

第1章 电力与电场

§ 1.1 电力起源

§ 1.2 库仑定律

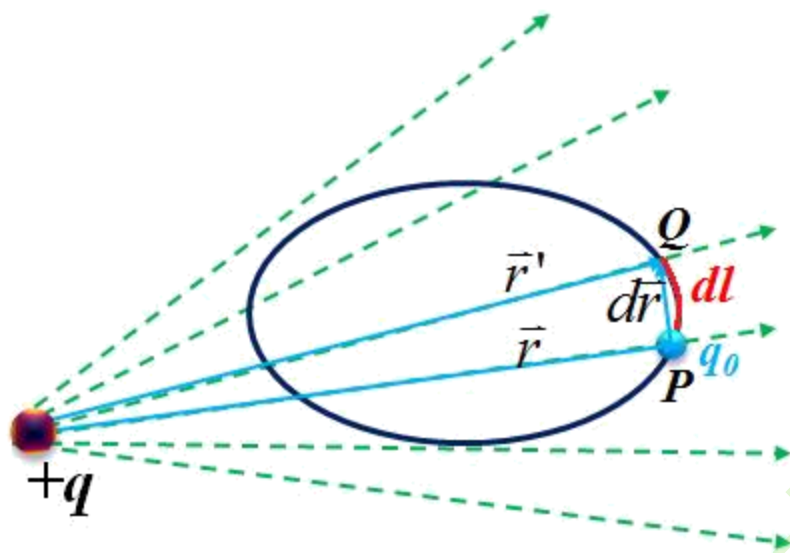
§ 1.3 电场强度

§ 1.4 高斯定理

§ 1.5 环路定理

中国科学技术大学物理学院唐

静电场的环量



$$\text{环量} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- 静电场的环量反映了静电场的旋转程度
- 静电场的环量还有具体的物理意义：

代表静电场将单位电荷移动一个闭合曲线所做的功

§ 1.5.2 静电场的环路定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{积分形式}$$

由数学上的斯托克斯公式

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \text{微分形式}$$

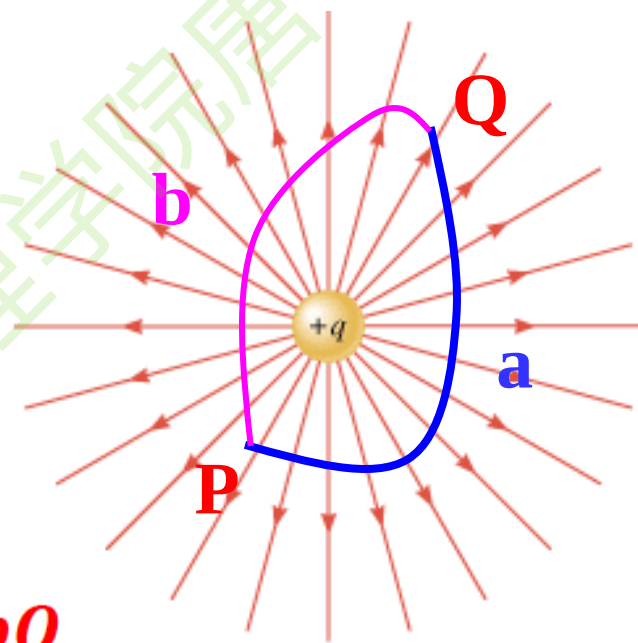
- 静电场是无旋场
- 静电场对电荷在电场中沿任何闭合环路做功为零

静电场是保守力场

任取闭合环路 $PAQBP$ ，根据环路定理，将一电荷在电场中运动一圈，电场做功为零

$$A_{PaQ} + A_{QbP} = q \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

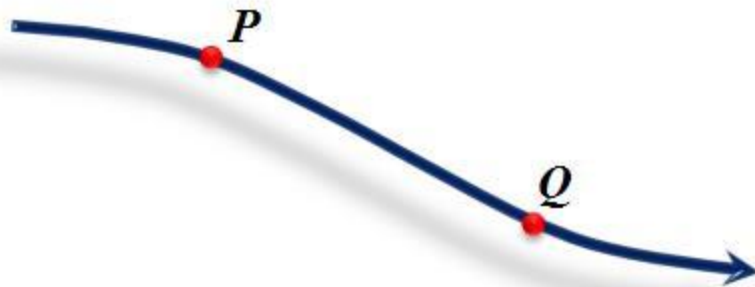
$$A_{PaQ} - A_{PbQ} = 0 \quad A_{PaQ} = A_{PbQ}$$



- 电场力做功与路径无关
 - 静电场是保守力场
- 保守力场必是有势场
 - 静电场是有势场，可以引入势能的概念

§ 1.5.3 电势能

- 电场力的做功与路径无关，只与初始位置有关
- 电势能：点电荷处于外电场中某一位置时具有的能量， $W(\vec{r})$
- 电场力对点电荷的做功转化为点电荷电势能的改变



电场力对点电荷做功等于点电荷电势能的减少

$$A_{PQ} = W_{PQ} = W(P) - W(Q) = q \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

