

# 第2章 静电场中的物质与电场能量

§ 2.1 静电场中的导体

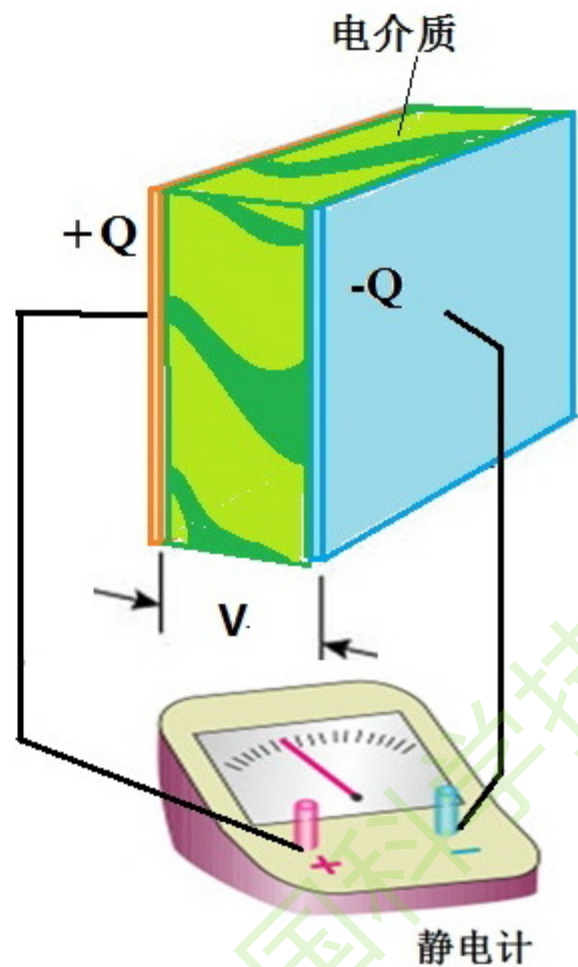
§ 2.2 电容与电容器

**§ 2.3 静电场中的介质**

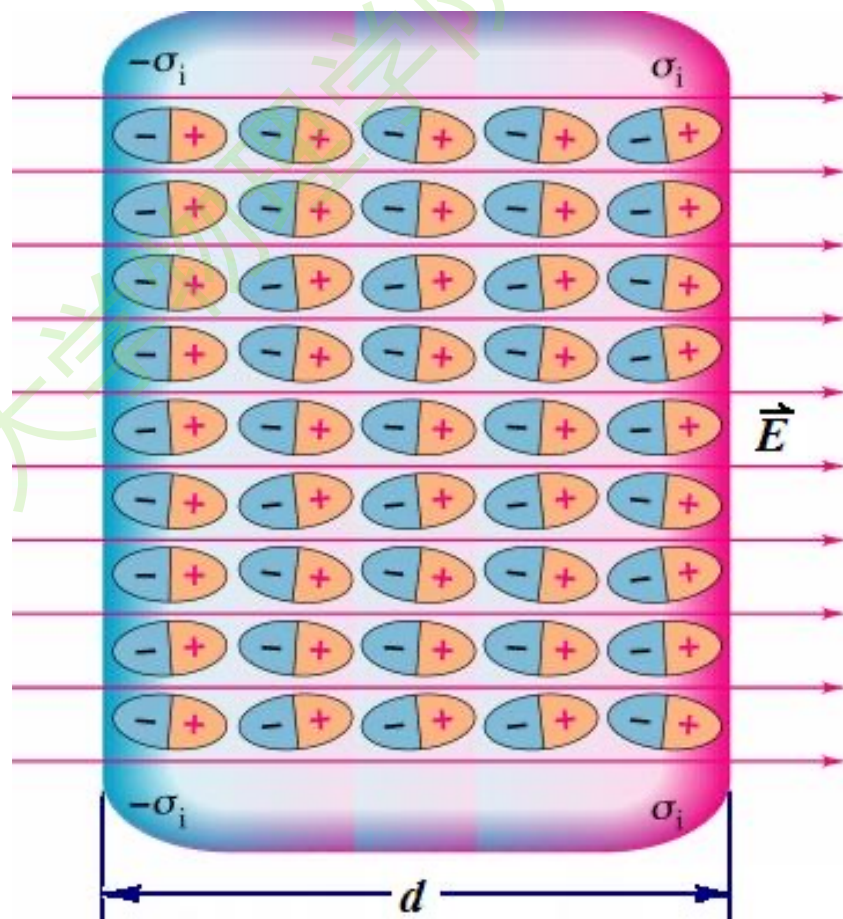
§ 2.4 静电场的能量

中国科学技术大学物理学院

## § 2.3 静电场中的介质

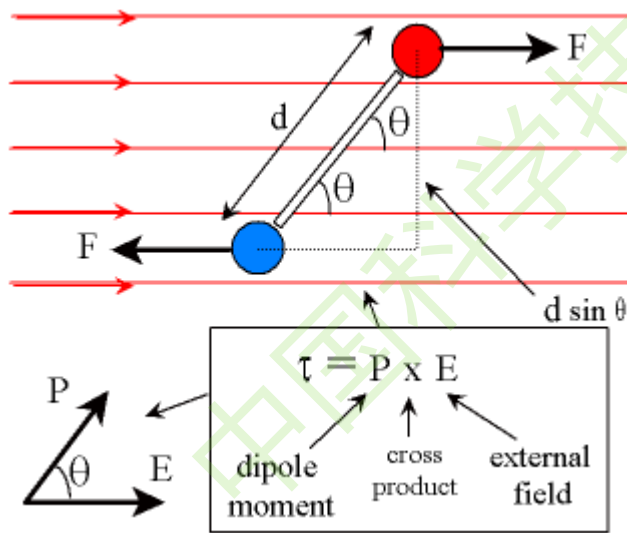


$$V < V_0$$

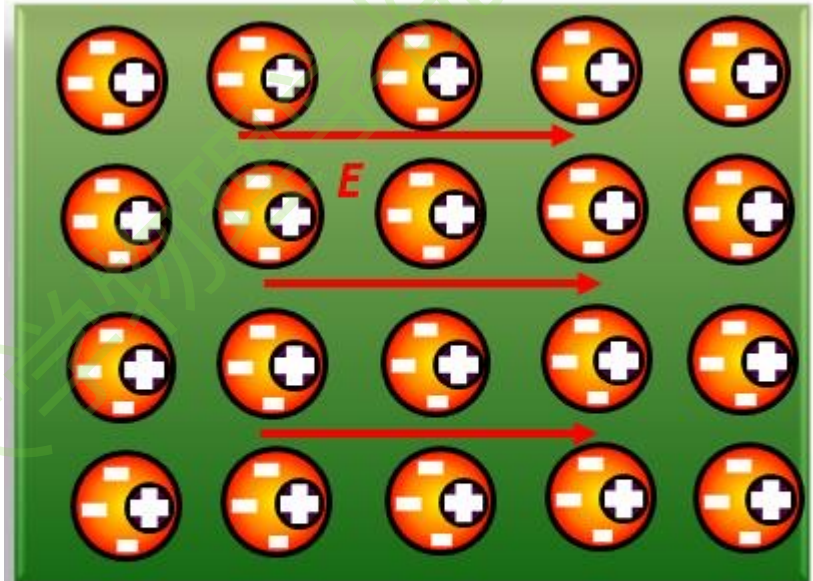


