第2章 静电场中的物质与电场能量

§2.1 静电场中的导体

§2.2 电容与电容器

§2.3 静电场中的介质

§2.4 静电场的能量

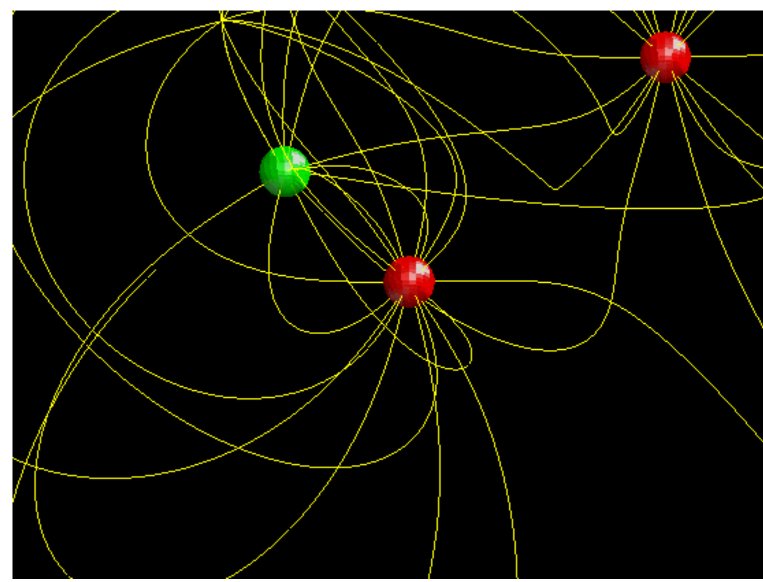
2. N个点电荷系统

将两个点电荷系统的相互作用能推广到N个点电荷系统

$$W_{互} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i U_i$$

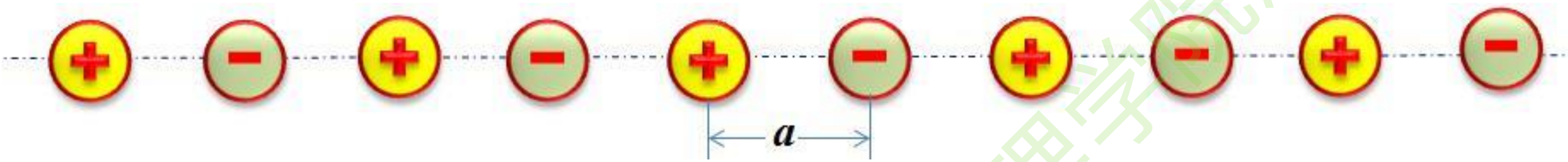
U_i为q_i以外的电荷在r_i处产生的电势

$$U_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} U_{ji} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$



$$W_{互} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

【例】正负离子交错排列成一维无限长阵列，计算其中一个离子与其他离子的相互作用能。



【解】在一个正离子处，由其他正离子产生的电势为：

$$U_+ = 2\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{4a}+\frac{1}{6a}+\cdots\right)\right]$$

在一个正离子处，由其他负离子产生的电势为：

$$U_- = 2\left[\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{3a}+\frac{1}{5a}+\cdots\right)\right]$$

$$U = U_+ + U_- = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0 a}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right) = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0 a}\ln 2$$

$$W_{+} = qU = \frac{-q^2}{2\pi\varepsilon_0 a}\ln 2$$

为何没有因子1/2?

同法可得：

$$W_{-} = qU = \frac{-q^2}{2\pi\varepsilon_0 a}\ln 2$$

将电荷从无限远移动过来，电场做正功，外力做负功

§ 2.4.2 带电体的静电能

1. 单个带电体

$$W_{互} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i U_i \quad \Rightarrow \quad W_e = \frac{1}{2}\iiint_V \rho(\vec{r})U_1(\vec{r})dV$$

U_i为q_i以外的电荷在r_i处产生的电势

$U_1(\vec{r})$为电荷元$\rho(\vec{r})dV$以外的电荷在$\vec{r}$处产生的电势

$$U_1(\vec{r}) = U(\vec{r}) - U'(\vec{r})$$

$U'(\vec{r})$为$\rho(\vec{r})dV$在自身所在处产生的电势

【例】求电荷密度为ρ，体积为dV的导体球（电荷元）的电势U'。

$$U' = \frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 R} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$$

$$U' \xrightarrow{R \to 0} 0$$

对电荷元： $U_1(\vec{r}) = U(\vec{r})$

对点电荷： $\rho dV = Q = 常数$

$$U' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \xrightarrow{R \to 0} \infty$$

