第2章 静电场中的物质与电场能量

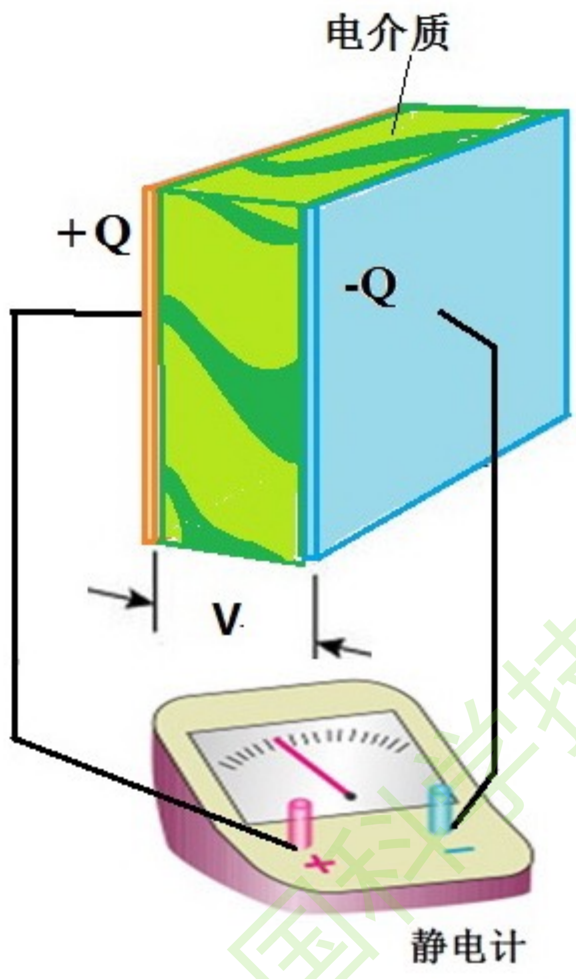
§2.1 静电场中的导体

§2.2 电容与电容器

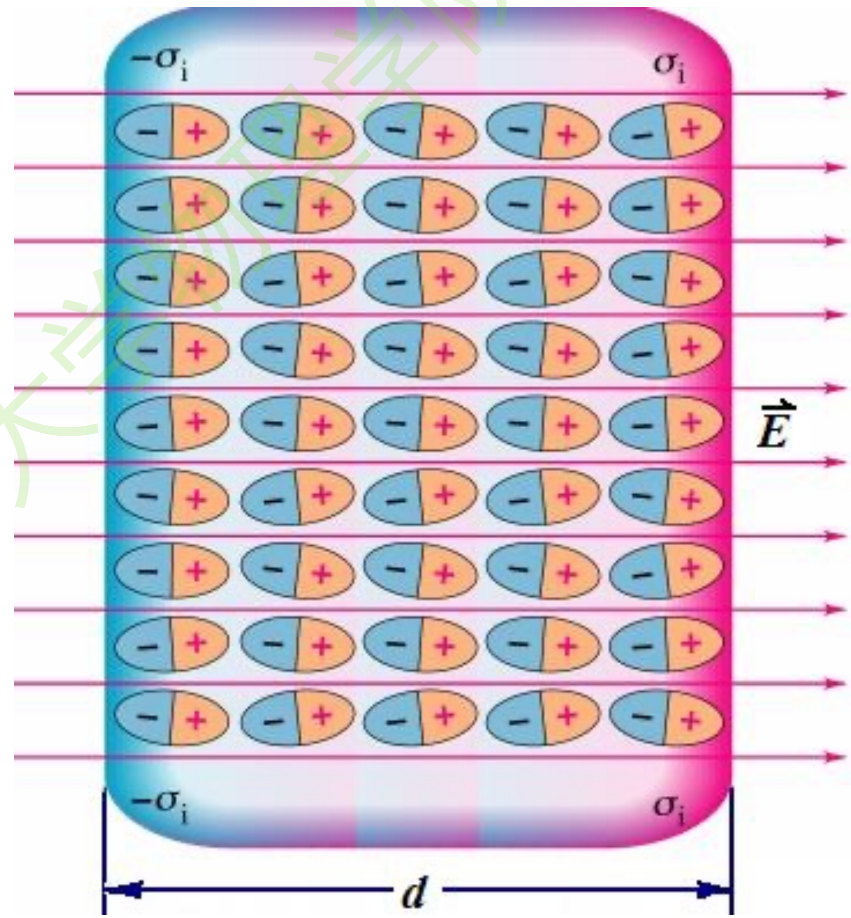
§2.3 静电场中的介质

§2.4 静电场的能量

§ 2.3 静电场中的介质

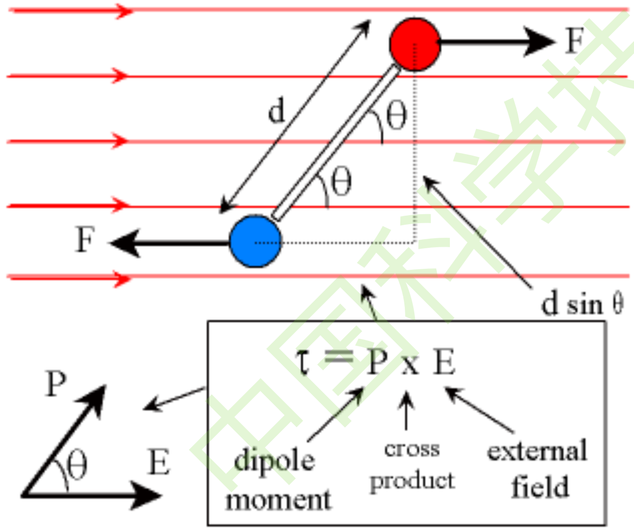


$$V < V_0$$

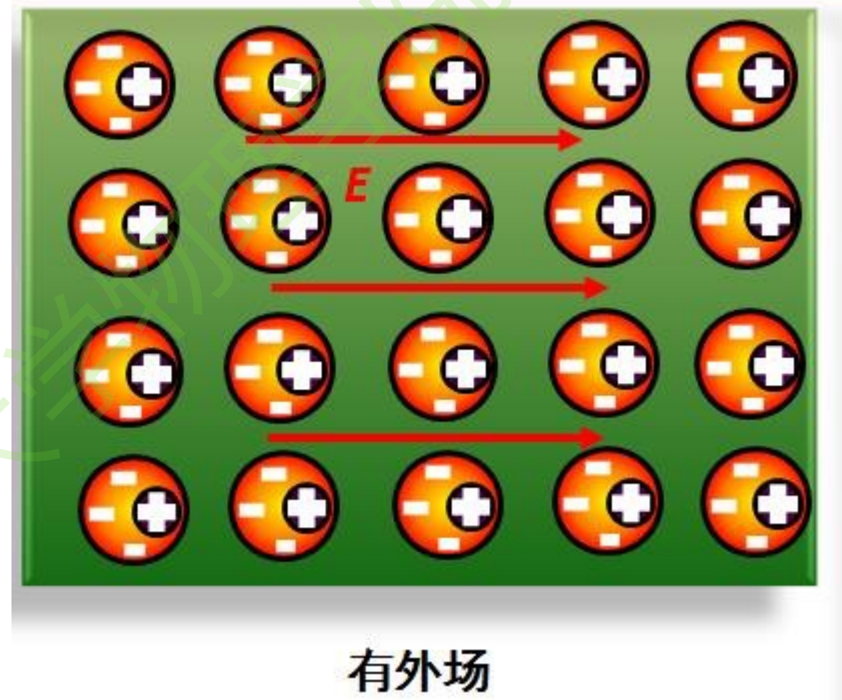


§ 2.3.2 电介质的极化

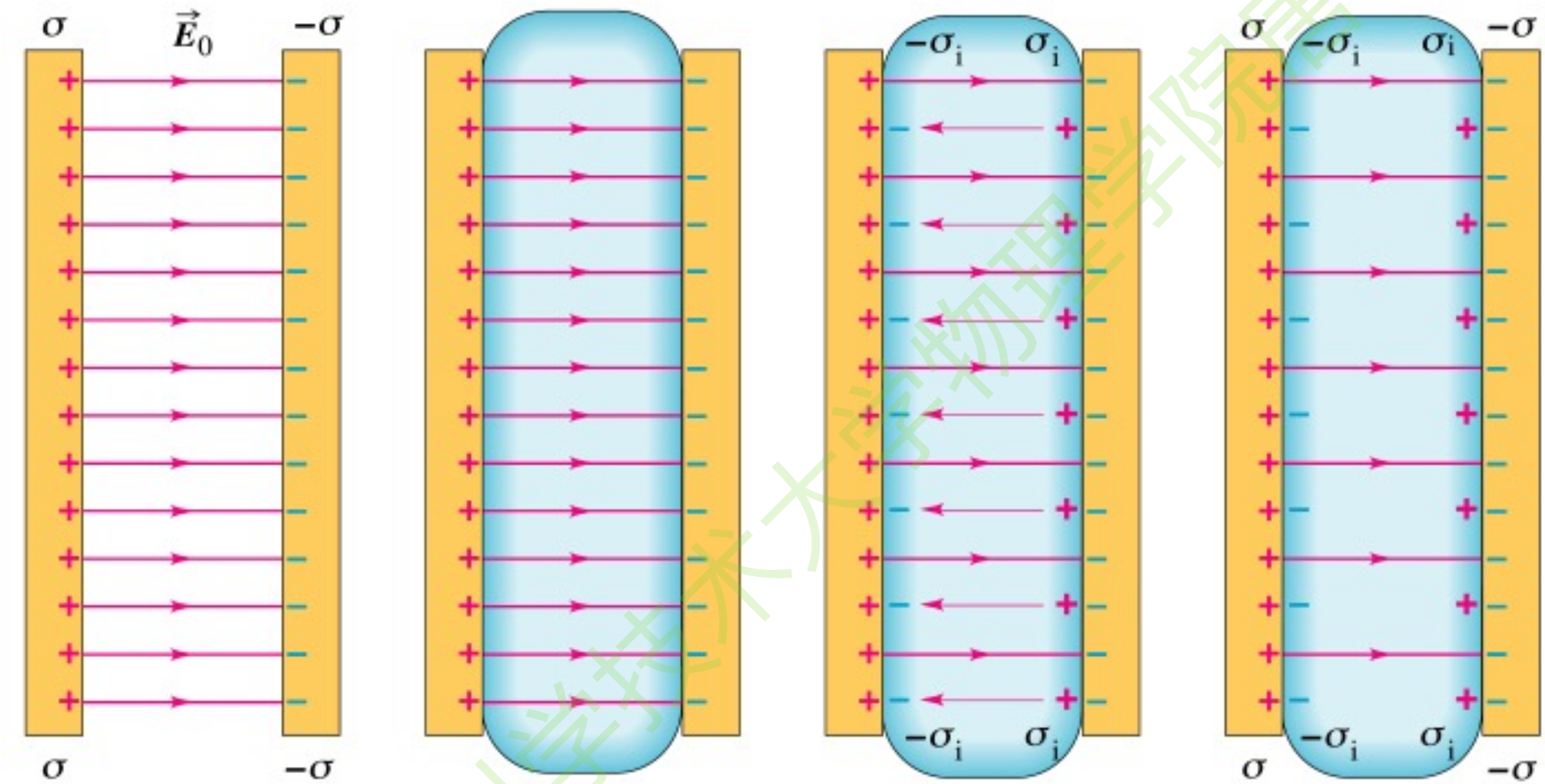