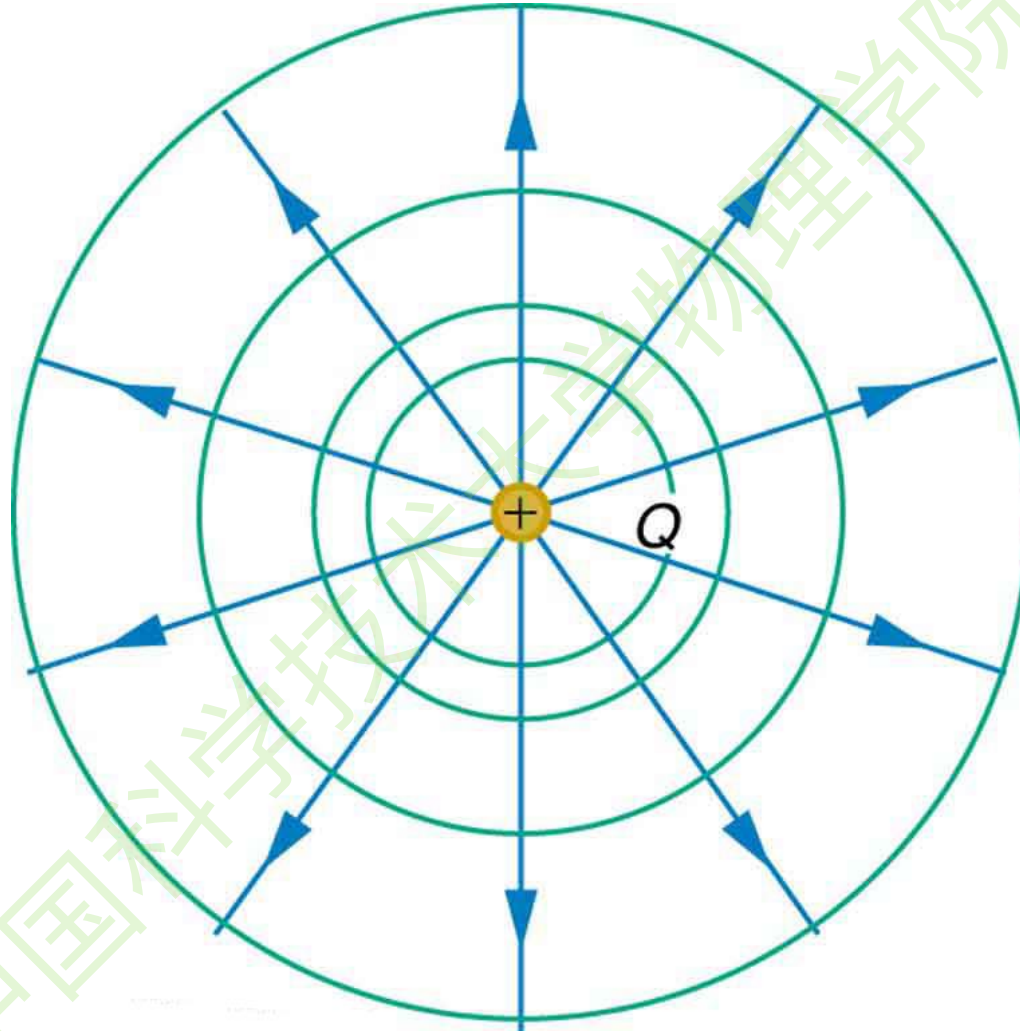
电势能需要参考点，通常把无限远处的电势能定义为零

$$W(P) = W(P) - W(\infty) = q \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q \int_\infty^P \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电场中 P 处的电荷移动到无穷远处过程中：

- 电场力对电荷所做的功就是电荷在该点相对于无穷远处的电势能
- 或者说，从无穷远移动一个电荷到 P 点，外力克服电场力所做的功就是电荷在该点相对无穷远处的电势能

§ 1.5.4 电势与电势差



电势

电势能 $W_{PQ} = W(P) - W(Q) = q \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$

与放入的试探电荷电量有关

定义 $U_{PQ} \equiv \frac{W_{PQ}}{q} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$ 只与静电场的性质有关

称为P, Q两点间的**电势差**

电势差与参考点的选取无关，通常取无穷远处为参考点
则P点的**电势**为：

$$U(P) = U(P) - U(\infty) = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_\infty^P \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电势差： $U_{PQ} = U(P) - U(Q) = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$

实际问题中，常常以大地或者电器外壳的电势为零

电势的单位

- **电势能**的单位与能量相同，用焦耳(J)。

- **电势**的单位与电势能完全不同。

电势是纯粹描述电场性质的物理量，与电场中有没有电荷无关。

- **电势差和电势的单位为焦耳/库仑**，在SI中称为伏特

(V)，即

$$1\text{伏特} = \frac{1\text{焦耳}}{1\text{库仑}}$$

$$1V = \frac{1J}{1C}$$

电势的计算

- 点电荷的电势

点电荷的电场强度： $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

由电势的定义可得：

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &= \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{l} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

电势的叠加原理

对点电荷系，由电场的叠加原理

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

可得电势

$$U(\vec{r}) = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$
$$= \sum_i \int_r^\infty \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \sum_i U_i(\vec{r})$$

点电荷体系的电势等于各个电荷单独存在时产生电势的代数

点电荷体系的电势

N 个点电荷组成的体系： $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$

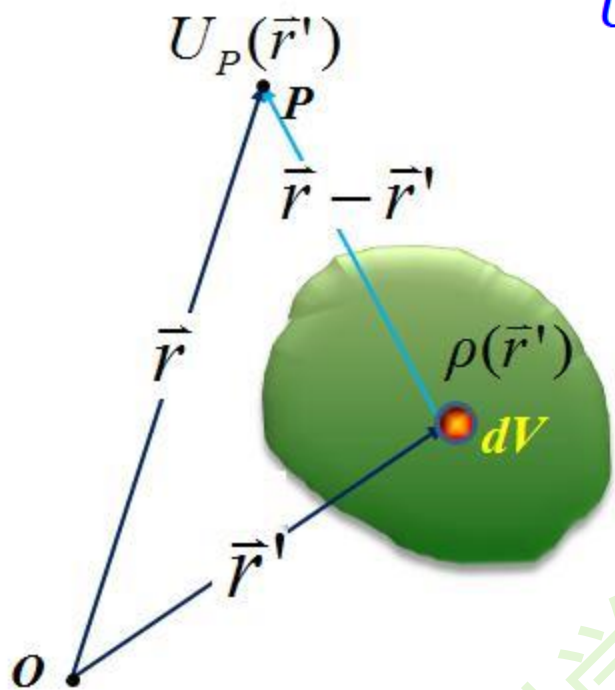
分别位于： $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N$