## § 2.3.2 电介质的极化

### 取向极化

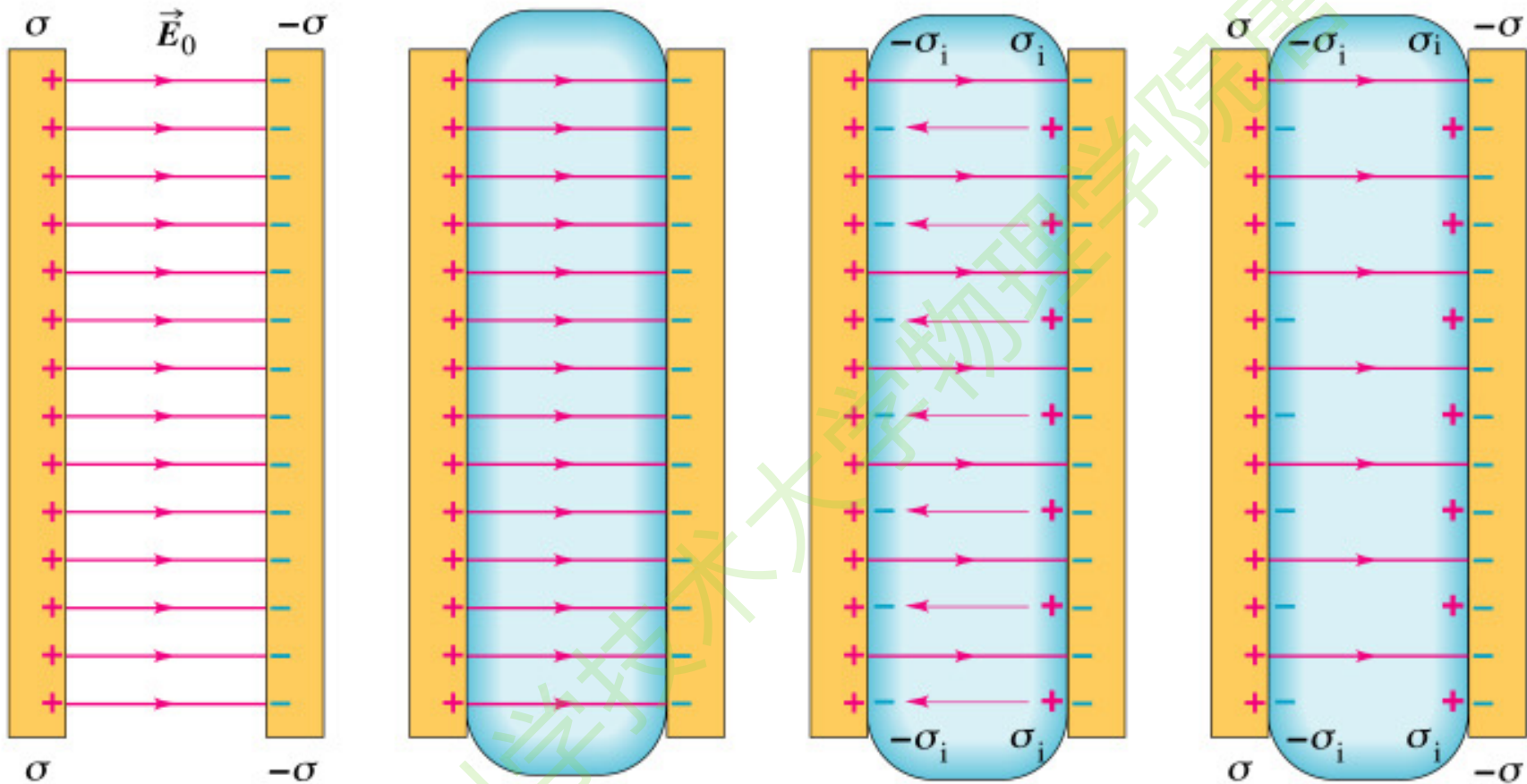


### 位移极化



有外场

## § 2.3.2 电介质的极化 Dielectric polarization



在外电场下，电介质表面出现**极化电荷**，产生**极化电场**，部分抵消外电场。这一现象称为电介质的“**极化**”。

# 极化强度

Polarization Vector

如何定量描述定介质极化的强弱？

定义：**极化强度**为单位体积内分子电偶极矩的**矢量和**

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V} = n \langle \vec{p} \rangle$$

极化强度反映了电介质极化的**大小和方向**

如果在电介质中 $\vec{P}$ 处处相同，则电介质为**均匀极化**

如果电介质内部某点领域的物理特性在所有方向上都相同，及电介质特性与外加电场的方向无关，则为**各向同性**电介质

- 对于各向同性电介质:

极化强度 $\vec{P}$ 必然平行于产生他的外电场 $\vec{E}$

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V} = n \langle \vec{p} \rangle = \chi \epsilon_0 \vec{E}$$