取向极化



位移极化



§ 2.3.2 电介质的极化 Dielectric polarization



在外电场下，电介质表面出现极化电荷，产生极化电场，部分抵消外电场。这一现象称为电介质的“极化”。

极化强度　Polarization Vector

如何定量描述定介质极化的强弱？

定义：极化强度为单位体积内分子电偶极矩的矢量和

$$\vec{P}=\frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}=n\langle\vec{p}\rangle$$

极化强度反映了电介质极化的大小和方向

如果在电介质中$\vec{P}$处处相同，则电介质为均匀极化

如果电介质内部某点领域的物理特性在所有方向上都相同，
及电介质特性与外加电场的方向无关，则为各向同性电介质

- 对于各向同性电介质:

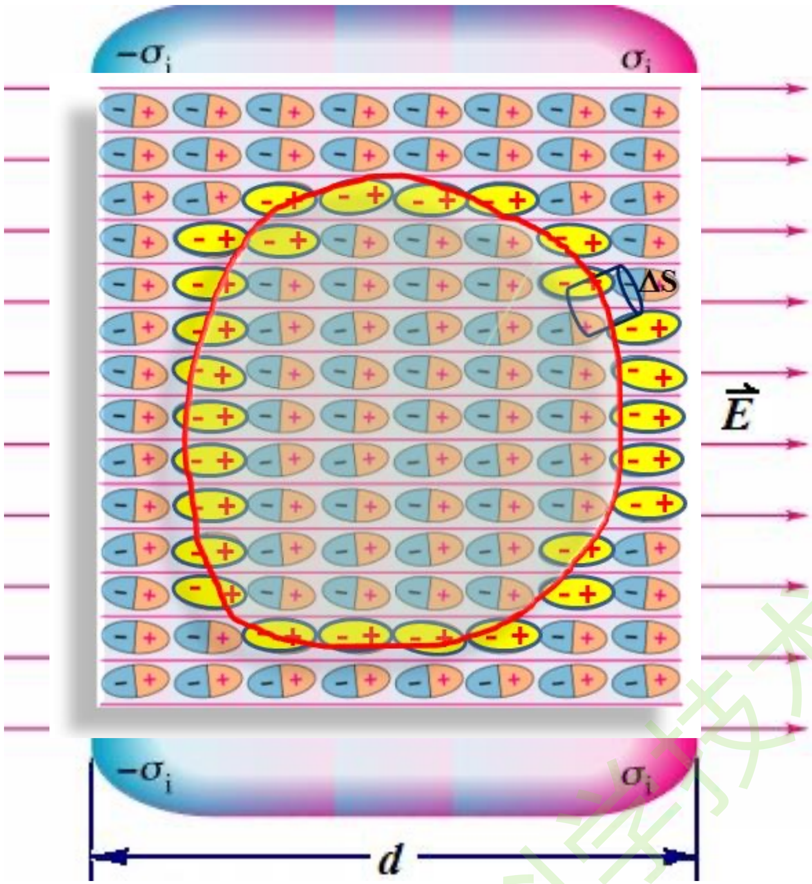
极化强度$\vec{P}$必然平行于产生他的外电场$\vec{E}$

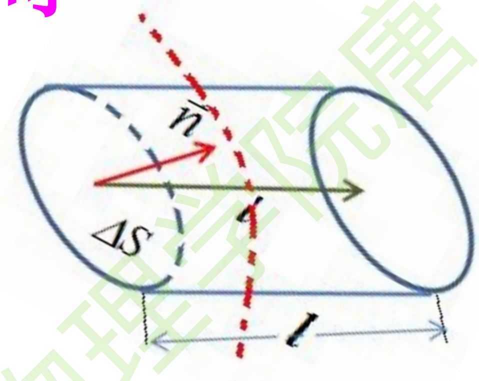
$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V} = n\langle\vec{p}\rangle = \chi\varepsilon_0\vec{E}$$