$$U_i(\vec{r}) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

由叠加原理，该点电荷体系在处产生的电势为：

$$U(\vec{r}) = \sum_i U_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

带电体的电势



$$U(\vec{r}) = \sum_i U_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

体带电体: $U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

面带电体: $U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

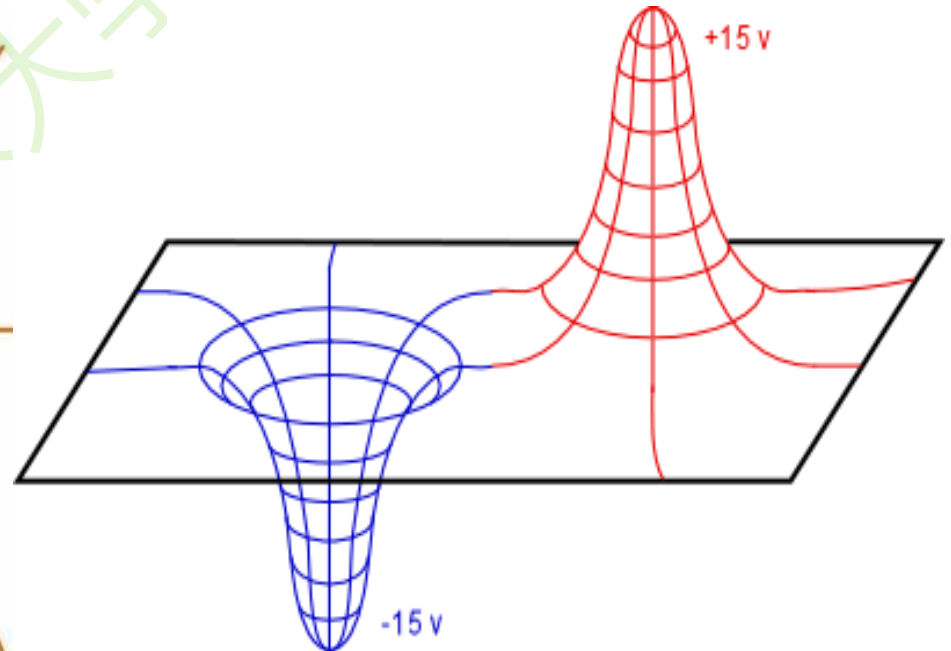
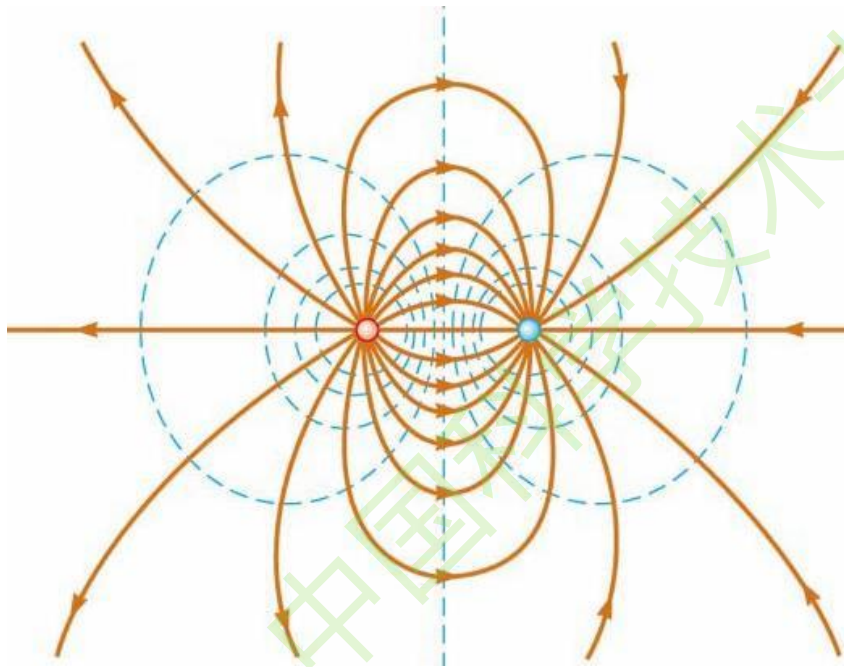
线带电体: $U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\lambda(\vec{r}') dl'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