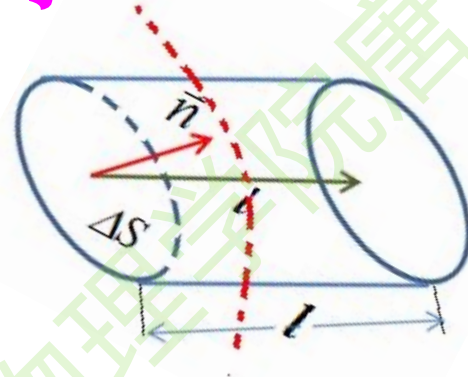
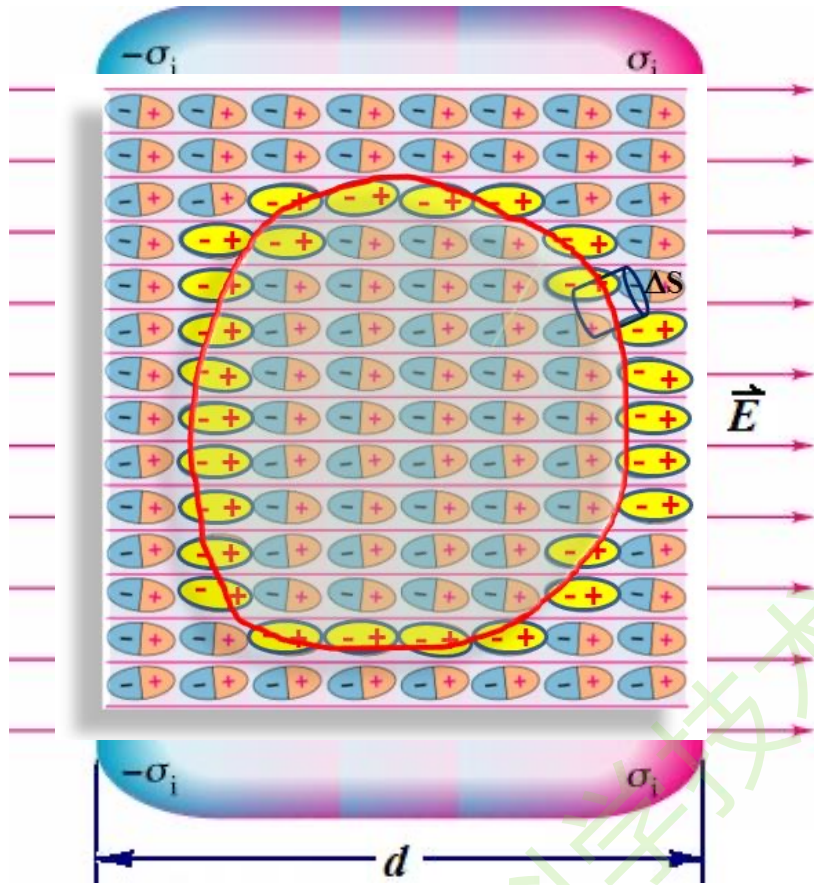
$\chi$ 为材料的极化率，由电介质的性质决定

Electric susceptibility

$\chi$ 决定了材料的相对介电常数 $\epsilon_r$



# 极化电荷



$\vec{n}$ 为面元 $\Delta S$ 的法向方向

圆柱侧面沿极化强度 $\vec{P}$

圆柱侧面长度为电偶极子长度

$$l = \vec{p}/q$$

圆柱体以外的电偶极子对体积 $V$ 的电荷贡献为零

圆柱体以内的每个电偶极子对体积 $V$ 的电荷贡献为 $-q$

圆柱体中净电荷：

$$\begin{aligned}d\mathbf{q}' &= n(-q)dV = -nql dS \cos \theta \\ &= -np dS \cos \theta = -n\vec{p} \cdot d\vec{S} = -\vec{P} \cdot d\vec{S}\end{aligned}$$

体积V中总电荷：

$$Q' = -\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\iiint_V (\nabla \cdot \vec{P}) dV$$

$$Q' = \iiint_V \rho' dV$$

$$\rho' = -\nabla \cdot \vec{P}$$

对于均匀介质，介质内部不存在极化电荷



极化电荷只存在介质交界面上

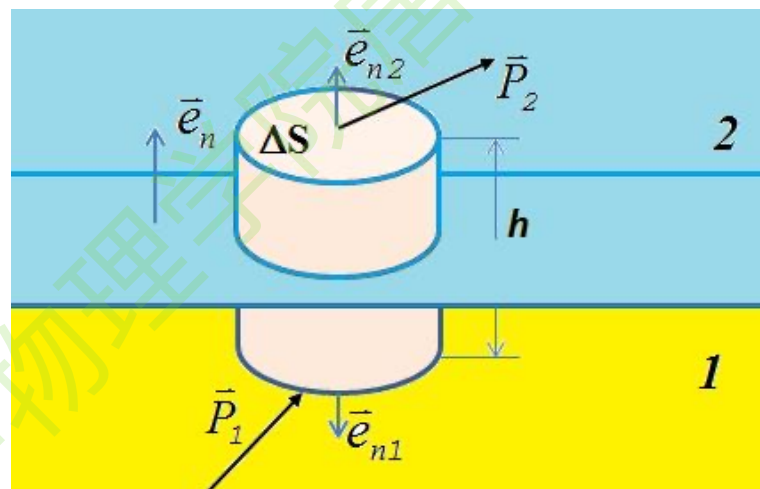
$$Q' = - \oiint \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