χ为材料的极化率，由电介质的性质决定　Electric susceptibility

χ决定了材料的相对介电常数ε_r

极化电荷





$\vec{n}$为面元ΔS的法向方向

圆柱侧面沿极化强度$\vec{P}$

圆柱侧面长度为电偶极子长度

$$l = \vec{p}/q$$

圆柱体以外的电偶极子对体积V的电荷贡献为零

圆柱体以内的每个电偶极子对体积V的电荷贡献为-q

圆柱体中净电荷：

$$dq' = n(-q)dV = -nqldS\cos\theta$$
$$= -npdS\cos\theta = -n\vec{p}\cdot d\vec{S} = -\vec{P}\cdot d\vec{S}$$

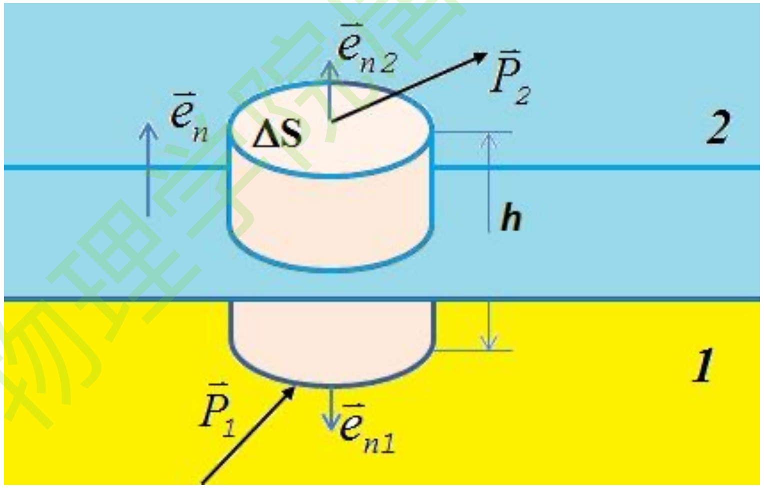
体积V中总电荷：

$$Q' = -\oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} = -\iiint_V (\nabla\cdot\vec{P})dV$$

$$Q' = \iiint_V \rho' dV \qquad \boxed{\rho' = -\nabla\cdot\vec{P}}$$

对于均匀介质，介质内部不存在极化电荷

极化电荷只存在介质交界面上



$$Q' = -\oiint \vec{P}\cdot d\vec{S}$$

$$= -\left(\vec{P}_1\cdot\Delta\vec{S}_1 + \vec{P}_2\cdot\Delta\vec{S}_2 + \delta\right)$$

