第4章 磁力与磁场

§4.1 磁现象与磁力

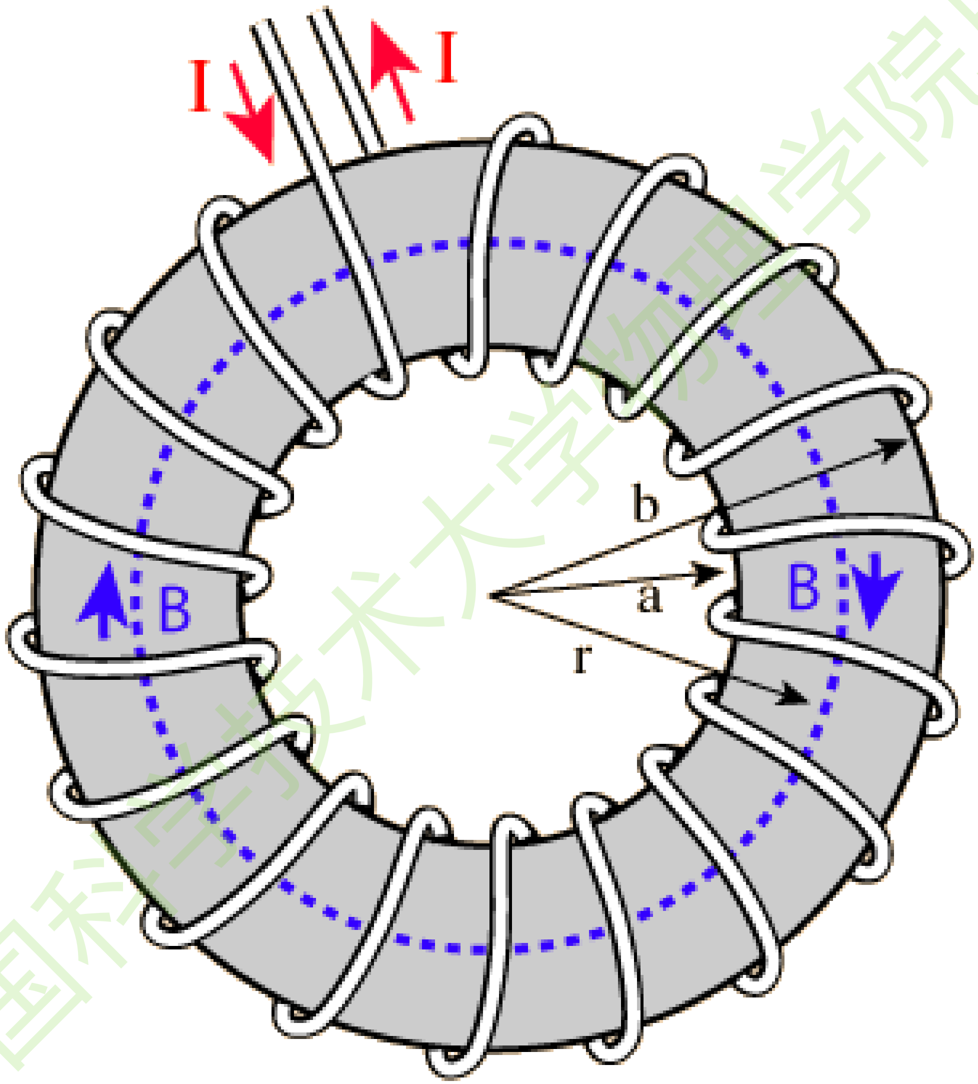
§4.2 电流的磁场

§4.3 静磁场的基本定理

§4.4 带电粒子在磁场中的运动

§4.5 霍尔效应

§ 4.3 静磁场的基本定理

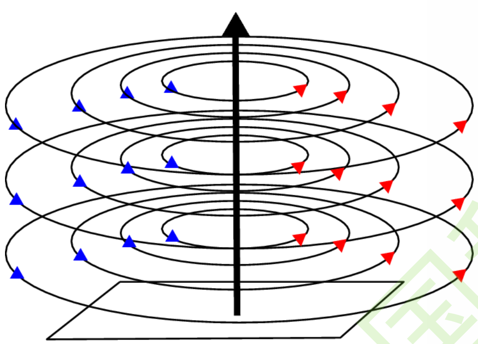


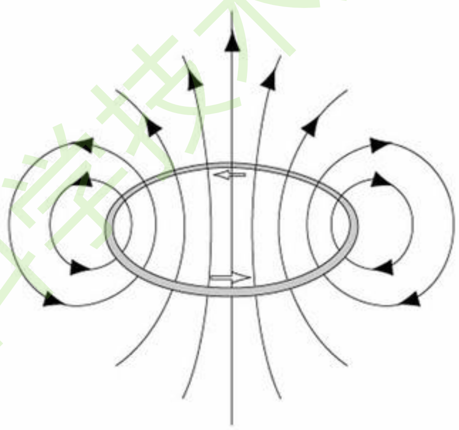
§ 4.3.2 磁场高斯定理

高斯定理： 通过任意**闭合**曲面的磁通量等于零

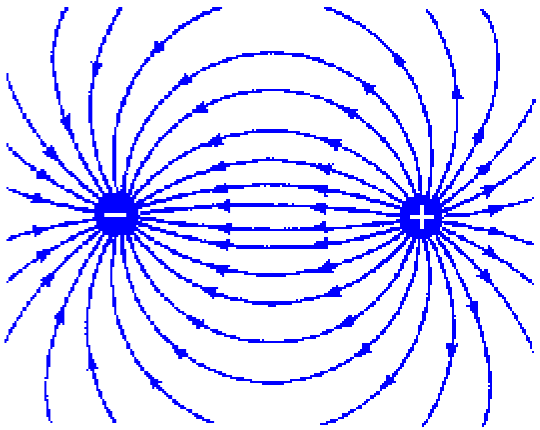
$$\boxed{\Phi = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0}$$