原因为： $\rho\frac{4\pi R^3}{3} = Q \quad \Rightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} \xrightarrow{R \to 0} \infty$

对体电荷：

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \rho(\vec{r})U_1(\vec{r})dV = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \rho(\vec{r})U(\vec{r})dV$$

类似地，对面电荷：

$$W_e = \frac{1}{2}\iint_S \sigma(\vec{r})U(\vec{r})dS$$

对线电荷：

$$\cancel{W_e = \frac{1}{2}\int\limits_L \lambda(\vec{r})U(\vec{r})dl}$$

类似于点电荷，电势无限大。

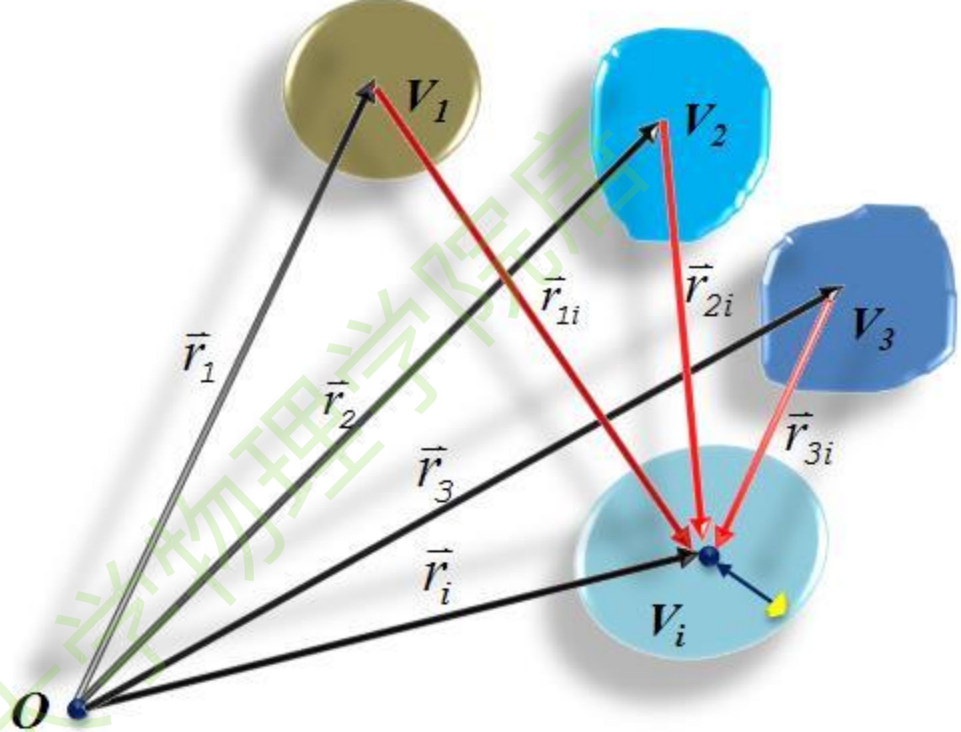
2. 多个带电体

将单个带电体推广到

多个带电体

$$W_e=\frac{1}{2}\iiint\limits_V \rho(\vec{r})U(\vec{r})dV$$

$$\Rightarrow \quad W_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint\limits_{V_i} \rho(\vec{r})U(\vec{r})dV$$



带电体上的总电势可以分为两部分：

$$U(\vec{r}) = U_i(\vec{r}) + U^{(i)}(\vec{r})$$

$U_i(\vec{r})$ 为其他带电体在$\vec{r}$处产生的电势

$U^{(i)}(\vec{r})$ 为第i个带电体在$\vec{r}$（其自身）处产生的电势

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint\limits_{V_i} \rho(\vec{r})U(\vec{r})dV = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint\limits_{V_i} \rho(\vec{r})\left[U_i(\vec{r}) + U^{(i)}(\vec{r})\right]dV$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint\limits_{V_i} \rho(\vec{r})U_i(\vec{r})dV + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint\limits_{V_i} \rho(\vec{r})U^{(i)}(\vec{r})dV$$

