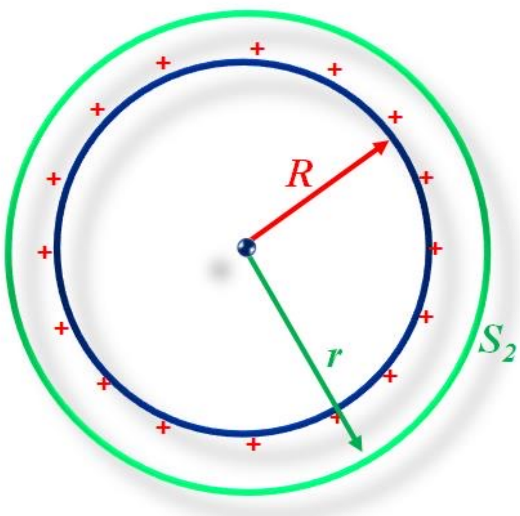
λ
$\vec{E}_{\parallel}$
h
θ
$\vec{E}_{\perp}$
l
r



ΔS
$\vec{E}$
σ
ΔS
$\vec{E}$

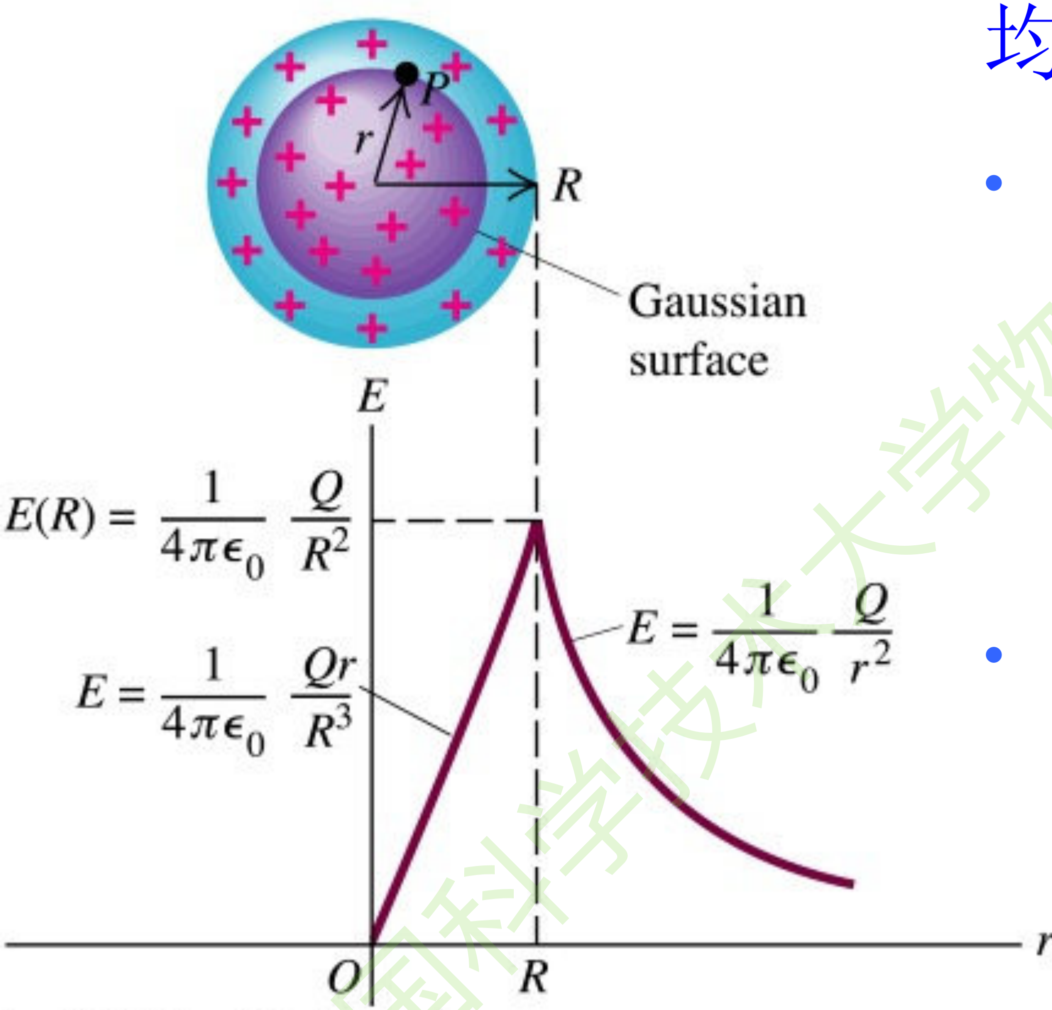


S_1
r
R



R
r
S_2

高斯定理应用举例(4)