物理意义： 反映了磁场的"无源性"，即孤立磁荷不存在。





磁场线没有源头

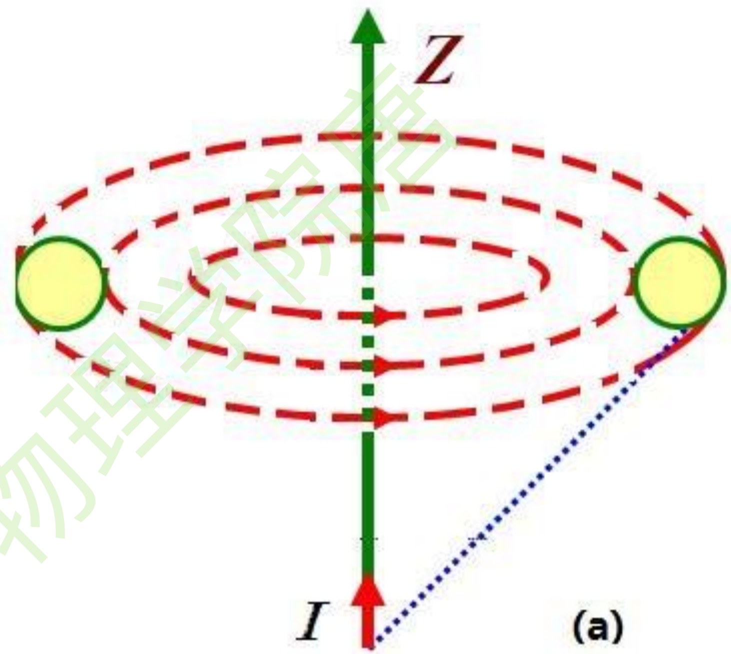


电场线有源头

证明：

电流元产生的磁场

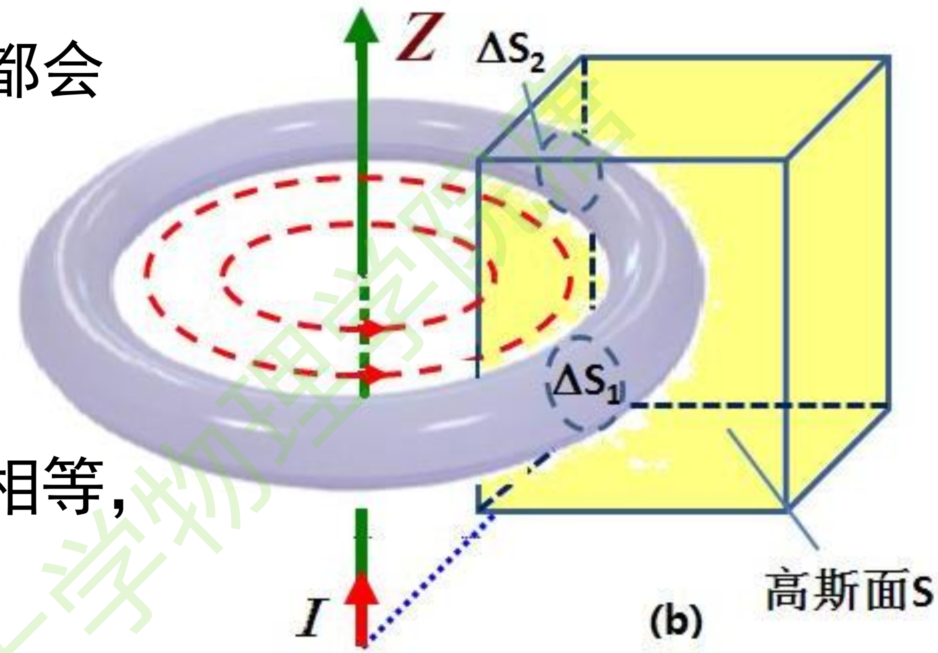
$$\boxed{d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}\vec{e}_\varphi}$$



在以z为轴的圆上，磁感应强度大小相等，方向与圆相切。

磁场线构成一个个呼啦圈（救生圈）

呼啦圈在任意一个封闭曲面上都会切出两个面元。



通过这两个面元的磁通量大小相等，方向相反。

反过来，一个封闭曲面被任意一个呼啦圈切割产生的面元，磁通量之和恒为零。