$$= -(\vec{P}_1 \cdot \Delta\vec{S}_1 + \vec{P}_2 \cdot \Delta\vec{S}_2 + \delta)$$

$$= -(-\vec{P}_1 \cdot \vec{e}_n + \vec{P}_2 \cdot \vec{e}_n)\Delta S + \delta$$

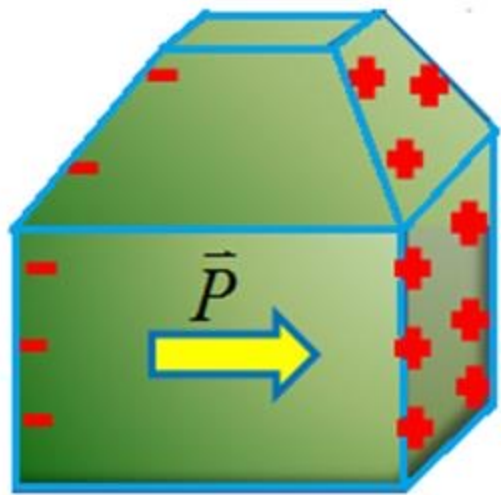
$$= -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{e}_n \Delta S + \delta \quad \delta \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\sigma' = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{e}_n = P_{1n} - P_{2n}$$

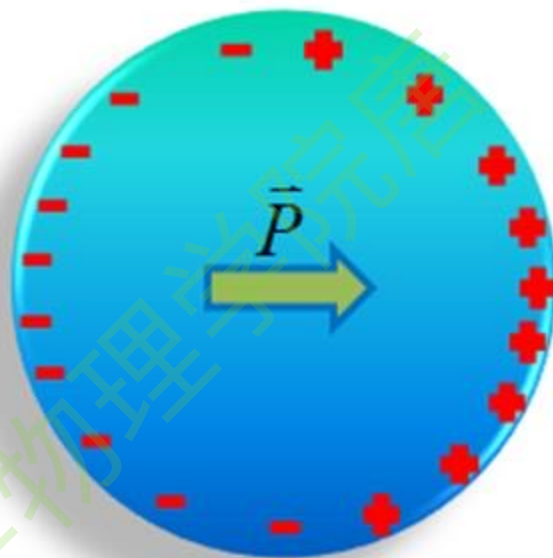


当电介质2为导体或真空时：

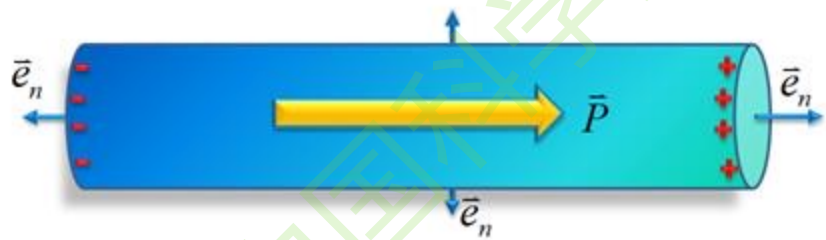
$$\sigma' = P_{1n}$$



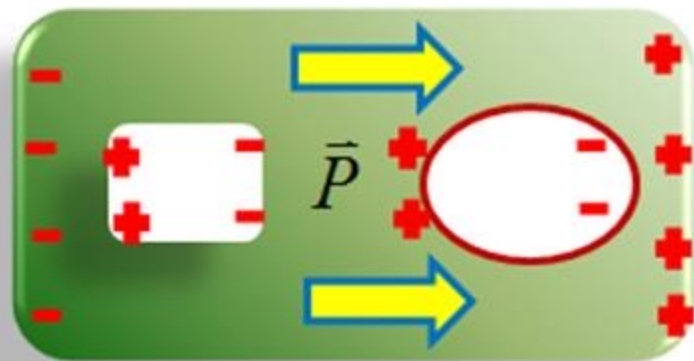
(a)



(b)



(c)



(d)