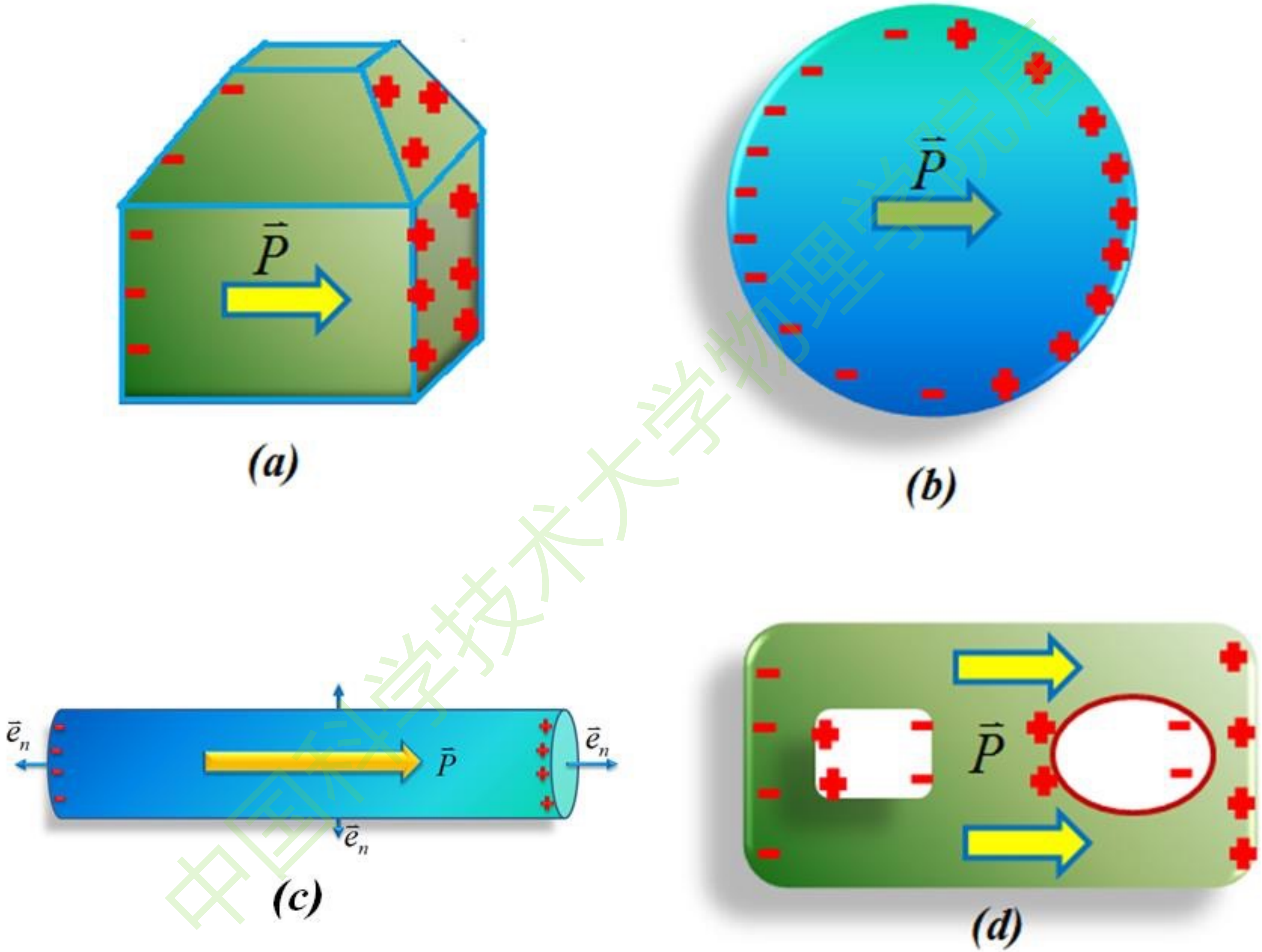
$$= -\left(-\vec{P}_1\cdot\vec{e}_n + \vec{P}_2\cdot\vec{e}_n\right)\Delta S + \delta$$

$$= -\left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right)\cdot\vec{e}_n\Delta S + \delta$$

$$\delta \xrightarrow{h\to 0} 0$$

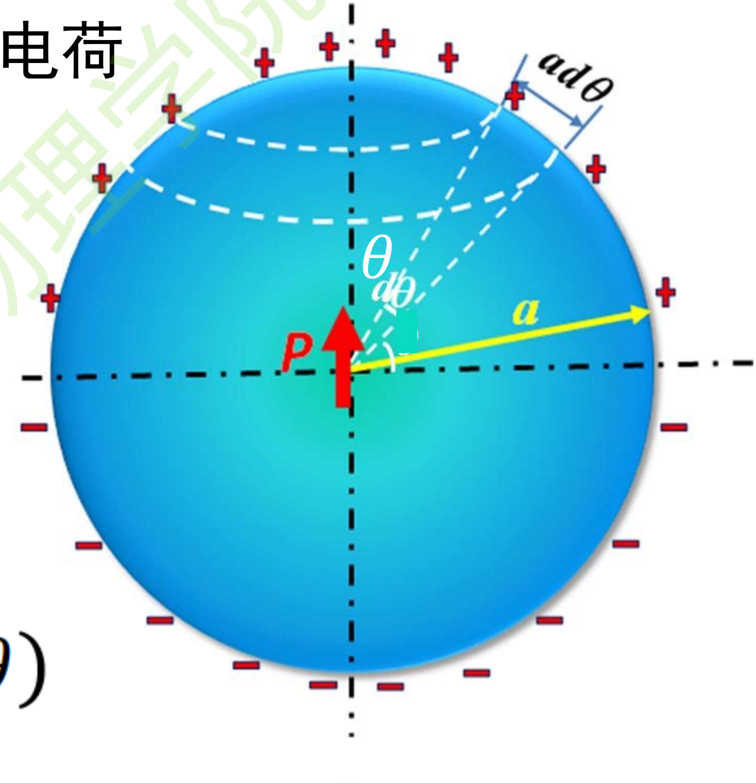
$$\boxed{\sigma' = -\left(\vec{P}_2 - \vec{P}_1\right)\cdot\vec{e}_n = P_{1n} - P_{2n}}$$

当电介质2为导体或真空时： $\boxed{\sigma' = P_{1n}}$


$\vec{P}$
(a)
$\vec{P}$
(b)
$\vec{e}_n$
$\vec{P}$
$\vec{e}_n$
$\vec{e}_n$
(c)
$\vec{P}$
(d)