任意一个电流元在任意一个封闭曲面产生的磁通量为零。

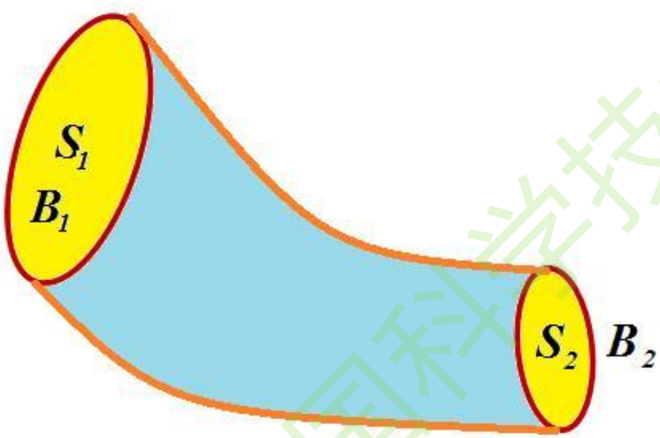
根据叠加原理，任意电流在任意封闭曲面产生的磁通量为零。

积分形式　　　　　　　　　微分形式

$$\Phi = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

对于任意磁场，磁场强度往往不均匀，磁感应线管截面也不均匀。



$$B_1 S_1 = B_2 S_2$$

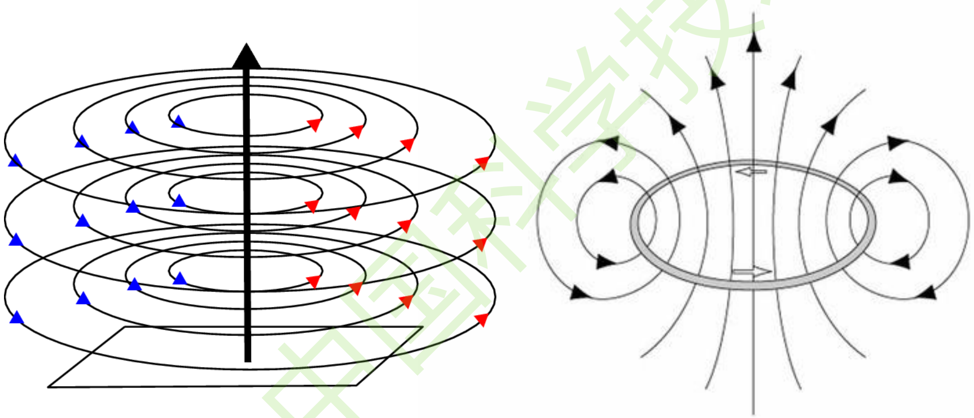
$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{S_2}{S_1}$$