均匀带电球体的电场

- 球内：

$$4\pi r^2 E=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{R^3}Q$$

$$\boldsymbol{E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^3}Q}$$

- 球外：

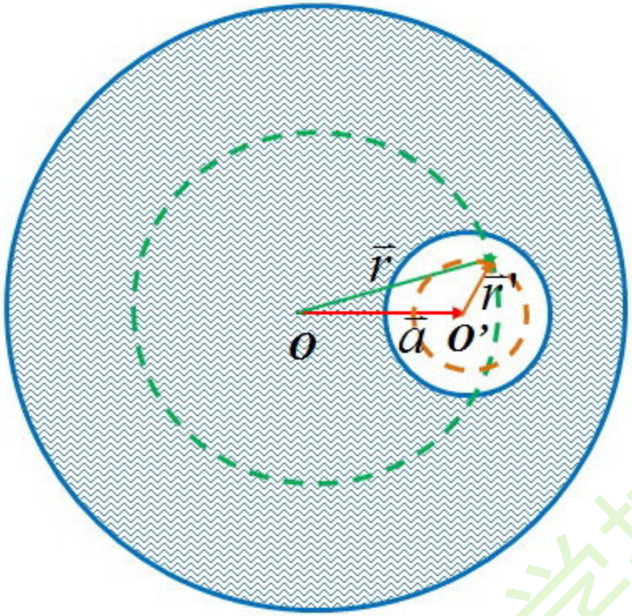
$$4\pi r^2 E=\frac{1}{\varepsilon_0}Q$$

$$\boldsymbol{E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}Q}$$

高斯定理应用举例(5)

带电球体中球形空腔的电场

- 将空腔看成同时填满密度为+ρ和-ρ的电荷



- 电荷为+ρ的实心大球产生的电场：

$$4\pi r^2 E_+ = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$\vec{E}_+ = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$$

- 电荷为-ρ的实心小球产生的电场：

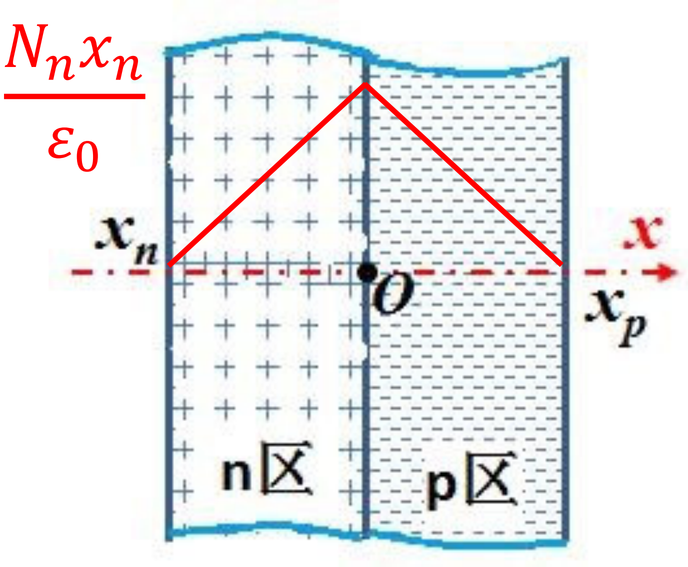
$$\vec{E}_- = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}'$$

- 球形空腔里的电场：

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$ **匀强电场！**

高斯定理应用举例(6)

半导体PN结



n区： $\rho = N_n e$

p区： $\rho = -N_p e$

电中性：$N_n x_n = N_p x_p$

求电场分布

根据对称性，电场强度沿x轴

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{dE}{dx} = \begin{cases} 0 & x < x_n \parallel x > x_p \\ \frac{N_n e}{\varepsilon_0} & x_n < x < 0 \\ -\frac{N_p e}{\varepsilon_0} & 0 < x < x_p \end{cases}$$

$$E = \begin{cases} 0 & x < x_n \parallel x > x_p \\ \frac{N_n e}{\varepsilon_0}(x - x_n) & x_n < x < 0 \\ -\frac{N_p e}{\varepsilon_0}(x - x_p) & 0 < x < x_p \end{cases}$$