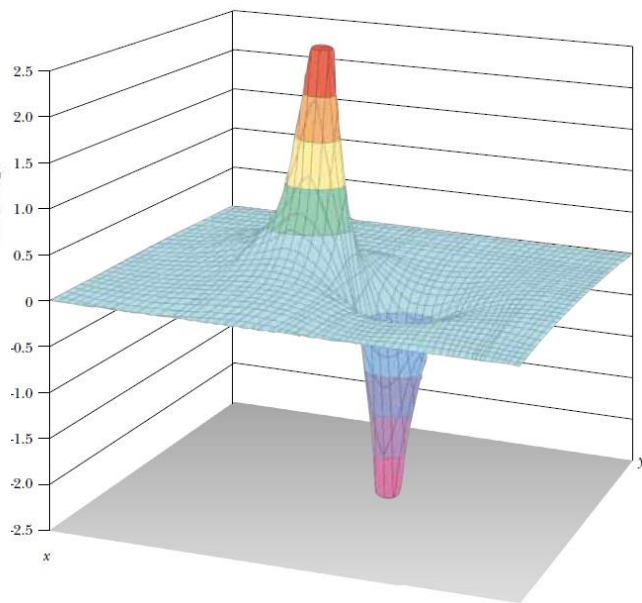
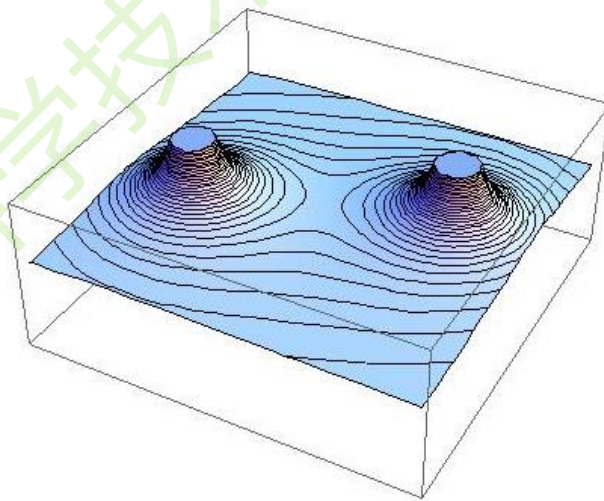
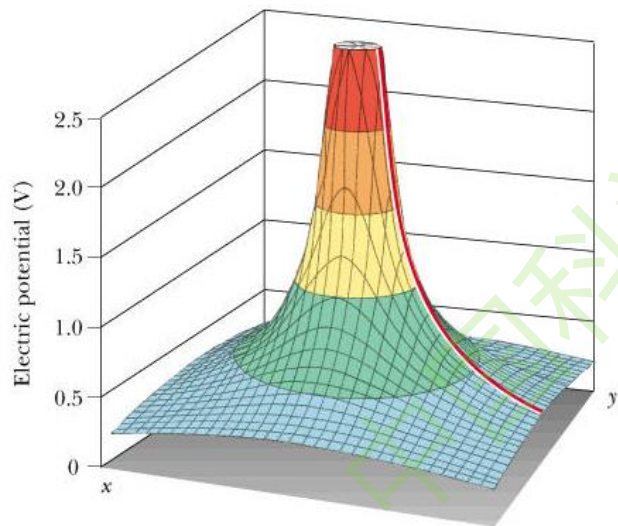
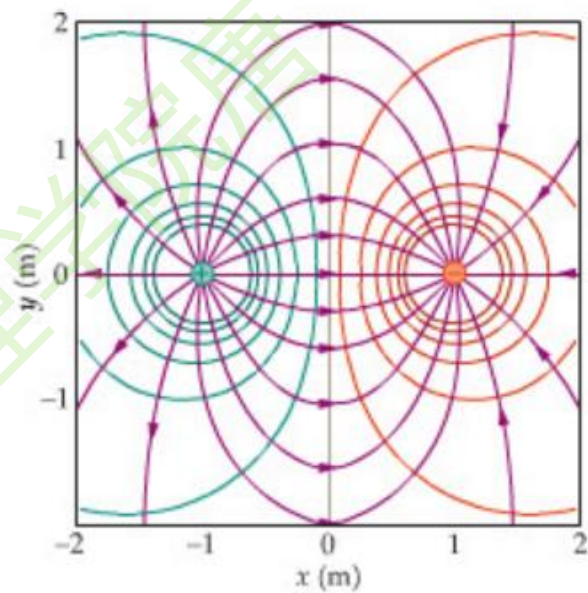
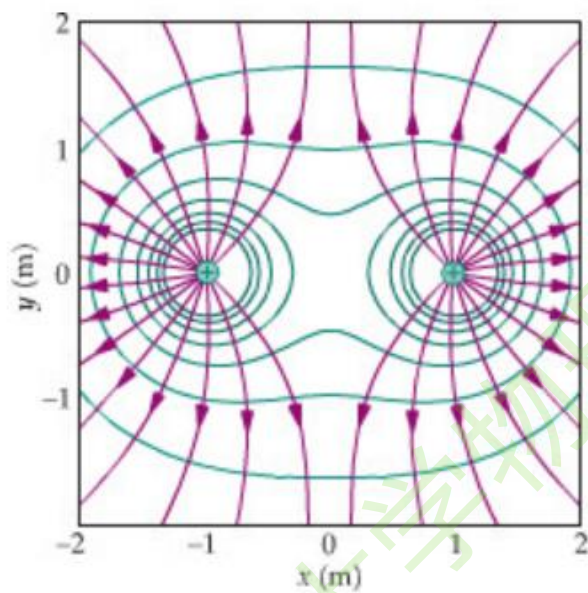
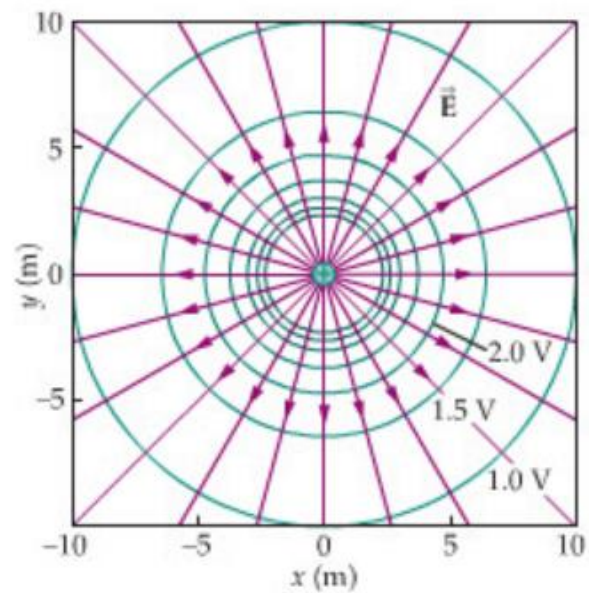
等势面