§ 4.3.3 安培环路定理

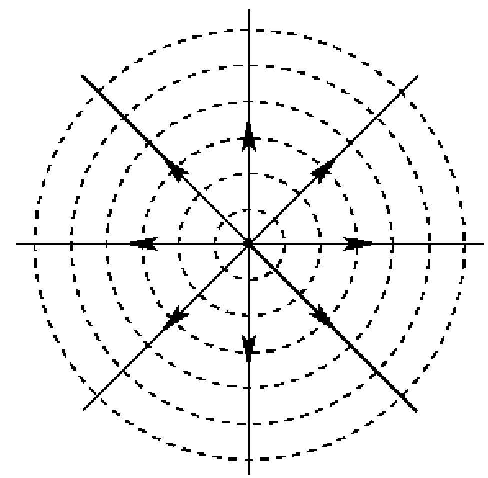
安培环路定理： 沿任意**闭合**曲线，磁感应强度的环量等于穿过该闭合曲线的电流强度的代数和的μ_0倍。

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L_{in}} I_i$$

物理意义： 反映了磁场的"**有旋性**"。



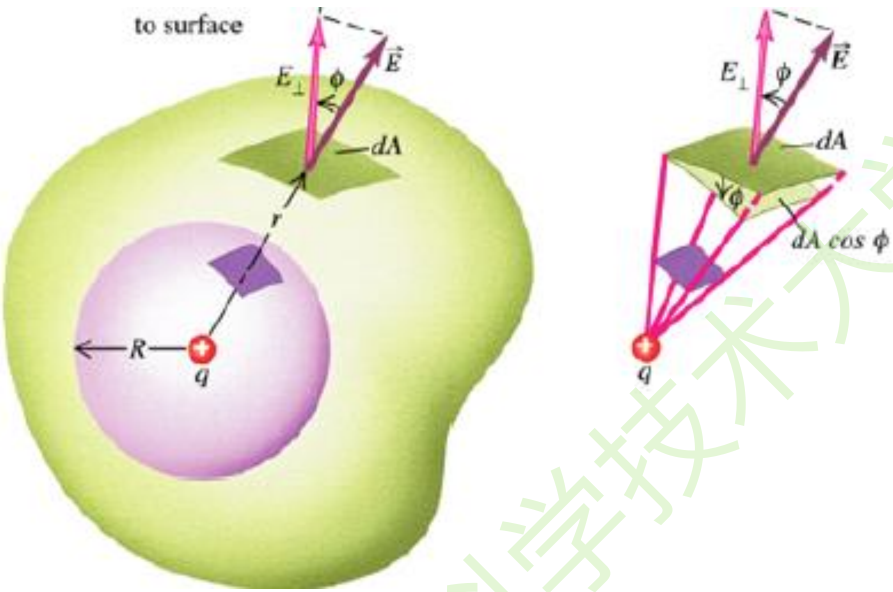
磁场有旋



电场无旋

立体角

对任意曲面，当参考点在曲面内时

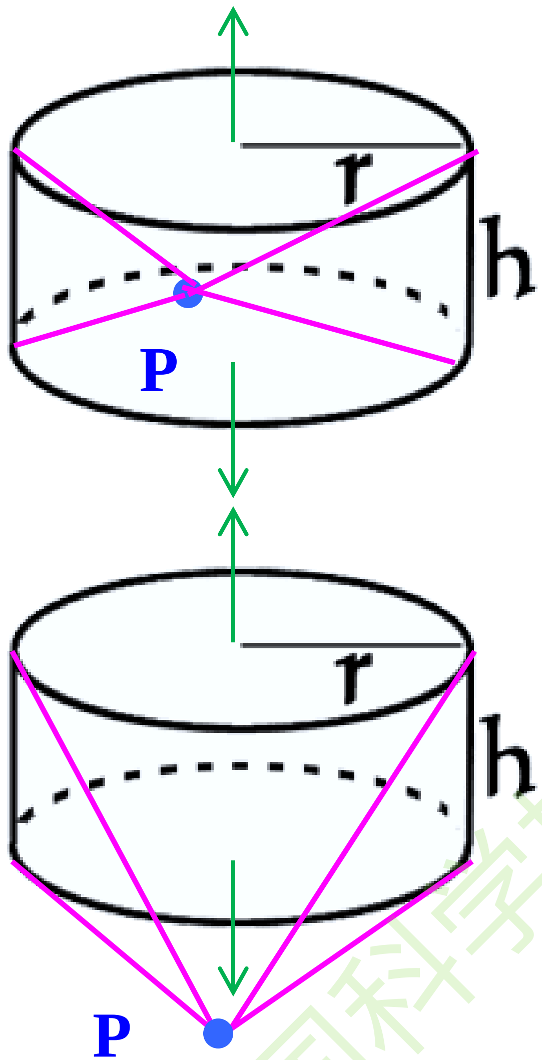


$$\Omega = \oiint_S d\Omega = 4\pi$$

当参考点在曲面外时

$$\Omega = \oiint_S d\Omega = 0$$

当一个面与一个点非常近时，立体角是多少？



当P点从反面接近曲面时，

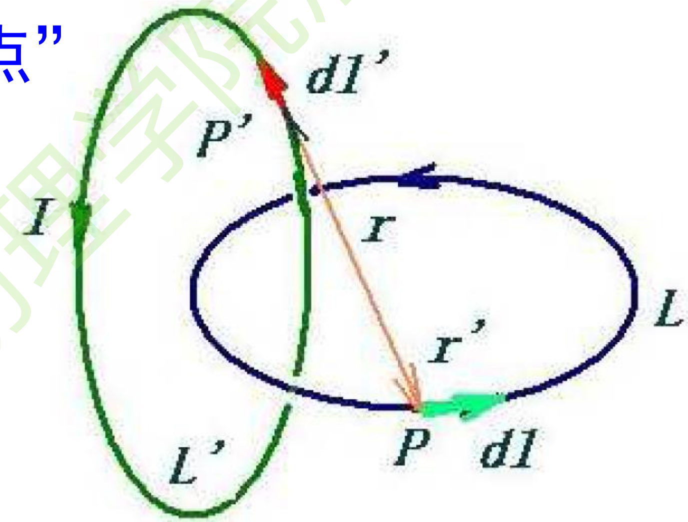