带电体在静电场中的受力

根据电场强度的定义

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_0}{q_0}$$

点电荷在静电场中的受力为

$$\vec{F}_0 = q_0\vec{E}(\vec{r})$$

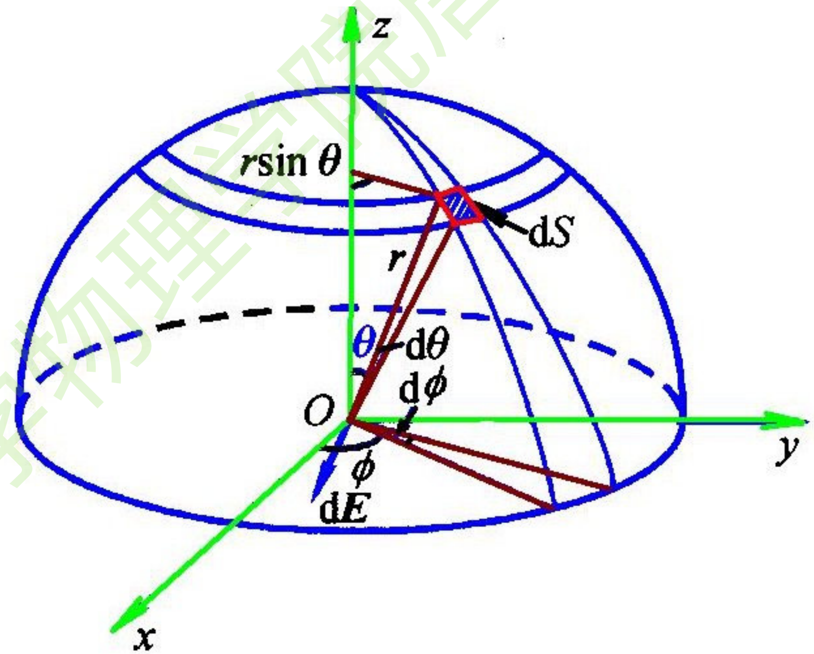
- 试探电荷要求电荷量充分小，不影响被研究物体的电荷分布
- 试探电荷试探的电场是当试探电荷不存在时的电场
- 因此，计算受力时所用电场是指外场，即施力物体产生的电场

推广到带电体

- 体电荷元： $dq = \rho dV$ $\vec{F} = \iiint_V \rho \vec{E} dV$
- 面电荷元： $dq = \sigma dS$ $\vec{F} = \iint_S \sigma \vec{E} dS$
- 线电荷元： $dq = \lambda dl$ $\vec{F} = \int_L \lambda \vec{E} dl$

$\vec{E}$为电荷元所在处的外场

[例]将一带电量为Q，半径为a的均匀球面切成两半，求两半球面间的静电力。



$$\boxed{\vec{F} = \iint_S \sigma \vec{E}\, dS}$$

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

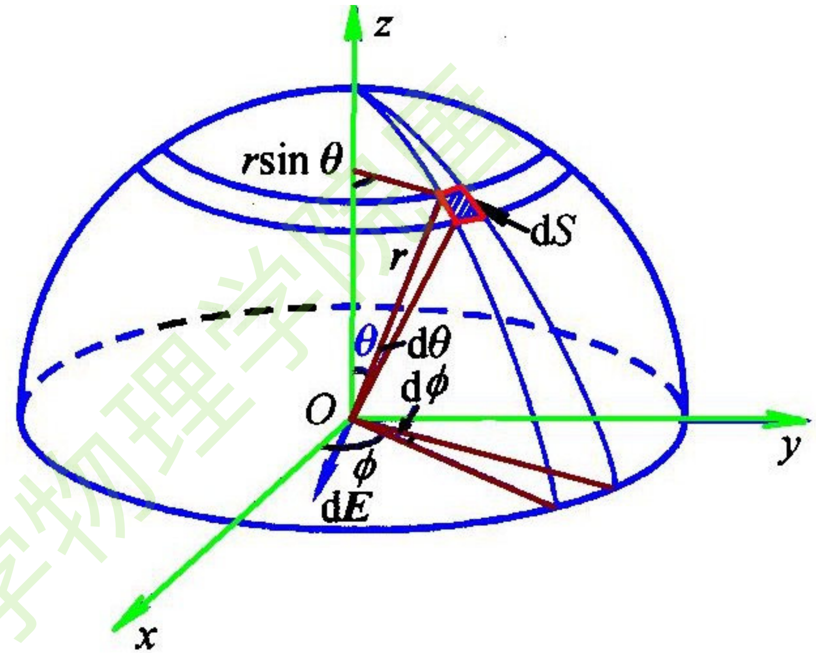
由高斯定理可得 $\vec{E} = \dfrac{\cancel{4\pi} a^2 \sigma}{\cancel{4\pi} r^2 \varepsilon_0}\vec{e}_r \xrightarrow{r\to a^+} \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_r$

$$F_z = \iint_S \sigma \vec{E}\cdot\vec{e}_z dS = \iint_S \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}\cos\theta\, dS = \frac{\sigma^2 \pi a^2}{\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{16\pi a^2 \varepsilon_0}$$

$$\vec{F} = \iint_S \sigma \vec{E} dS$$

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$



由高斯定理可得 $\vec{E} = 0 \ (r < a^-)$ $F_z = 0$

与前面所得结果不同，何为正解？

都不正确！ 都没有用外场！而是受力电荷元附近的总电场。

外场如何计算？

直接计算不好计算，因为不能用高斯定理

实际问题中，通常容易求得总电场$\vec{E}_t$（高斯定理），只需求得受力带电体（电荷元）的电场$\vec{E}_1$，即可得外场$\vec{E}$

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_t - \vec{E}_1}$$

求得总电场$\vec{E}_t$和电荷元的电场$\vec{E}_1$，即可得到外场$\vec{E}$

$\vec{E}_1$的计算

- 体电荷元

作半径为r的球面作为高斯面，r足够小，电荷密度为常数ρ

$$4\pi r^2 E_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4\pi}{3}r^3$$

$$E_1 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

$$E_1 \xrightarrow{r\to 0} 0$$

对受力带电体：$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_t}$

- 面电荷元

当距离面电荷元非常近的时候，面电荷元可当做无限大均匀带电平面

$$E_1 = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

电场在两侧不连续

$$\vec{E} = \vec{E}_t - \vec{E}_1 = \vec{E}_t \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z$$