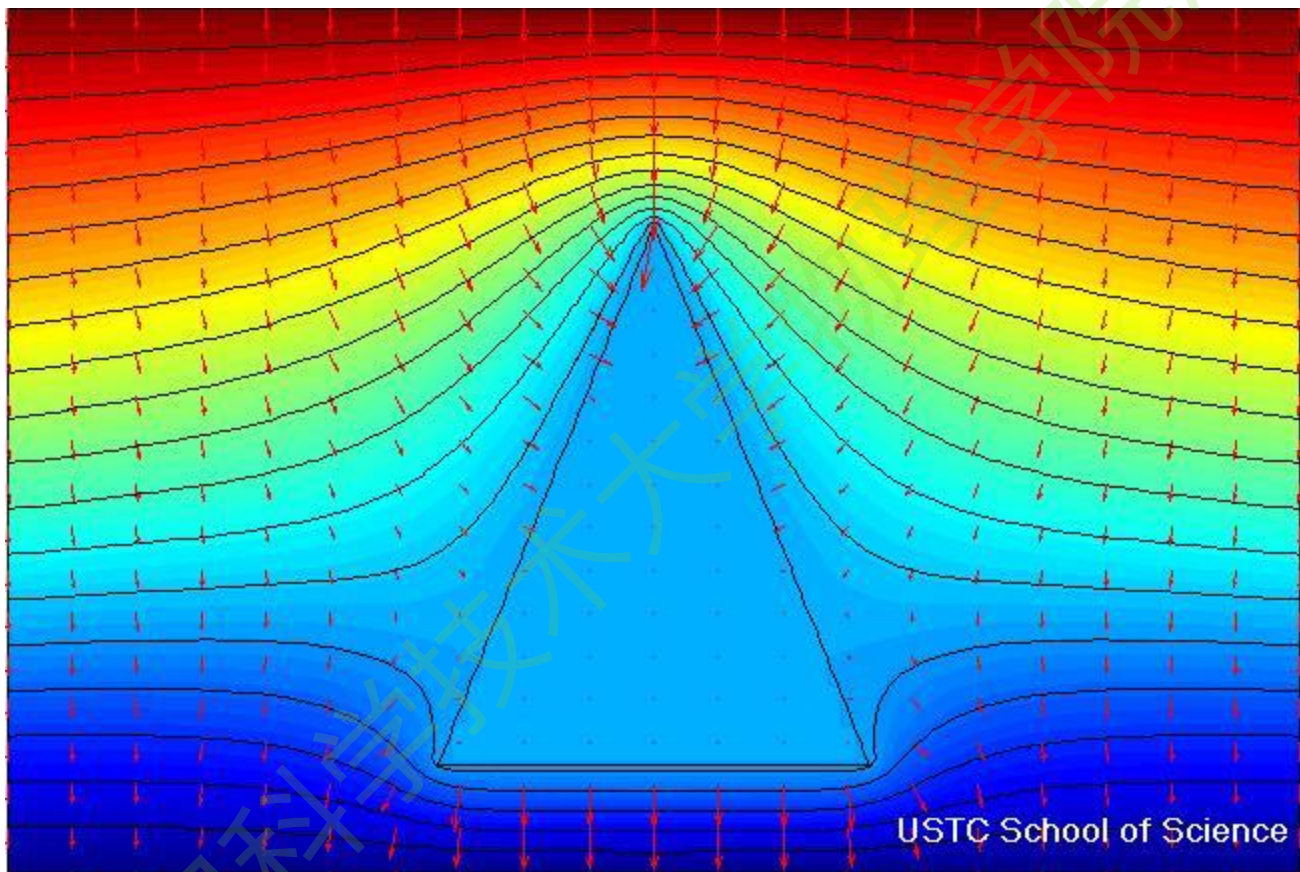
电势是空间坐标的标量函数，是标量场

标量场通常用等值面来进行形象的几何表述

电势场的等值面称为等势面，同一等势面上，电势处处相等

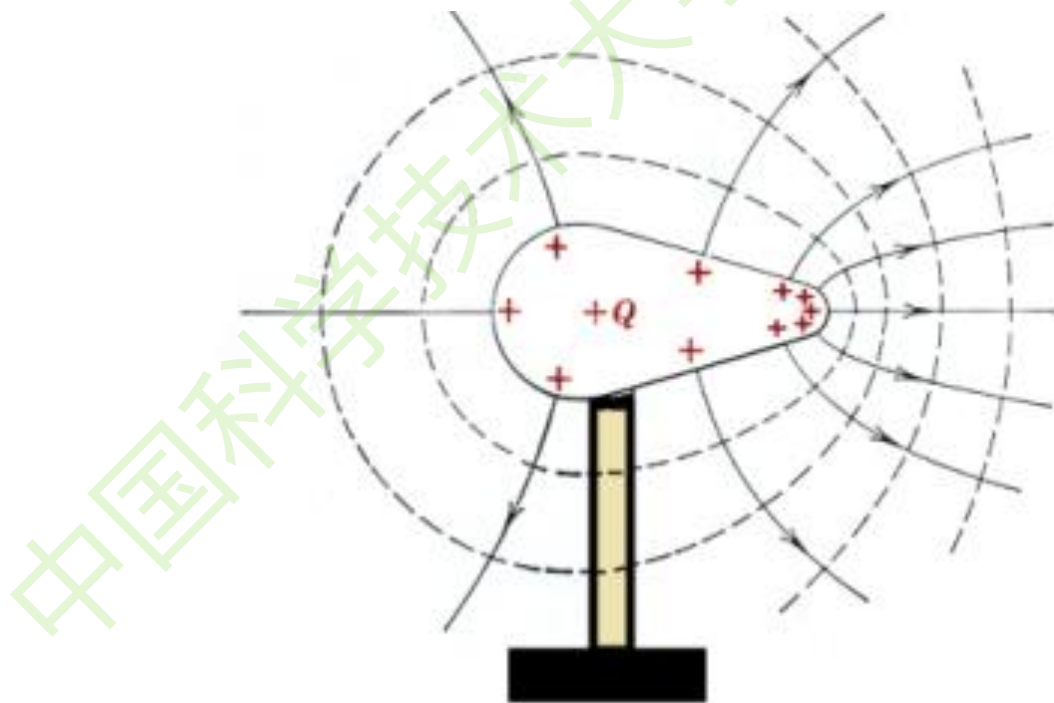






等势面的特性

- 一根电场线不可能与同一等势面相交两次或多次
- 空间某点的电场强度应与该处的等势面垂直
- 电场强度的大小也可用等势面的疏密程度来表示

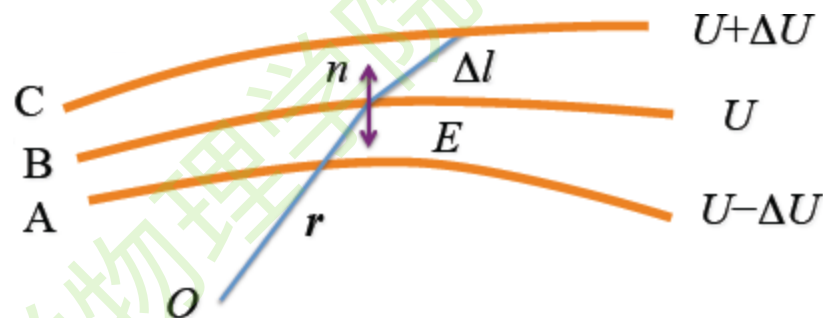


电势与电场的关系

三个非常接近的等势面

单位点电荷从B经 Δl 移动到C

电场力做功等于电势能的减少



$$U_{BC} = U_B - U_C = -\Delta U = \int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \Delta n$$

$$E = -\frac{\Delta U}{\Delta n}$$

$$\vec{E} = -\frac{\Delta U}{\Delta n} \vec{n}$$

在数学上，一个大小为某标量函数沿其等值面法线方向的导数，
方向沿等值面法向的矢量是该标量场的梯度，用grad表示：

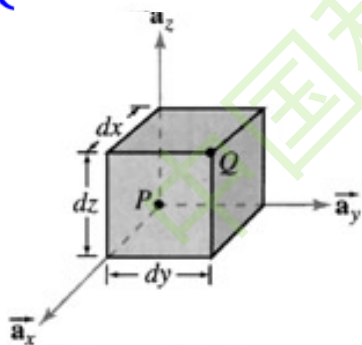
$$\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial n} \vec{n} = \nabla U$$