【例2.3】一个半径为a均匀极化的介质球，其电极化强度为$\vec{P}$，该介质球置于空气中，球心处的电场强度是多少？

【解】球内没有电荷，只有表面有极化电荷



极化电荷密度：

$$\boldsymbol{\sigma' = P_{1n} = P\cos\theta}$$

球心处电场强度：

$$dE' = \frac{\sigma' a^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 a^2}(-\cos\theta)$$

$$E' = -\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\sin\theta\,(\cos\theta)^2 d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = -\frac{P}{3\varepsilon_0}$$

退极化电场

极化强度➔极化电荷分布➔退极化电场

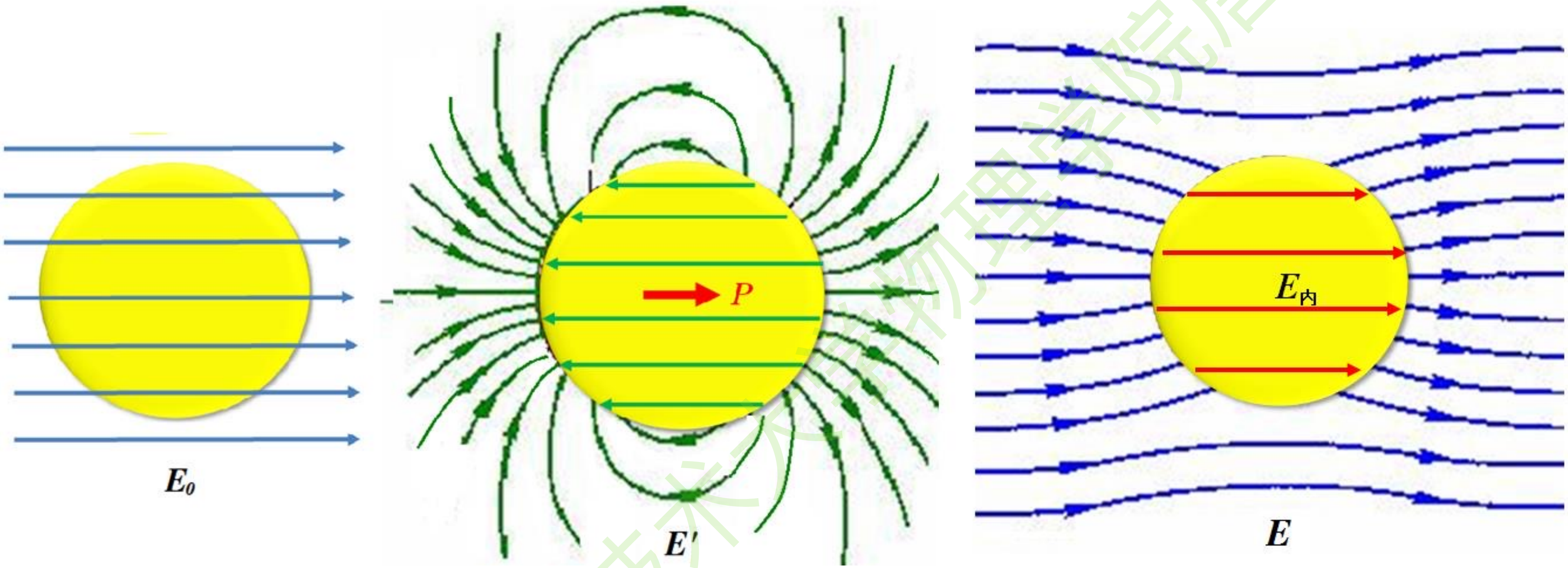
$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E}'(\vec{P}) \\ \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \end{cases}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'(\vec{P})$$

已知：$\vec{E}_0$

未知：$\vec{P}$，$\vec{E}$，$\vec{E}'$

3. 极化强度与电场的关系



外电场$\vec{E}_0$→ 介质极化$\vec{P}$ → 极化电荷ρ' → 退极化电场 $\vec{E}'$ → **总电场$\vec{E}$**

极化强度矢量*P*是总电场*E*的函数

- 对于各向同性电介质:

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$$

方程组:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \\ \vec{E}' = \vec{E}'(\vec{P}) \\ \vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = \vec{E}(\vec{E}_0) \\ \vec{E}' = \vec{E}'(\vec{E}_0) \\ \vec{P} = \vec{P}(\vec{E}_0) \end{cases}$$

解:

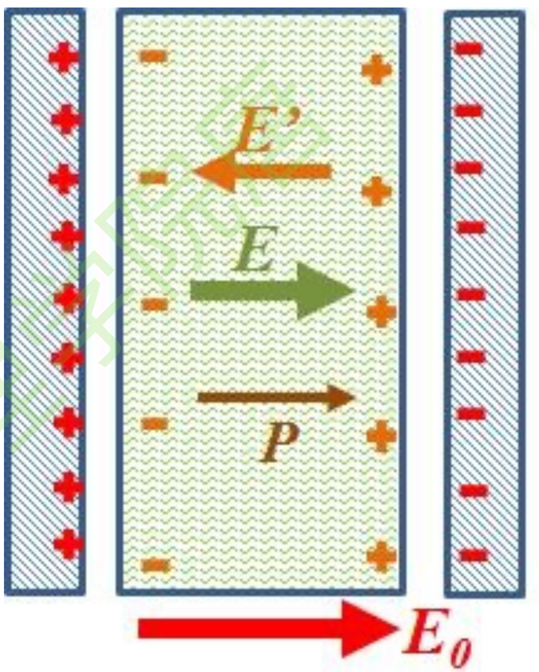
$$\sigma' = \pm P$$

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{P}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}' = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} = -\chi\vec{E}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = \vec{E}_0 - \chi\vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{1+\chi} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$$