通常情况下，总电场在两侧也不连续，但外场连续，

$$\vec{E} = \frac{\left(\vec{E}_t^+ + \vec{E}_t^-\right)}{2}$$

外场为两侧总电场平均值

- 线电荷元

当距离线电荷元非常近的时候，线电荷元可当做无限长均匀带电直线

$$2\pi r L E_1 = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E_1 \xrightarrow{r\to 0} \infty$$

线电荷元在自身处产生的电场无穷大

往往总电场也为无穷大，外电场可以是有限值，只是不能通过

$$\vec{E} = \vec{E}_t - \vec{E}_1$$

这种方法来求解外场，而是直接求外场

带电体在静电场中的受力

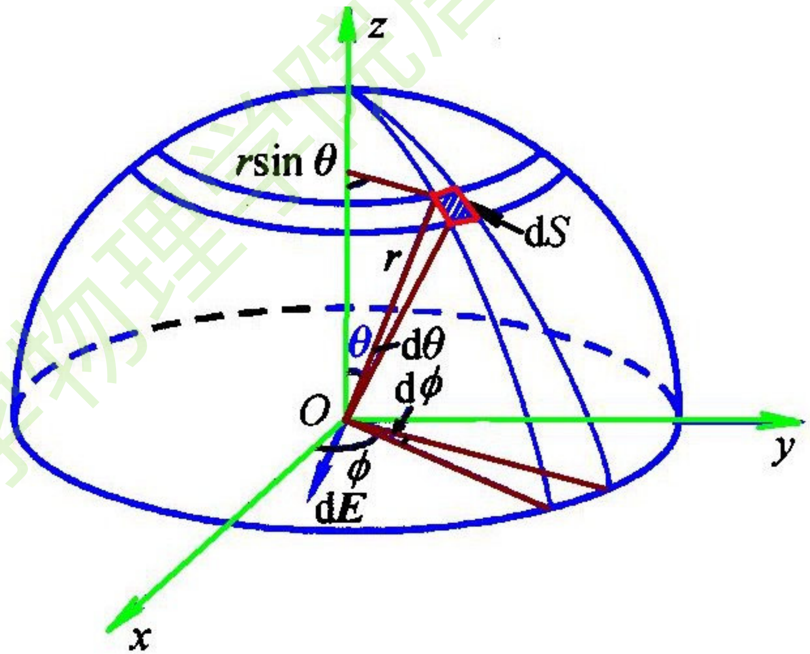
- 体电荷元： $dq = \rho dV$ $\vec{F} = \iiint_V \rho \vec{E}_t dV$
- 面电荷元： $dq = \sigma dS$ $\vec{F} = \iint_S \sigma \dfrac{\vec{E}_t^+ + \vec{E}_t^-}{2} dS$
- 线电荷元： $dq = \lambda dl$ $\vec{F} = \int_L \lambda \vec{E} dl$
- 点电荷：q $\vec{F} = q\vec{E}$

E 为电荷元所在处的外场

E_t为电荷元所在处的总电场

注意：虽然外场仅由施力物体的电荷分布决定，但是施力物体的电荷分布会受到受力物体的影响（静电感应）

[例]将一带电量为Q，半径为a的均匀球面切成两半，求两半球面间的静电力。



$$\boxed{\vec{F} = \iint_S \sigma \vec{E} dS}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2}}$$

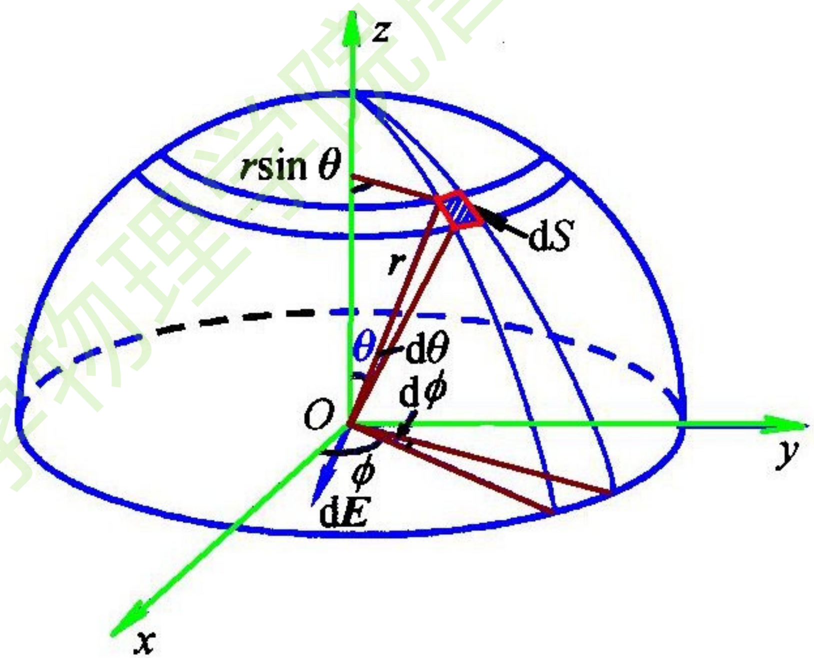
$$\boxed{dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi}$$