$$= W_{互} + W_{自}$$

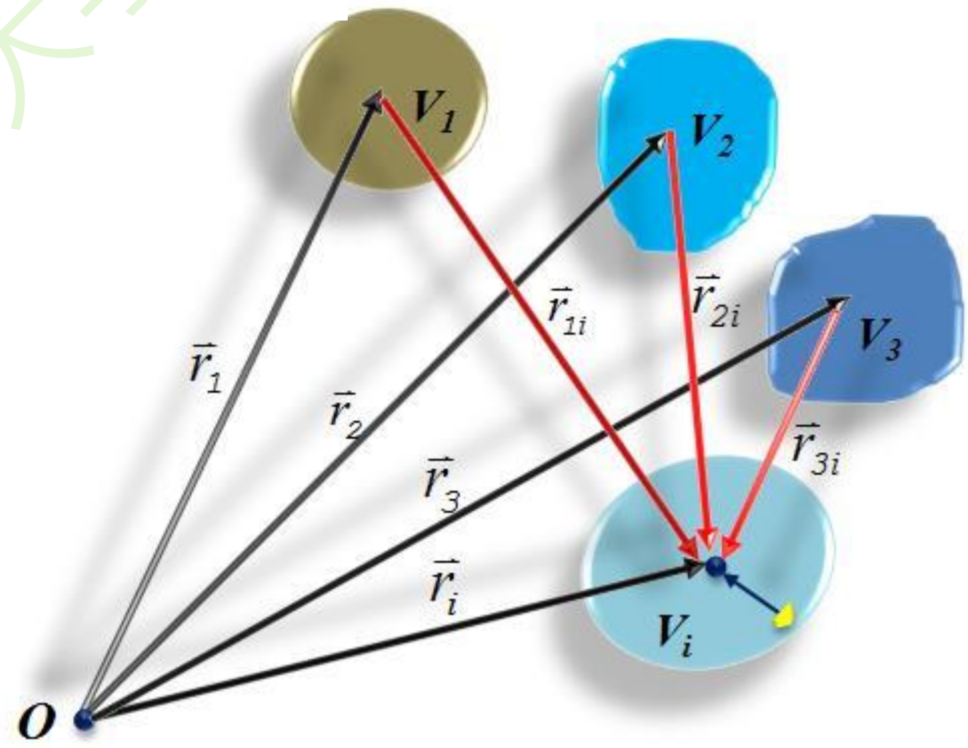
多个带电体的静电能为

每个带电体的自能 + 带电体之间的相互作用能

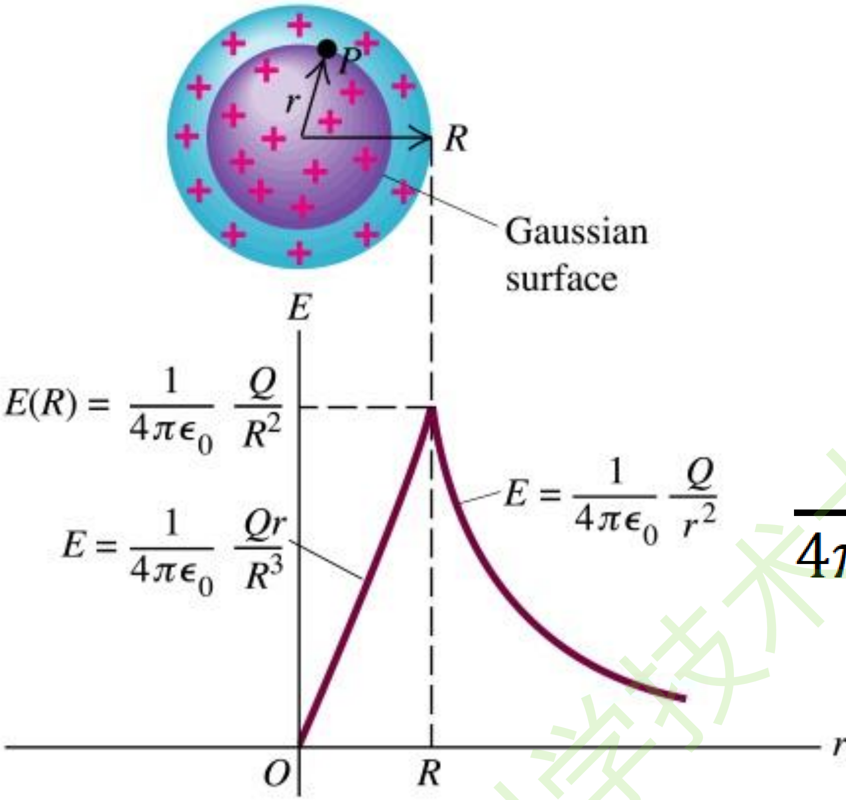
计算带电体的自能时，不能将带电体当做点电荷

计算带电体的互能时，当带电体相距很远时，可将带电体当做点电荷

$$W_{互} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}\rho(\vec{r})U_i(\vec{r})dV = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_iU_i$$