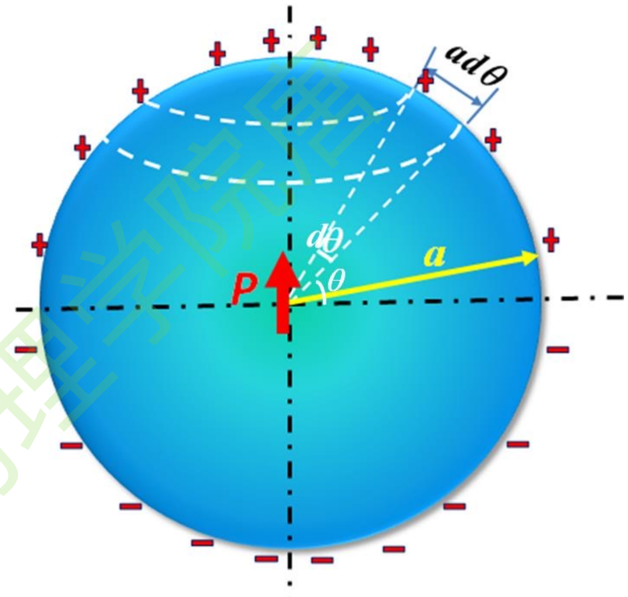
已知E_0, χ, 求E

$$C = \varepsilon_r C_0$$

相对介电常数： $\varepsilon_r = 1 + \chi$

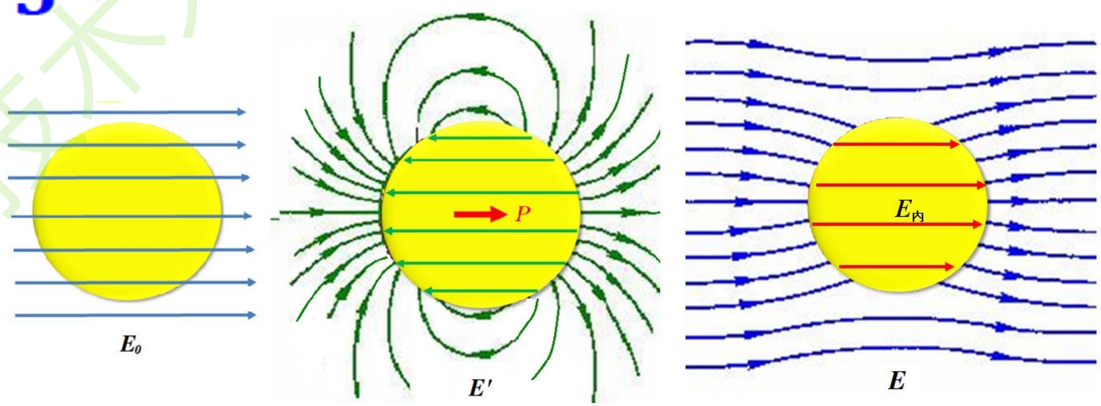
介电常数： $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$

$$
\begin{cases}
\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \\
\vec{E}' = \vec{E}'(\vec{P}) \\
\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}
\end{cases}
$$



$$\vec{E}' = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} = -\frac{\chi}{3}\vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{1+\chi/3}$$



$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r} = \frac{\vec{E}_0}{1+\chi}$$ 不是总成立！

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \\ \vec{E}' = \vec{E}'(\vec{P}) \\ \vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = \vec{E}(\vec{E}_0) \\ \vec{E}' = \vec{E}'(\vec{E}_0) \\ \vec{P} = \vec{P}(\vec{E}_0) \end{cases}$$

退极化电场与极化强度矢量的关系 $\vec{E}' = \vec{E}'(\vec{P})$

取决于电介质几何尺寸与形状

总电场也取决于电介质几何尺寸与形状

还取决于介质的介电常数。

§ 2.3.3 电介质的基本电学特性

1. 高斯定理

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV \qquad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV = \iiint_V \rho_0 dV + \iiint_V \rho' dV$$

$$\iiint_V \rho' dV = -\oiint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