由高斯定理可得 $\vec{E}_t^+ = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_r$，$\vec{E}_t^- = 0$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\left(\vec{E}_t^+ + \vec{E}_t^-\right)}{2} = \frac{\vec{E}_t^+}{2}}$$

$$F_z = \iint_S \sigma \vec{E} \cdot \vec{e}_z dS = \iint_S \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \cos\theta \, dS = \frac{Q^2}{32\pi a^2 \varepsilon_0}$$

[例]将一带电量为Q，半径为a的均匀球体切成两半，求两半球间的静电力。



$$\boxed{\vec{F}=\iiint_V \rho\vec{E}_t dV}$$

$$\boxed{\rho=\frac{Q}{4\pi a^3/3}=\frac{3Q}{4\pi a^3}}$$

$$\boxed{dV=r^2 dr\sin\theta\, d\theta d\varphi}$$

$$\vec{E}_t=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r$$

$$F_z=\iiint_V \rho\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r\cdot\vec{e}_z dV=\iiint_V \frac{\rho^2 r}{3\varepsilon_0}\cos\theta\, dV$$

$$F_z = \iiint\limits_V \frac{\rho^2 r}{3\varepsilon_0} \cos\theta \, dV = \frac{\rho^2}{3\varepsilon_0} \int_0^a r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{\rho^2}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{a^4}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \frac{\rho^2 \pi a^4}{12\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\rho = \frac{Q}{4\pi a^3/3} = \frac{3Q}{4\pi a^3}}$$

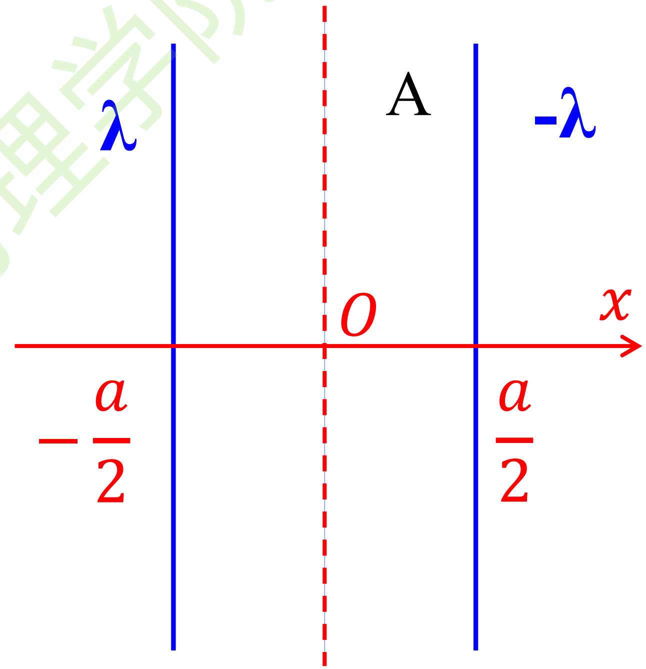
$$F_z = \frac{3Q^2}{64\pi a^2 \varepsilon_0}$$

静电斥力

[例]两条平行的无限长均匀带电直导线，相距为a，电荷线密度为λ 与-λ，两导线构成的平面内任一点A，到中线（两线公垂线的中点构成的直线）的距离为x，求：

1）A点的场强

2）两线单位长度的相互作用力。



无限长均匀带电直线的电场分布为

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$$

根据电场叠加原理，可得A点电场强度

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x+\frac{a}{2}} - \frac{1}{x-\frac{a}{2}}\right)\vec{e}_x = -\frac{\lambda a}{2\pi\varepsilon_0(x^2 - a^2/4)}\vec{e}_x$$