立体角趋近$+2\pi$

当P点从正面接近曲面时，

立体角趋近-2π

设电流环路为L'，P'为电流元所在处，“源点”

L为积分回路，P为积分元所在处，“场点”



$\vec{r}$为源点到场点的位移，

$\vec{r}'$为场点到源点的位移

$$\boxed{\vec{r} = -\vec{r}'}$$

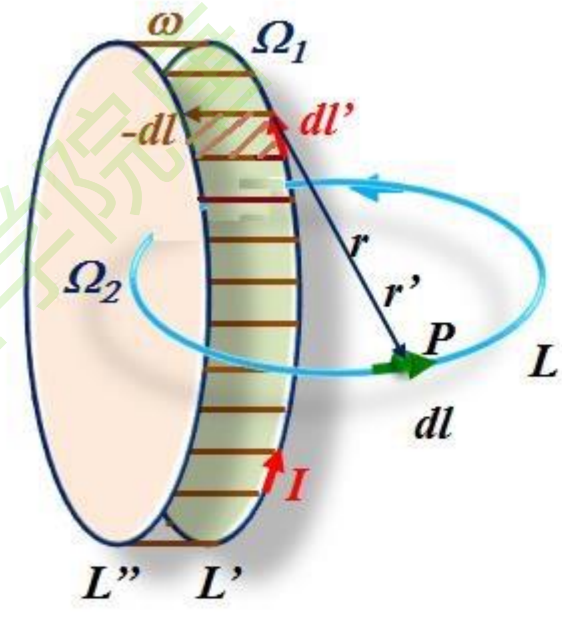
$$\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_{L'} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{l}'\times\vec{r}}{r^3}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{L'}\frac{\mathrm{d}\vec{l}\times d\vec{l}'}{r^3}\cdot\vec{r}$$