【例2.3】一个半径为 $a$ 均匀极化的介质球，其电极化强度为 $\vec{P}$ ，该介质球置于空气中，球心处的电场强度是多少？

【解】球内没有电荷，只有表面有极化电荷

极化电荷密度：

$$\sigma' = P_{1n} = P \cos \theta$$

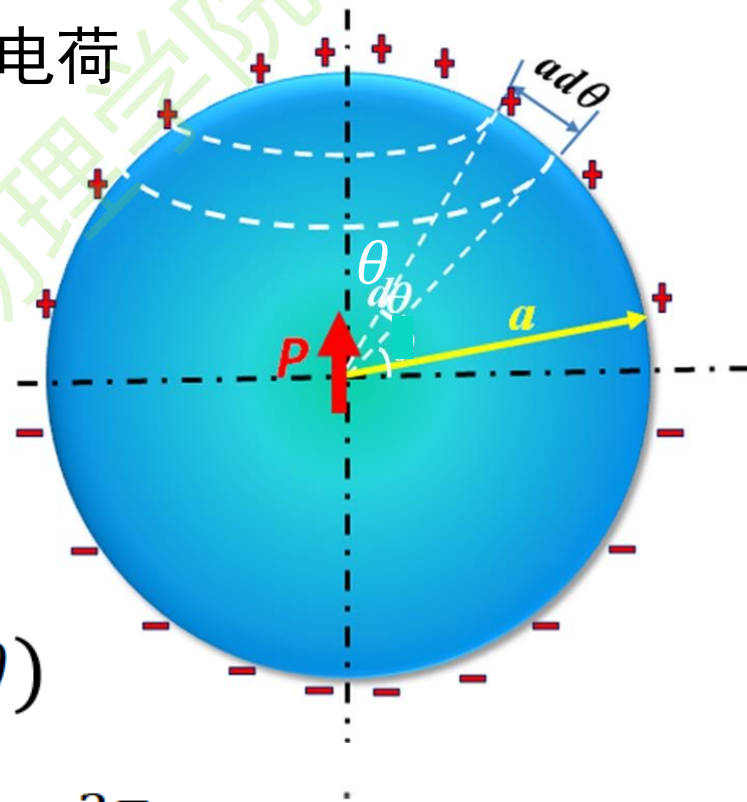
球心处电场强度：

$$dE' = \frac{\sigma' a^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi \epsilon_0 a^2} (-\cos \theta)$$

$$E' = -\frac{P}{4\pi \epsilon_0} \int_0^\pi \sin \theta (\cos \theta)^2 d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{P}{3\epsilon_0}$$