- A在两线之间时，场强沿x正方向
- A在两线之外时，场强沿x负方向

求受力

右侧电荷元所在的外场为

$$\boxed{\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\vec{e}_x}$$

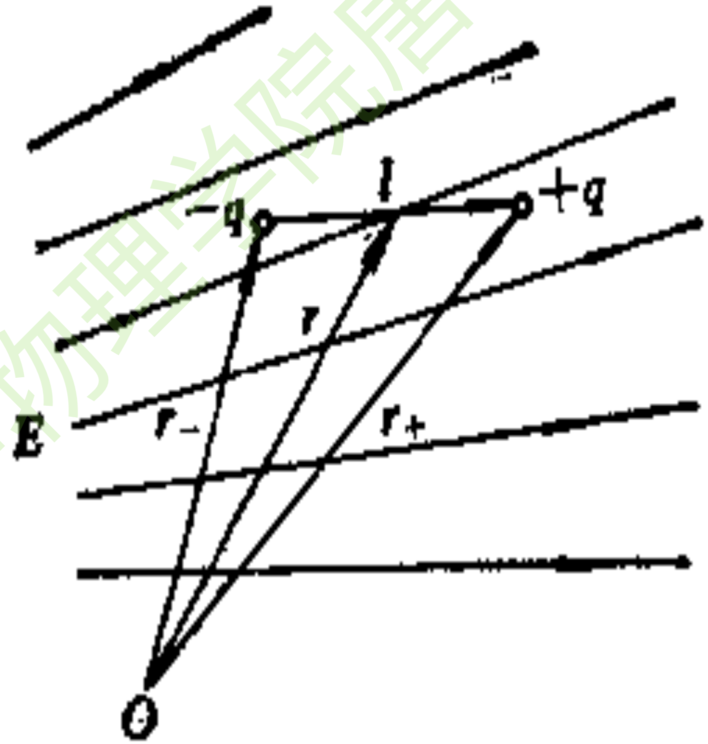
单位长度的受力为：

$$\boxed{\vec{F}=\int_0^1 -\lambda dl\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\vec{e}_x=-\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 a}\vec{e}_x}$$

同法可得，左侧单位导线受力为：

$$\boxed{\vec{F}=\int_0^1 \lambda dl\frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0(-a)}\vec{e}_x=\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 a}\vec{e}_x}$$

[例] 求电偶极子在电场中的受力和力矩。



负电荷在电场中的受力为

$$\vec{F}_{-} = -q\vec{E}(\vec{r}_{-})$$

正电荷在电场中的受力为

$$\vec{F}_{+} = q\vec{E}(\vec{r}_{+})$$

电偶极子在电场中的受力为

$$\vec{F} = \vec{F}_{+} + \vec{F}_{-} = q\left[\vec{E}(\vec{r}_{+}) - \vec{E}(\vec{r}_{-})\right]$$

$$= q\left[\vec{E}\left(\vec{r} + \frac{\vec{l}}{2}\right) - \vec{E}\left(\vec{r} - \frac{\vec{l}}{2}\right)\right]$$

当$l \ll r$，利用泰勒展开，可得

$$\vec{F} = q\left[\vec{E}\left(\vec{r} + \frac{\vec{l}}{2}\right) - \vec{E}\left(\vec{r} - \frac{\vec{l}}{2}\right)\right]$$

$$\approx q\left[\vec{E}(\vec{r}) + \left(\frac{\vec{l}}{2} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{E}(\vec{r}) - \vec{E}(\vec{r}) - \left(-\frac{\vec{l}}{2} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{E}(\vec{r})\right]$$

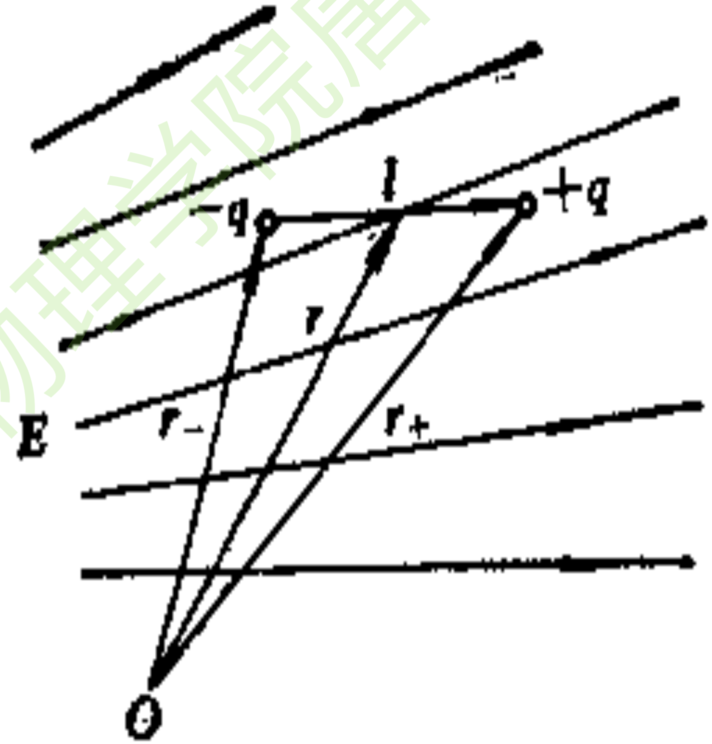
$$= q(\vec{l} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}(\vec{r}) = (q\vec{l} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}(\vec{r}) = (\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$$