【例】计算带电量为Q，半径为R的均匀带电球体的自能。



球面的电势为：$\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

球内r处的电势为：

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{Q\dfrac{R^2-r^2}{2}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}=\frac{Q(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

均匀带电球的自能为：

$$W_{自}=\frac{1}{2}\int_0^R \rho\cdot\frac{Q(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\cdot 4\pi r^2 dr=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}=\frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

点电荷自能无限大

【例】计算带电量为Q，半径为R的导体球的自能。

【解】导体球为等势体，其势为： $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

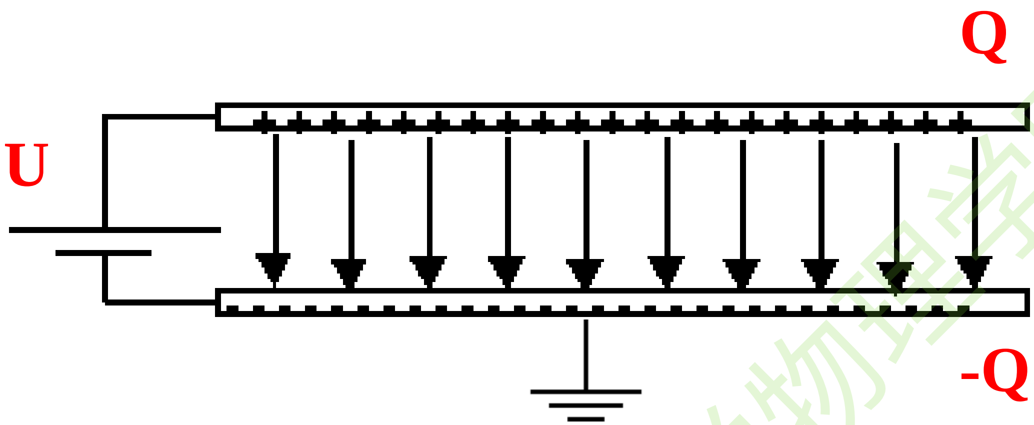
其自能为：

$$W_{\text{自}} = \frac{1}{2}\iiint_V \rho(\vec{r})U\,dV = \frac{1}{2}U\iiint_V \rho(\vec{r})\,dV = \frac{1}{2}QU$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} < \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

导体的电荷分布在表面，自能最低

§ 2.4.3 电容器的储能



上极板电荷为Q，电势为U

下极板电荷为-Q，电势为0

极板之间电荷为0，电势>0

电容器的静电能为：

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}\rho(\vec{r})U(\vec{r})dV = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

§ 2.4.4 电场的能量

电容器的储存的能量为：

$$W_e = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

能量储存在电场中，而不是电荷上。

用描述电场的物理量来表征。

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} \qquad U = Ed$$

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 V = \frac{1}{2}(\vec{D}\cdot\vec{E})V$$

电场的能量密度

电场的能量密度：单位体积电场的能量

$$\omega_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2}\left(\vec{D} \cdot \vec{E}\right)$$