退极化电场

极化强度  $\rightarrow$  极化电荷分布  $\rightarrow$  退极化电场

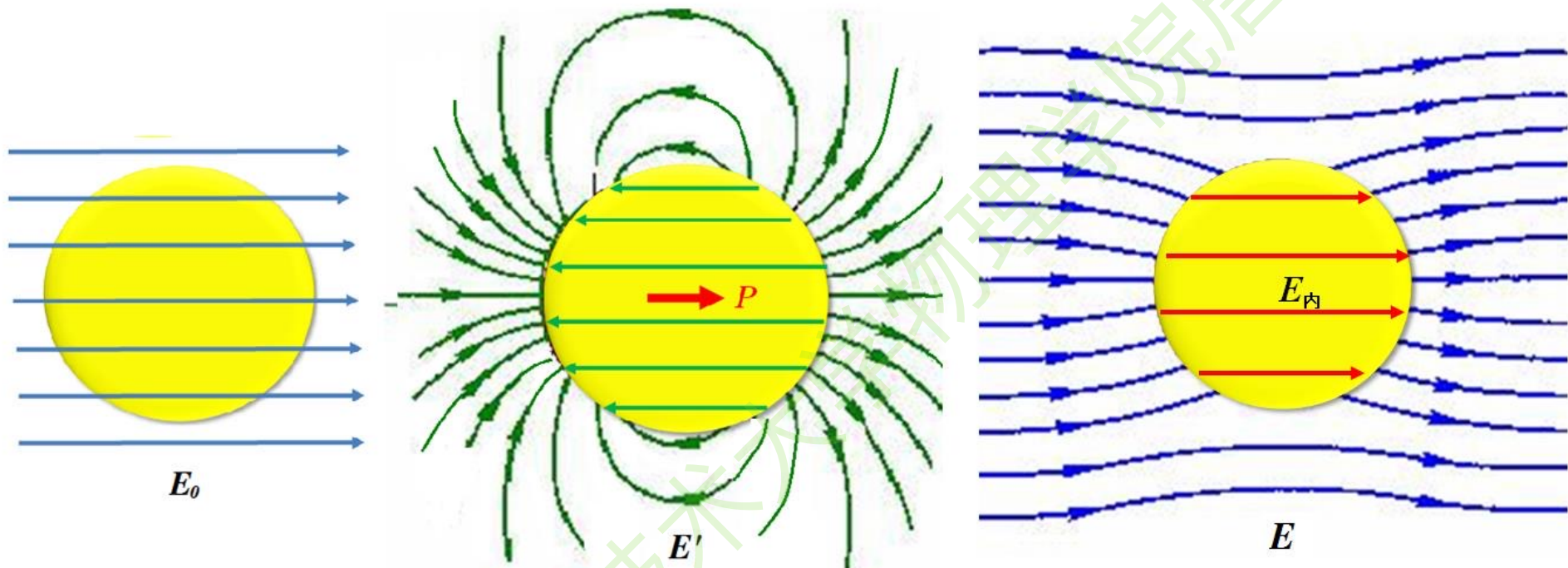


$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E}'(\vec{P}) \\ \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \end{cases} \quad \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'(\vec{P})$$

已知:  $\vec{E}_0$

未知:  $\vec{P}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{E}'$

### 3. 极化强度与电场的关系



外电场  $\vec{E}_0 \rightarrow$  介质极化  $\vec{P} \rightarrow$  极化电荷  $\rho' \rightarrow$  退极化电场  $\vec{E}' \rightarrow$  **总电场  $\vec{E}$**

## 极化强度矢量 $\vec{P}$ 是总电场 $\vec{E}$ 的函数

- 对于各向同性电介质:

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$$

方程组:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \\ \vec{E}' = \vec{E}'(\vec{P}) \\ \vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E} \end{cases}$$

解:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}(\vec{E}_0) \\ \vec{E}' = \vec{E}'(\vec{E}_0) \\ \vec{P} = \vec{P}(\vec{E}_0) \end{cases}$$



$$\sigma' = \pm P$$

$$E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{P}{\epsilon_0}$$

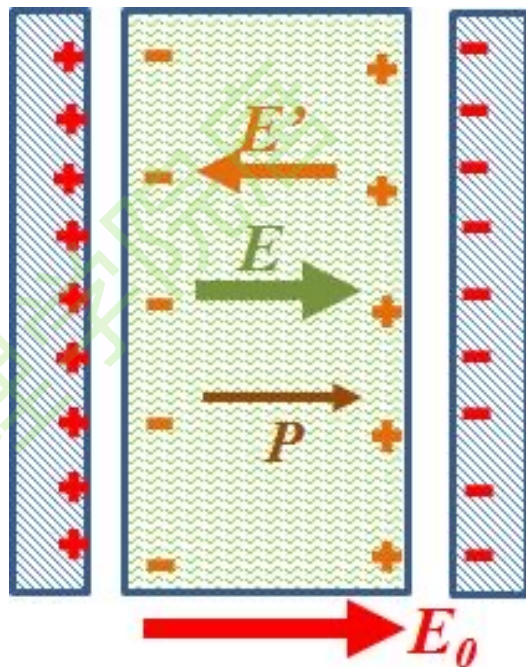
$$\vec{E}' = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0} = -\chi \vec{E}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = \vec{E}_0 - \chi \vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{1 + \chi} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r}$$

相对介电常数:  $\epsilon_r = 1 + \chi$

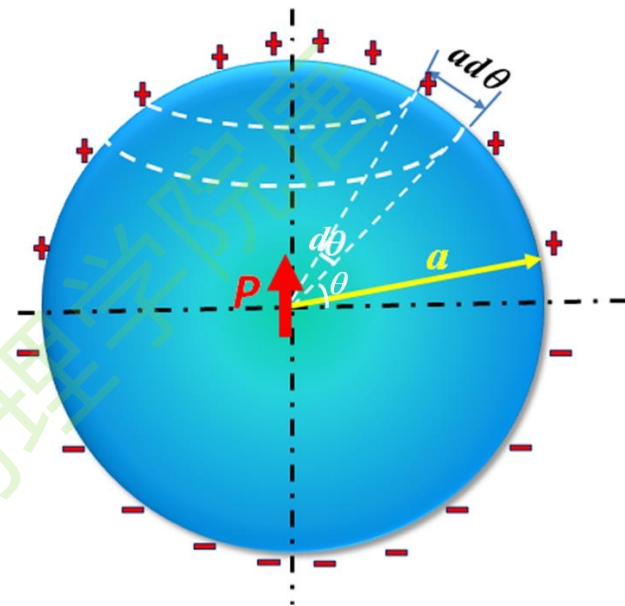
介电常数:  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$