- 以电偶极子的中心为参考点求力矩

负电荷在电场中所受力矩为

$$\vec{L}_- = (\vec{r}_- - \vec{r}) \times \vec{F}_-$$

$$= -\frac{\vec{l}}{2} \times (-q)\vec{E}(\vec{r}_-) = \frac{1}{2}\vec{p} \times \vec{E}(\vec{r}_-)$$



正电荷在电场中所受力矩为

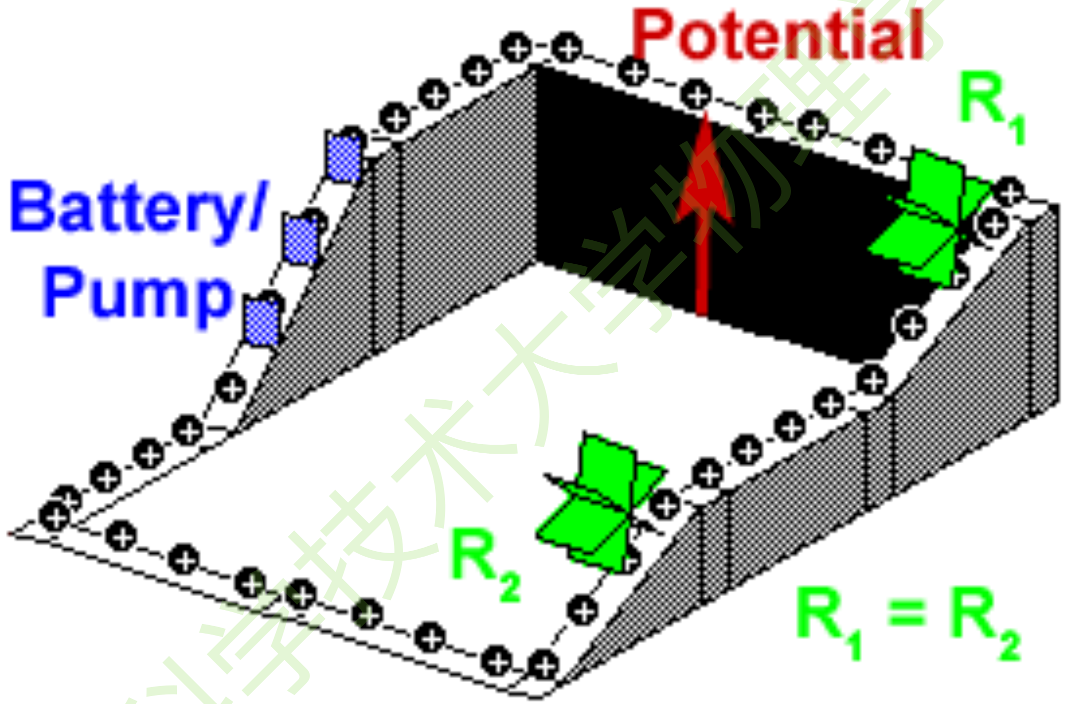
$$\vec{L}_+ = (\vec{r}_+ - \vec{r}) \times \vec{F}_+$$

$$= \frac{\vec{l}}{2} \times q\vec{E}(\vec{r}_+) = \frac{1}{2}\vec{p} \times \vec{E}(\vec{r}_+)$$

电偶极子在电场中所受力矩为

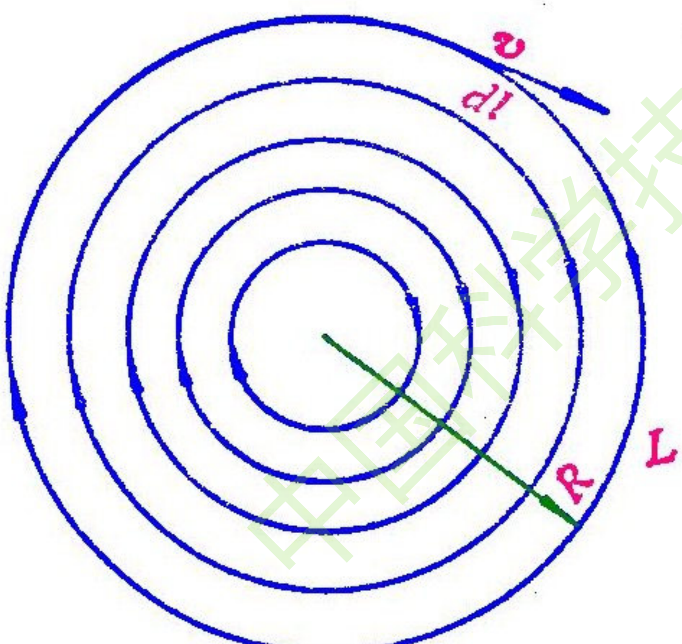
$$\vec{L} = \vec{L}_+ + \vec{L}_- = \frac{1}{2}\vec{p} \times \left[\vec{E}(\vec{r}_+) + \vec{E}(\vec{r}_-)\right] \approx \boldsymbol{\vec{p} \times \vec{E}(\vec{r})}$$