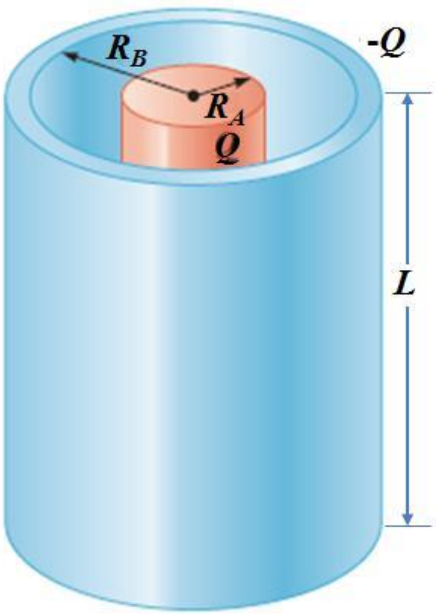
尽管此公式由充满各向同性均匀介质的平行板电容器推导而来，但是普遍适用

对普遍情况，电场的能量可用能量密度计算得到：

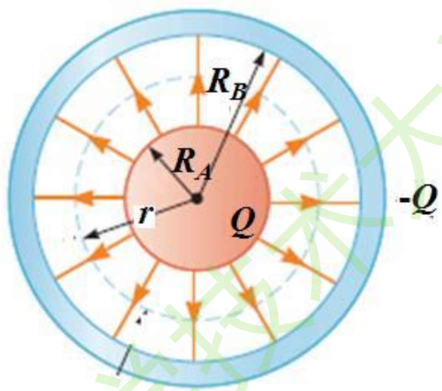
$$W_e = \iiint_V \omega_e dV = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV$$

【例】同轴电缆由半径为R_A的圆柱体和一个半径为R_B的同轴导体圆筒组成，其间充满介电常数为ε的均匀介质。圆柱带电为Q，圆筒带电为-Q，长度均为L。略去边缘效应。求：

（1）电场的能量密度；（2）电场总能量W。(3)证明$W=Q^2/(2C)$



(a)



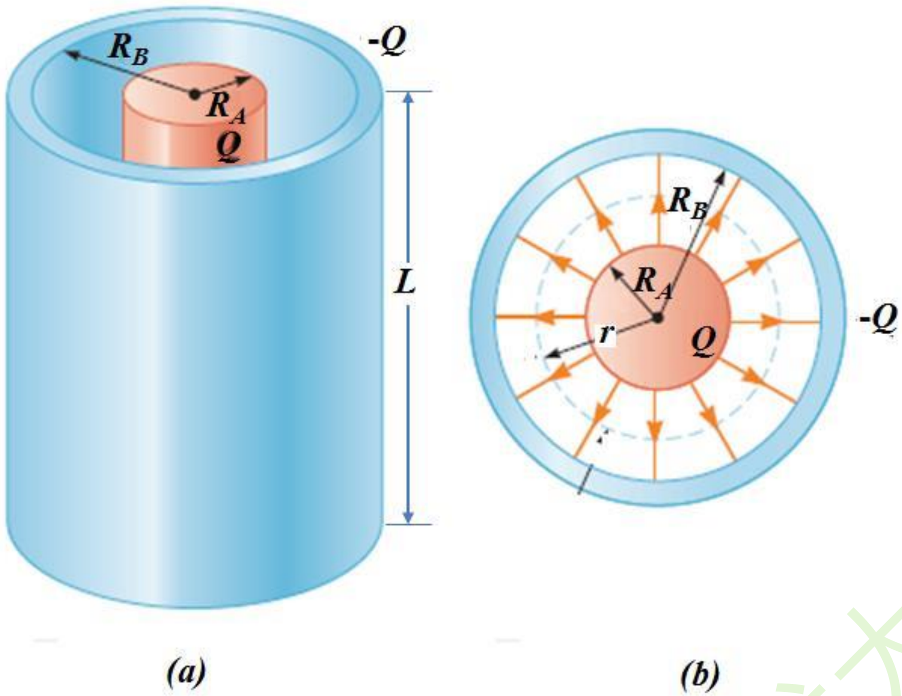
【解】(1) 由高斯定理得

$$E\cdot 2\pi rL = Q/\varepsilon_0$$

$$E = \frac{Q}{2\pi rL\varepsilon_0}$$

$$D = \varepsilon E$$

$$\omega_e = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{\varepsilon Q^2}{8\pi^2 r^2 L^2 \varepsilon_0^2}$$