$$\oiint_S \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV$$

引入辅助矢量

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

称为电位移矢量

Electric displacement vector

$$\boxed{\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{D} = \rho_0}$$

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$$

$$\vec{D} = (1+\chi)\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}$$

称为电介质的本构方程

$$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\vec{E}$$

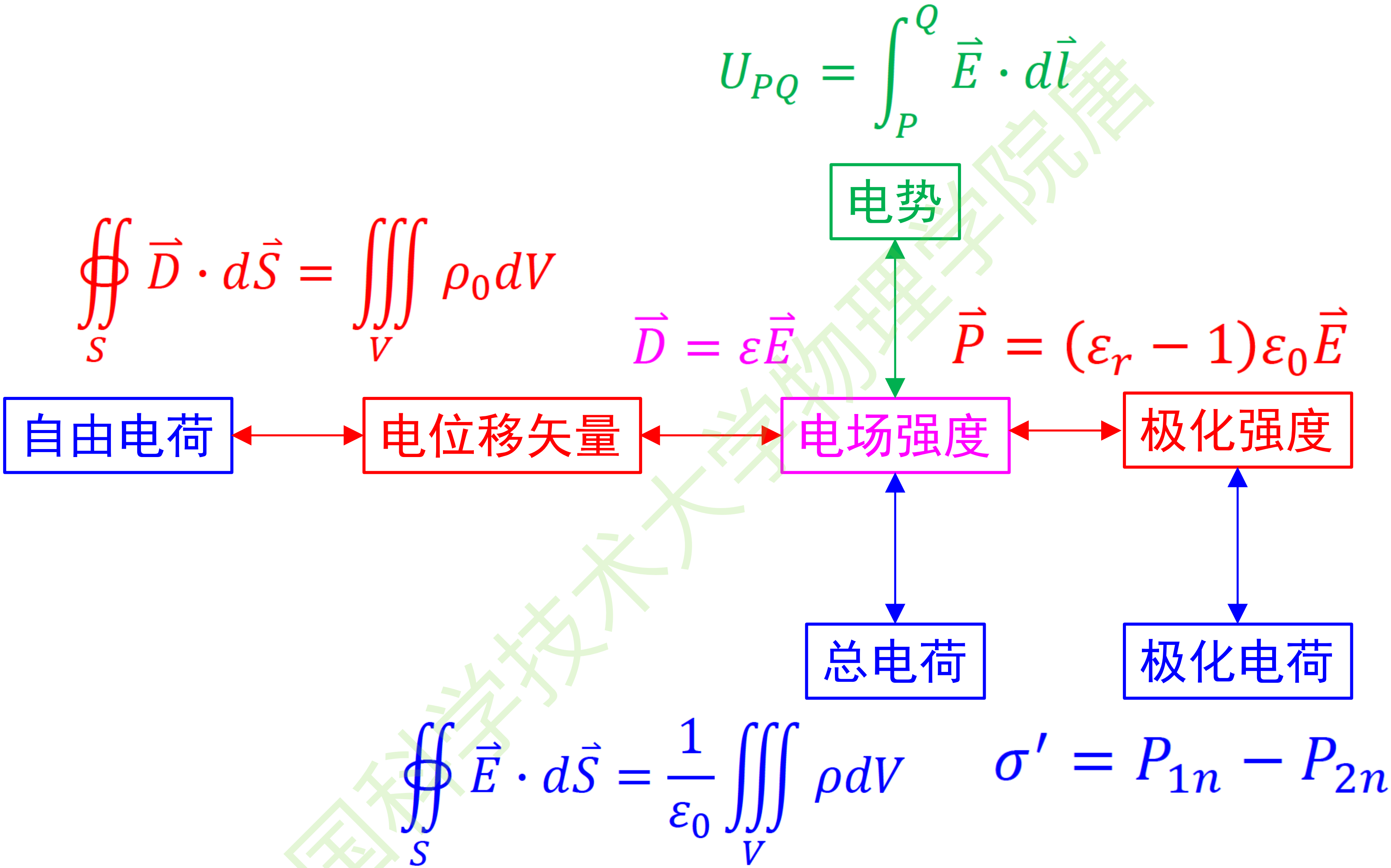
高斯定理

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho dV$$

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV$$

电场强度由**总电荷**决定

电位移矢量由**自由电荷**决定


$U_{PQ} = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$
电势
$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV$
$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$
$\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \vec{E}$
自由电荷
电位移矢量
电场强度
极化强度
总电荷
极化电荷
$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dV$
$\sigma' = P_{1n} - P_{2n}$

讨论

- $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}=\varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}$是恒成立的
- $\vec{E}=\vec{E}_0/\varepsilon_r$只在某些特定情况下成立（慎用）
- $\vec{D}$与$\vec{E}_0$没有固定的对应关系
- $\vec{D}$与$\vec{E}_0$都由自由电荷决定，但是：
  - $\vec{E}_0$是由不加电介质时的自由电荷分布ρ_0^0决定
  - $\vec{D}$是由加电介质后的自由电荷分布ρ_0决定
  - 这两个自由电荷分布并不一定一样，电介质可以改变自由电荷分布：
    - 自由电荷重新分配
    - 自由电荷有增减（极板与外界电源等有接触时）

作业

- 2.15
- 2.17
- 2.20