§ 1.5 环路定理



环量

为了定量描述水的速度场的旋转程度，可以引入环量



对任意闭合曲线L，速度在路径上的分量沿该曲线一周的积分为速度对L的环量

$$\text{环量} = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

泉涌，水源

水向外流，通量为正，

但是环量为零。

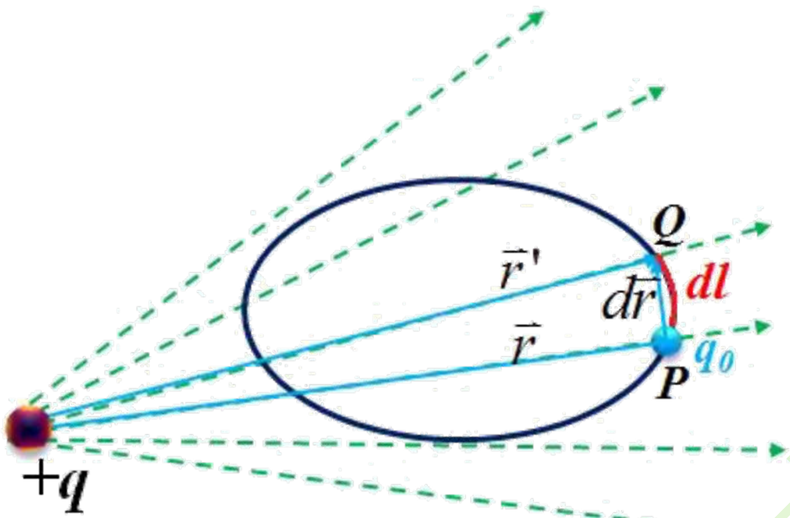
环量反应水流的旋转程度

虽然封闭曲面里水量没有

增减，但是水也在流动。

涡旋既有通量，也有环量

静电场的环量



$$环量 = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- 静电场的环量反映了静电场的旋转程度
- 静电场的环量还有具体的物理意义

§ 1.5.1 静电场做功

点电荷在静电场中的受力为

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

点电荷在静电场中运动时，静电场对点电荷做功为

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$W = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = q\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\text{环量} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

静电场的环量代表静电场将单位电荷移动一个闭合曲线所做的功

点电荷电场的环量

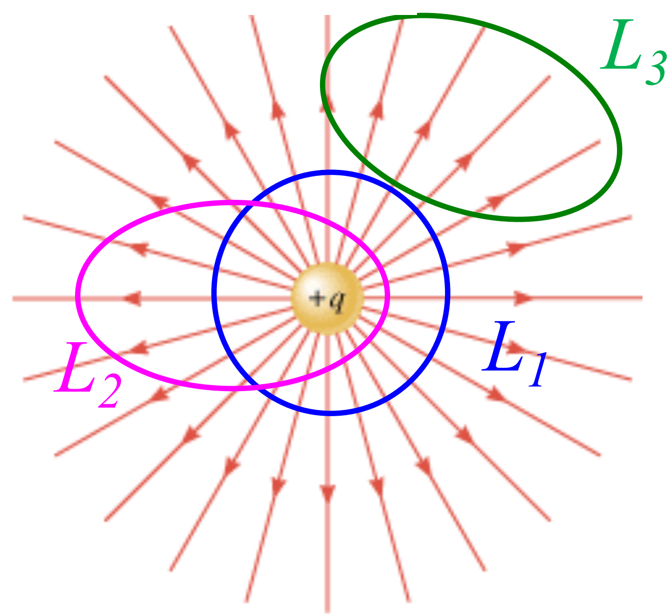
静止点电荷电场 $\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

$$环量=\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_L \frac{1}{r^2}\vec{e}_r\cdot d\vec{l}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_L \frac{1}{r^2}dr=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_L d\frac{1}{r}=0$$

静止点电荷电场的环量为0

对任意闭合曲线都成立



静电场的环量

根据电场的叠加原理，静电场无论是由点电荷、点电荷体系还是带电体所产生，都可以认为是由点电荷或者可以被当做点电荷的电荷元产生的电场叠加而成

$$\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i \quad 或 \quad \vec{E}=\int d\vec{E}$$

$$环量=\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=\oint_L \int d\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$=\int \oint_L d\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

任何静电场的环量都为0

§ 1.5.2 静电场的环路定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

积分形式

由数学上的斯托克斯公式

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

微分形式

- 静电场是无旋场
- 静电场对电荷在电场中沿任何闭合环路做功为零

作业

- 1. 8
- 1. 35