$$\vec{E} = -\frac{\Delta U}{\Delta n} \vec{n} = -\nabla U$$

静电场中任何一点的电场强度，其大小等于该点电势梯度的大小，方向与电势梯度的方向相反，即电势减小的方向

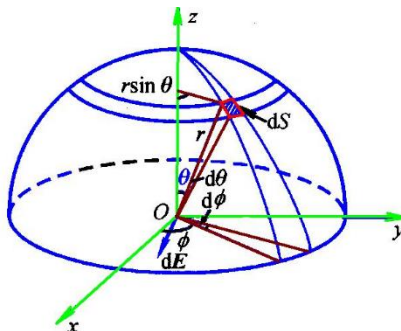
直角坐标：

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$



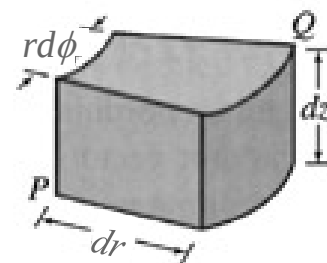
球坐标：

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \end{cases}$$



柱坐标：

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} \\ E_\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} \\ E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

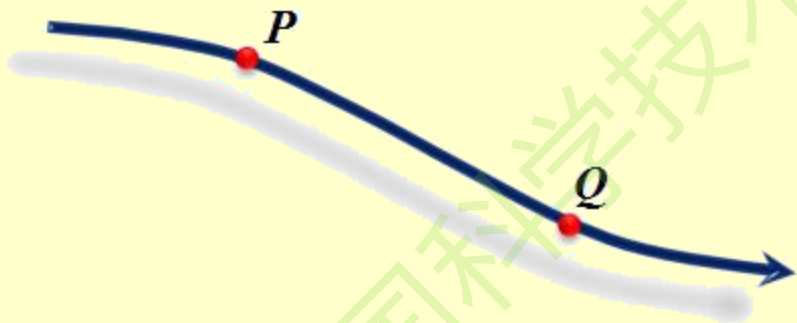


电势与电场

电场 $\rightarrow$ 电势

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

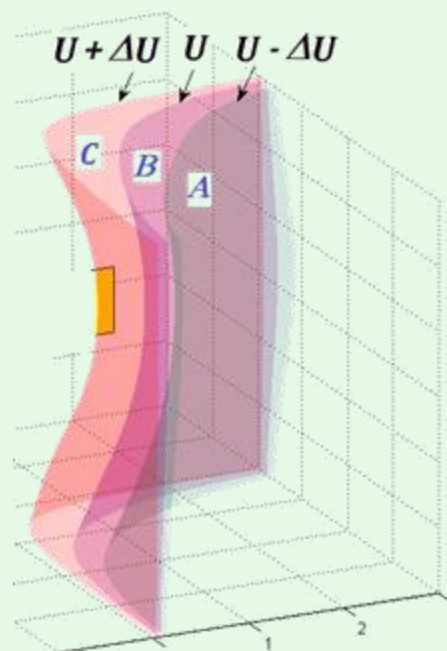
$$U_{PQ} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