$$\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{L'}\frac{d\vec{l}'\times(-\mathrm{d}\vec{l})}{r^3}\cdot\vec{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{L'}\frac{d\vec{l}'\times(-\mathrm{d}\vec{l})}{r'^3}\cdot -\vec{r}'$$

$$\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{L'} \frac{\mathrm{d}\vec{l}'\times(-\mathrm{d}\vec{l})}{r'^3}\cdot \vec{r}'$$

$$\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{L'} \frac{\mathrm{d}\vec{S}}{r'^3}\cdot \vec{r}' = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{L'} \frac{\mathrm{d}S_0}{r'^2}$$

$$\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{L'} \mathrm{d}\omega = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\omega$$



(a)

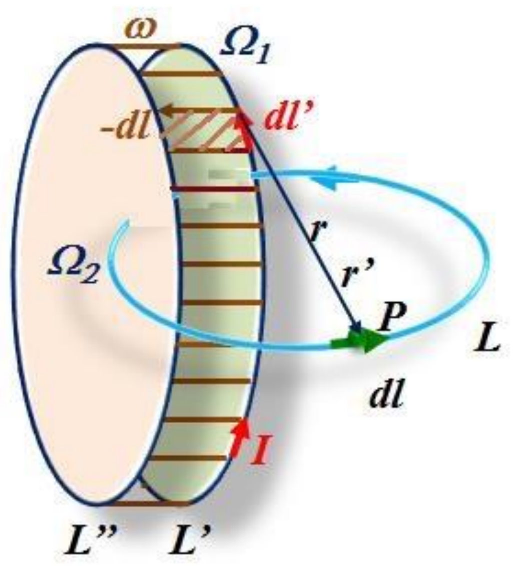
ω为带状区域对P点所张的立体角

P点必定在圆柱体外

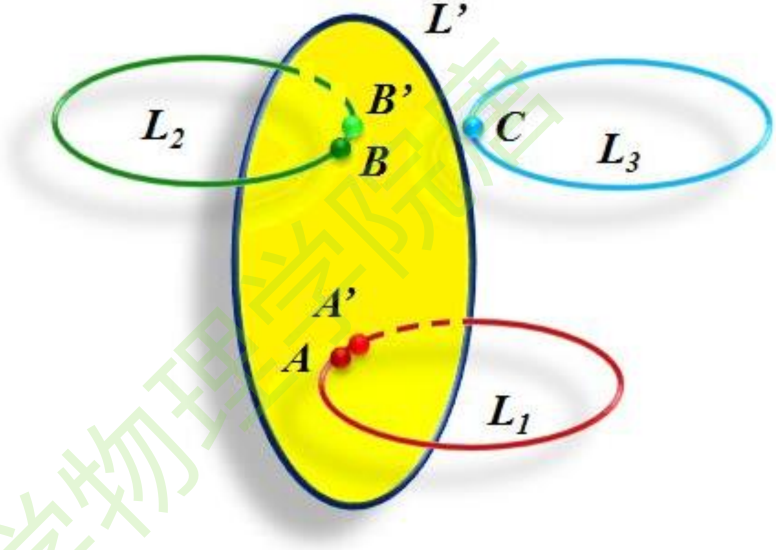
定义电流回路右旋方向为正，则有

$$\omega + \Omega_2 - \Omega_1 = 0$$

$$\omega = -(\Omega_2 - \Omega_1) = -d\Omega$$



(a)



(b)