已知  $E_0, \chi$ , 求  $E$

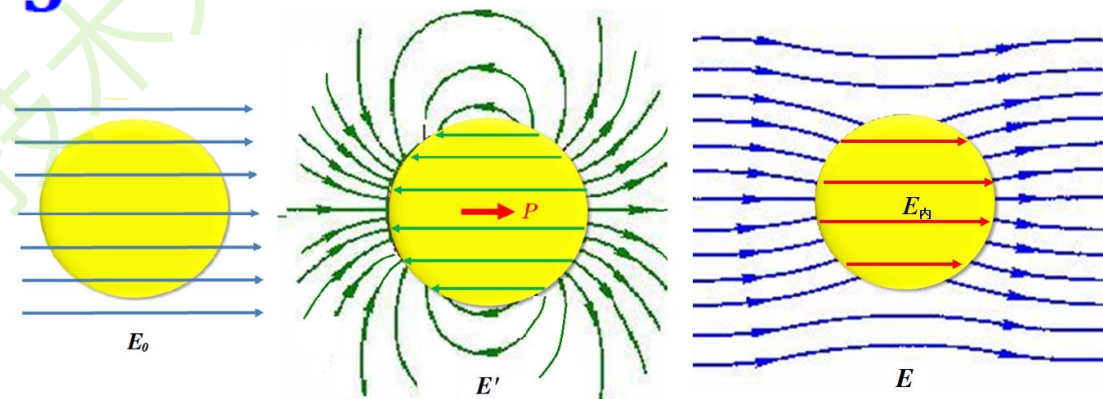
$$C = \epsilon_r C_0$$

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \\ \vec{E}' = \vec{E}'(\vec{P}) \\ \vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E} \end{cases}$$



$$\vec{E}' = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = -\frac{\chi}{3}\vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{1 + \chi/3}$$



$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r} = \frac{\vec{E}_0}{1 + \chi} \text{ 不是总成立!}$$

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \\ \vec{E}' = \vec{E}'(\vec{P}) \\ \vec{P} = \chi\epsilon_0\vec{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = \vec{E}(\vec{E}_0) \\ \vec{E}' = \vec{E}'(\vec{E}_0) \\ \vec{P} = \vec{P}(\vec{E}_0) \end{cases}$$

退极化电场与极化强度矢量的关系  $\vec{E}' = \vec{E}'(\vec{P})$   
取决于电介质几何尺寸与形状

总电场也取决于电介质几何尺寸与形状  
还取决于介质的介电常数。

## § 2.3.3 电介质的基本电学特性

### 1. 高斯定理

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oiint_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV = \iiint_V \rho_0 dV + \iiint_V \rho' dV$$

$$\iiint_V \rho' dV = - \oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

$$\oiint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV$$

引入辅助矢量

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

称为电位移矢量

Electric displacement vector

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$$

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = (1 + \chi) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

称为电介质的本构方程

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \vec{E}$$

# 高斯定理

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV$$

电场强度由**总电荷**决定

电位移矢量由**自由电荷**决定



$$U_{PQ} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电势

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \vec{E}$$

自由电荷

电位移矢量

电场强度

极化强度

总电荷

极化电荷

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

$$\sigma' = P_{1n} - P_{2n}$$

# 讨论

- $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$  是恒成立的
- $\vec{E} = \vec{E}_0 / \epsilon_r$  只在某些特定情况下成立（慎用）
- $\vec{D}$  与  $\vec{E}_0$  没有固定的对应关系
- $\vec{D}$  与  $\vec{E}_0$  都由自由电荷决定，但是：
  - $\vec{E}_0$  是由不加电介质时的自由电荷分布  $\rho_0^0$  决定
  - $\vec{D}$  是由加电介质后的自由电荷分布  $\rho_0$  决定
  - 这两个自由电荷分布并不一定一样，电介质可以改变自由电荷分布：
    - 自由电荷重新分配
    - 自由电荷有增减（极板与外界电源等有接触时）

# 作业

- 2. 15
- 2. 17
- 2. 20

中国科学技术大学物理学院唐