电势 $\rightarrow$ 电场

$$U(\vec{r}) = \int dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{E} = -\nabla U$$



泊松方程

- 环路定理只用到了电场的有心力特征
- 求解电场强度或电势还需用到库仑定律或者高斯定理

高斯定理：
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

将电场强度变换成电势
$$\vec{E} = -\nabla U$$

得到泊松方程：
$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

电荷分布一旦确定，空间电势也就确定了

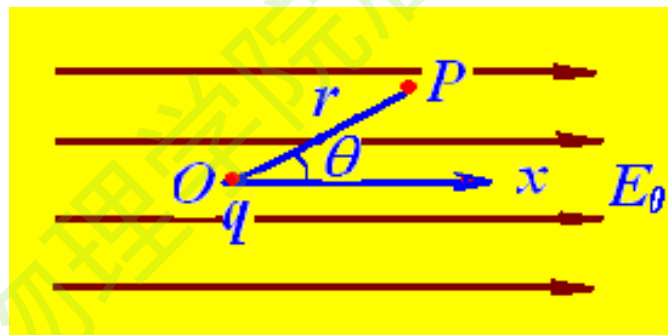
若 $\rho = 0$ ，则变成拉普拉斯方程
$$\nabla^2 U = 0$$

电势零点的选取

- 电势函数的绝对值与电势的零参考点的选择有关，而电势零参考点的选取具有很大的任意性。
- 电势零点的选取并不影响电场强度分布。
- 通常将无穷远处作为电势的零点，因为有限区域中电荷产生的电场与距离的平方成反比，无限远处任意两点的电势差为零，即无限远处是等势区域。因而可将电势零点取在这个区域，方便计算。
- 但当电荷分布延伸到无限大区域时，无限远处并不是等势区域，虽然可以选取远处某点为电势零点，但不能笼统的将无限远这个区域作为电势零点。

[例]在均匀电场中放入一个点电荷，求空间的电势分布。

根据电势叠加原理，总电势为均匀电场的电势和点电荷电势之和



对均匀电场，不能取无穷远处为电势零点，取空间中某点为电势零点

$$U_1 = -E_0 x + C_1 = -E_0 r \cos \theta + C_1$$

对点电荷电场，不能取O点为电势零点

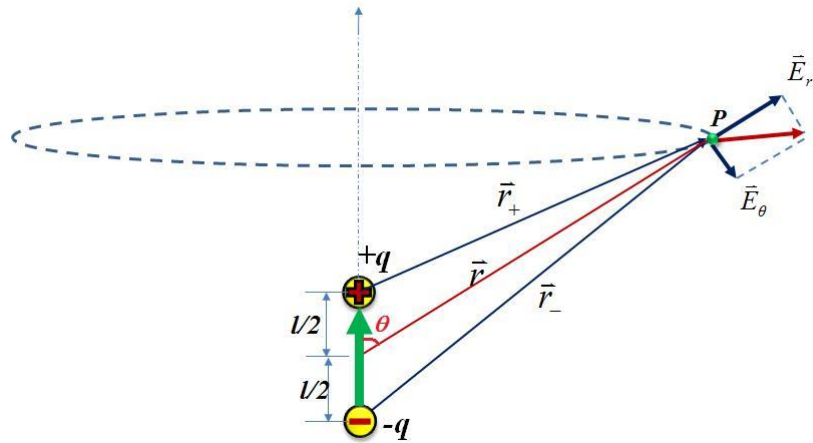
$$U_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_2$$

$$U = U_1 + U_2 = -E_0 r \cos \theta + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + C$$

电势零点为空间中某一不在O的点，不用在意其具体在哪里

电势与电场求解例(1)

求电偶极子的电势与电场分布



由点电荷体系的电势,

$$U(\vec{r}) = \sum_i U_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

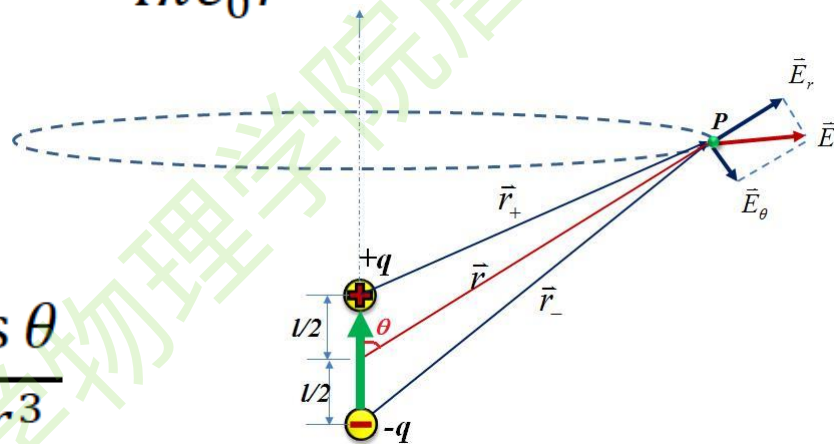
$$r_{\pm} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \mp r l \cos \theta} = r \sqrt{1 + \left(\frac{l}{2r}\right)^2 \mp \frac{l}{r} \cos \theta}$$

$$\frac{1}{r_{\pm}} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{l}{2r}\right)^2 \mp \frac{l}{r} \cos \theta \right]^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{l}{2r} \cos \theta \right) = \frac{1}{r} \pm \frac{l}{2r^2} \cos \theta$$