【解】(1) 由高斯定理得

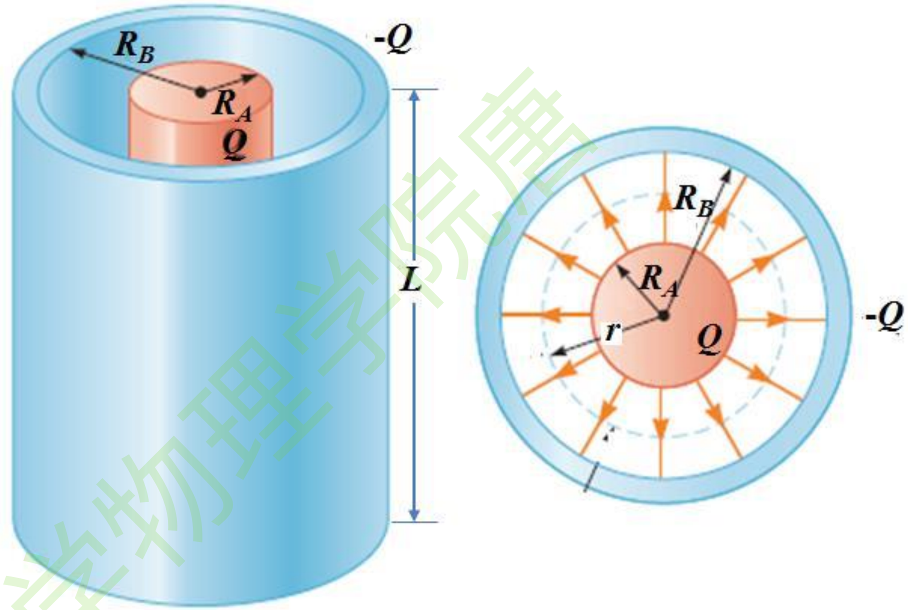
$$D \cdot 2\pi r L = Q$$

$$D = \frac{Q}{2\pi r L}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{2\pi r L \varepsilon}$$

$$\omega_e = \frac{1}{2} D E = \frac{D^2}{2\varepsilon} = \frac{Q^2}{8\pi^2 r^2 L^2 \varepsilon}$$

$$\omega_e = \frac{1}{2}DE = \frac{D^2}{2\varepsilon} = \frac{Q^2}{8\pi^2 r^2 L^2 \varepsilon}$$



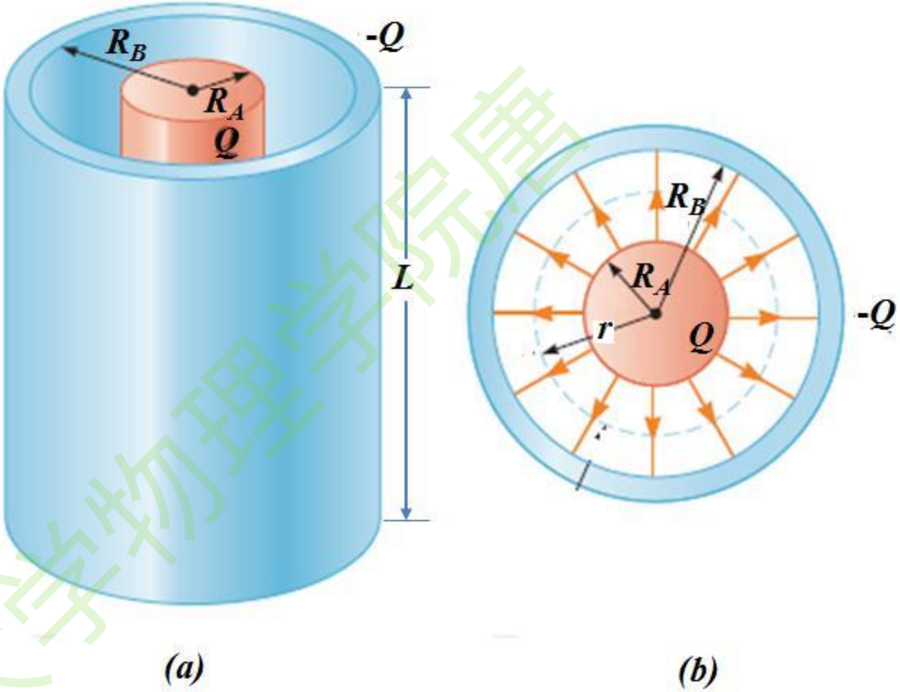
(2) 总能量为：

$$W = \int_{R_A}^{R_B} \omega_e \cdot 2\pi r L dr = \int_{R_A}^{R_B} \frac{Q^2}{8\pi^2 r^2 L^2 \varepsilon} \cdot 2\pi r L dr$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi L \varepsilon} \ln \frac{R_B}{R_A}$$