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_L d\Omega$$

L_1：从A顺着$d\vec{l}$方向走到A', 从正面走到反面，立体角 变化4π

L_2：从B'顺着$d\vec{l}$方向走到B, 从反面走到正面，立体角变化-4π

L_3：从C'顺着$d\vec{l}$方向走到C, 走到原地， 立体角变化0

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_L d\Omega = \begin{cases} \mu_0 I & L_1，即\vec{L}与I同向 \\ -\mu_0 I & L_2，即\vec{L}与I反向 \\ 0 & L_3，即\vec{L}与I不套连 \end{cases}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 I}$$

对于多个**电流回路**，根据磁场的叠加原理可得

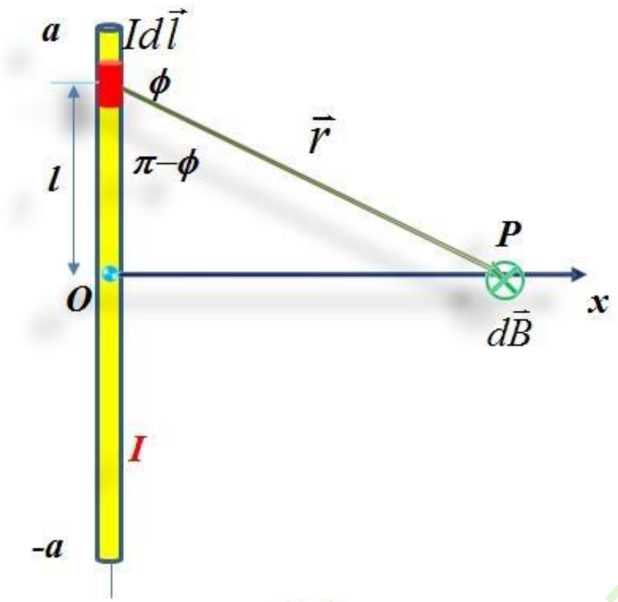
$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{L_{in}} I_i}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

电场 vs. 磁场

	电场	磁场
高斯定理	$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S_{in}} q_i$	$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$
	$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\nabla\cdot\vec{B} = 0$
环路定理	$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$	$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\sum_{L_{in}} I_i$
	$\nabla\times\vec{E} = 0$	$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}$
	有源无旋	无源有旋

无限长直导线的磁场



(a)

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L_{in}} I_i$$

$$B2\pi r_0 = \mu_0 I$$

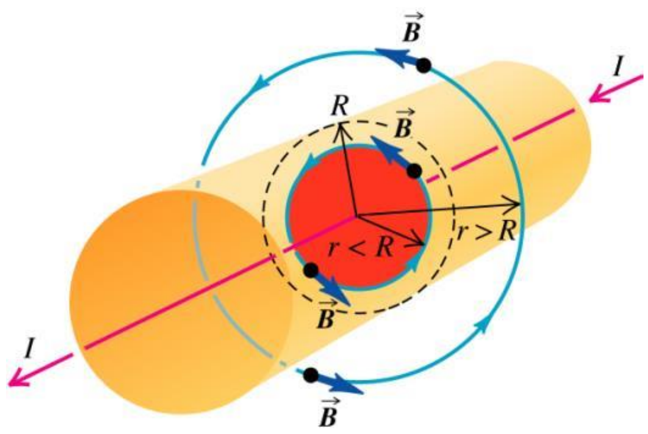
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\phi}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$$