$$U(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E} = -\nabla U$$

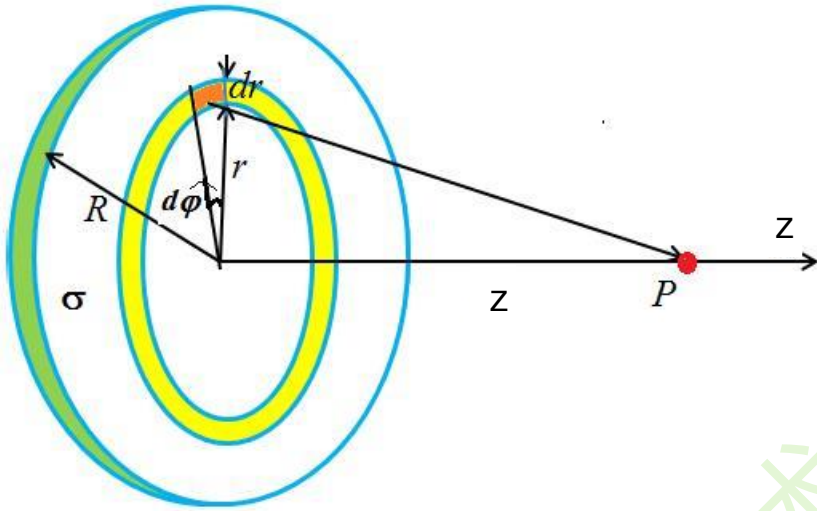
$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{2ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{ql \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$



$$\vec{E} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta = \frac{[3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{p}]}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{-\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

电势与电场求解例(2)

求均匀带电圆盘轴线上的电场分布



$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

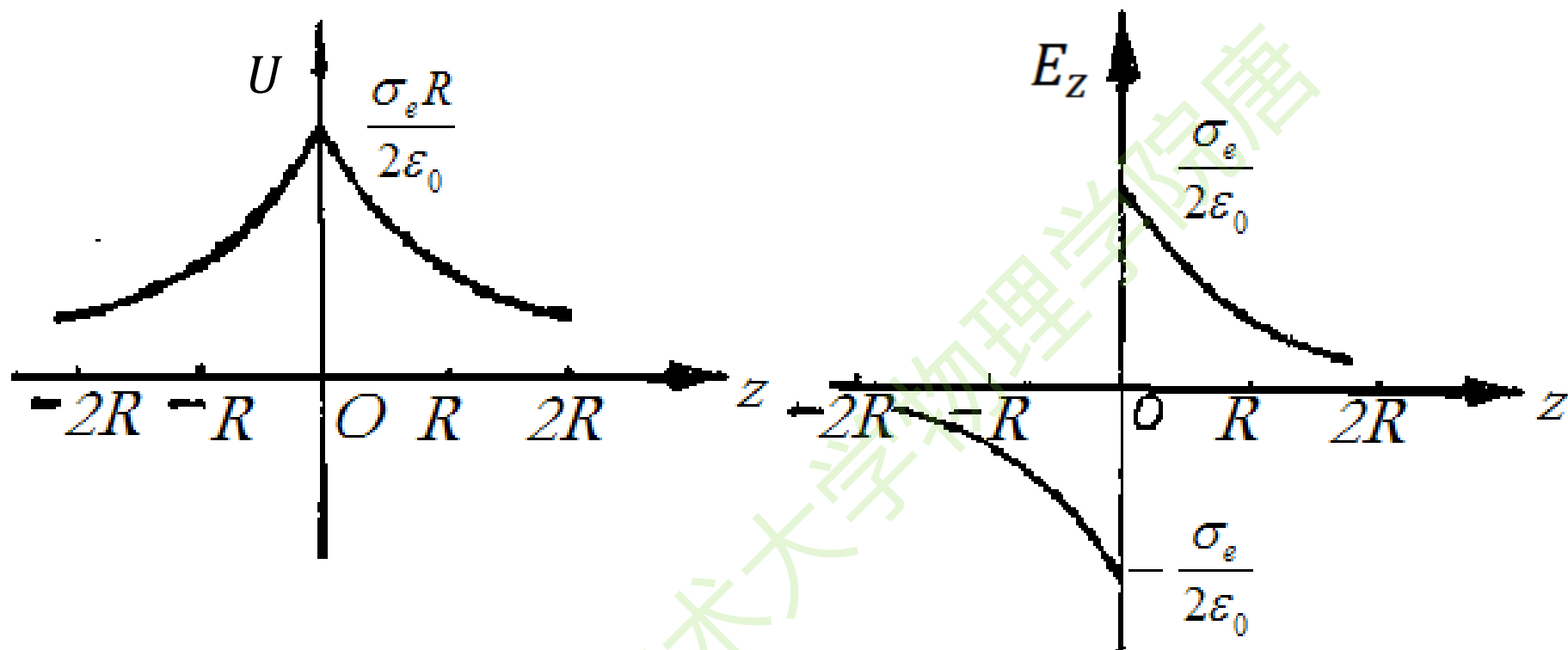
$$dS = r dr d\varphi$$

$$U(\vec{r}) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{dS}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{z^2 + r^2}} \int_0^{2\pi} d\varphi$$
$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - |z| \right)$$

$$U(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - |z| \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \begin{cases} \sqrt{z^2 + R^2} - z & z > 0 \\ \sqrt{z^2 + R^2} + z & z < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = 0 \\ E_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \\ E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) & z < 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$E_z \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} & z < 0 \end{cases}$$



$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + z^2} - |z|)$$

$$\pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$$

均匀带电圆盘轴线上的电势和电场强度的分布

作业

- 1. 22
- 1. 28
- 1. 29
- 1. 34

中国科学技术大学物理学院唐