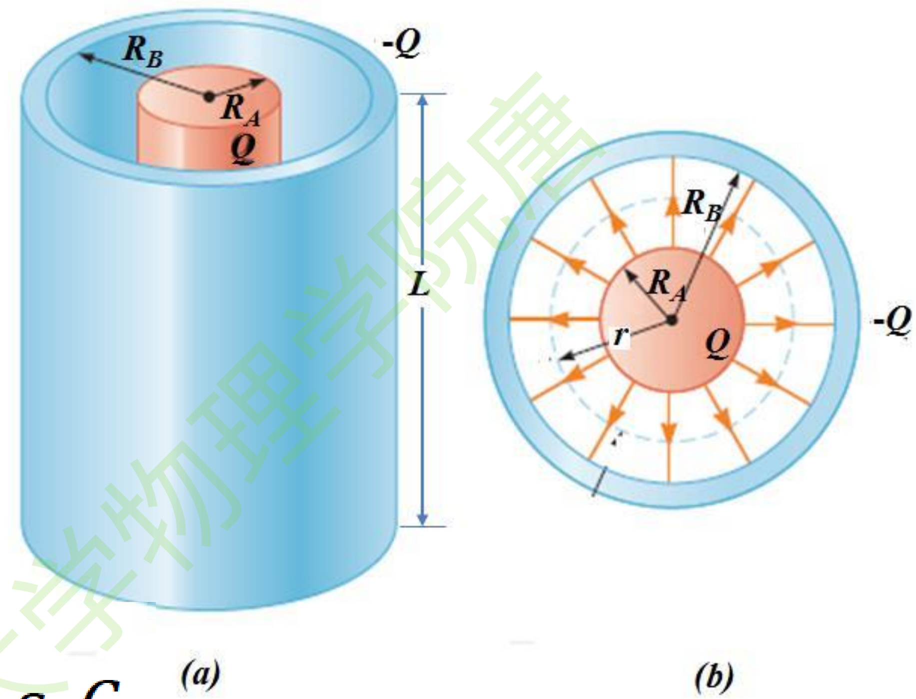
(3) 电场强度为：

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{2\pi r L \varepsilon}$$



电势差为：

$$\Delta U = \int_{R_A}^{R_B} E dr = \int_{R_A}^{R_B} \frac{Q}{2\pi r L \varepsilon} dr = \frac{Q}{2\pi L \varepsilon} \ln \frac{R_B}{R_A}$$



$$C=\frac{Q}{\Delta U}=\frac{2\pi L\varepsilon}{\ln\frac{R_B}{R_A}}=\frac{2\pi L\varepsilon_0}{\ln\frac{R_B}{R_A}}\varepsilon_r=\varepsilon_r C_0$$

$$W=\frac{Q^2}{4\pi L\varepsilon}\ln\frac{R_B}{R_A}=\frac{Q^2}{2C}$$ 证毕。

虽然电场能量密度表达式是从真空中平行板电容器导出的，

但是对充有介质的圆柱形电容器也成立。

能量的概念

静电能、相互作用能、自能、电势能

静电能是整个带电系统的能量。

包含所有带电体的自能和相互作用能。

对于点电荷系统，不存在自能的概念，静电能只能是相互作用能。

电势能是一个带电体在外电场中的能量。反映的是外电场对该带电体的作用能，不涉及外电场本身的能量。

练习

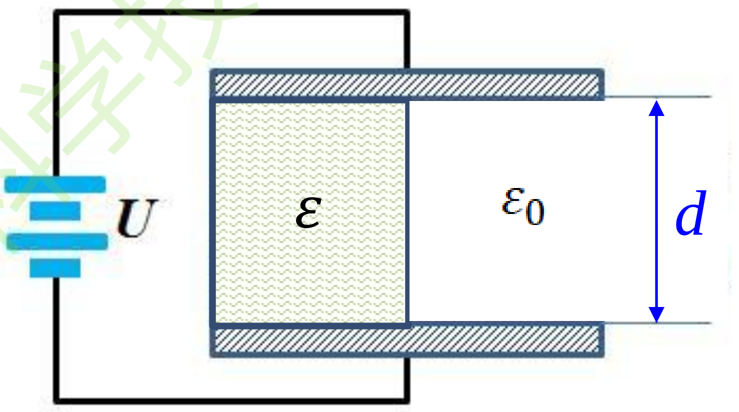
平行板电容器面积为S，厚度为d。在其左半区中放入介电常数为ε的电介质。求：

（1）左半区和右半区，哪边的电场强度大；

（2）电容器的电容是多少？

（3）两半区中，电场的能量密度各为多少？

（4）电容器的总储能是多少？



作业

- 2. 37
- 2. 38