有限尺寸的无限长直导线的磁场

【例4.3】半径为R的直导线，电流I均匀流过导体截面，求磁场。



【解】导体外$(r > R)$与线电流一样

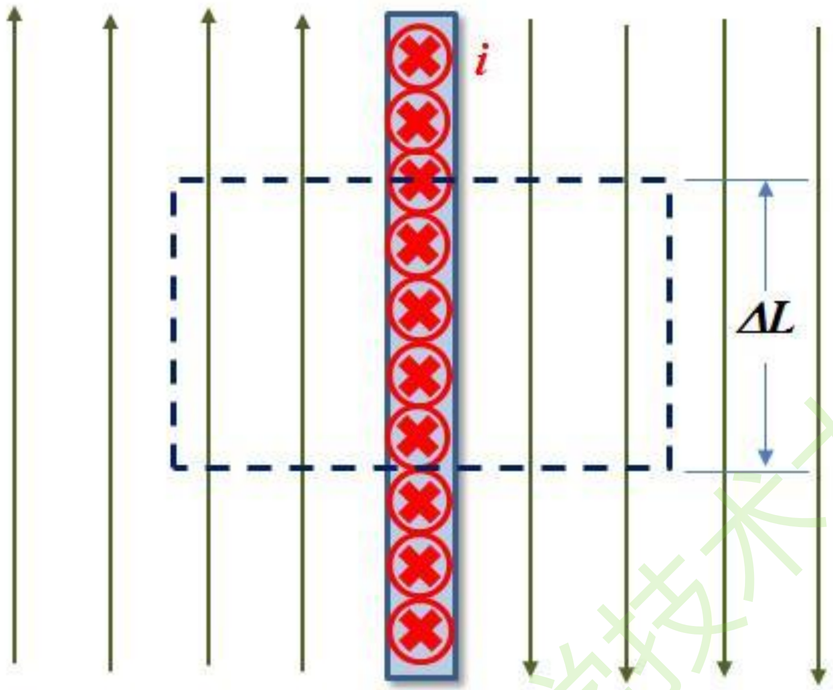
$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

导体内$(r \leq R)$

$$\boxed{B\ 2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I}$$

$$\boxed{B = \mu_0 I \frac{r}{2\pi R^2}}$$

无限大面电流的磁场分布



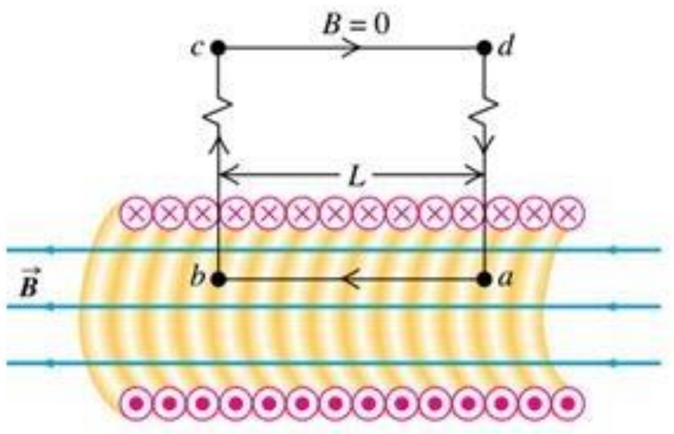
两侧磁场大小相等，方向相反

$$\boxed{2\,B\Delta L=\mu_0 i\ \Delta L}$$

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 i}{2}}$$

匀强磁场

理想螺线管的磁场分布



由对称性可知管内和管外磁场均平行于螺线管的长轴

由安培环路定理可知管内管外均为匀强磁场

由环形电流在轴线上的磁感应强度易得理想螺线管轴线上

$$\boxed{B_{r=0} = \mu_0 nI}$$

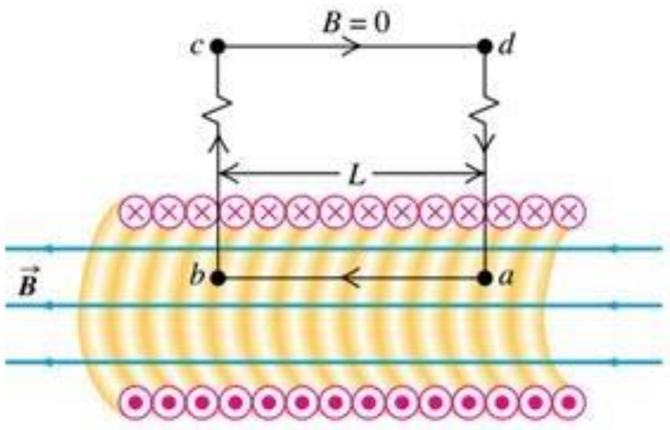
$$\boxed{B_i = \mu_0 nI}$$

$$\boxed{B_i L - B_e L = \mu_0 nLI}$$

$$\boxed{B_e = 0}$$

螺线管表面电磁力的压强是多少？

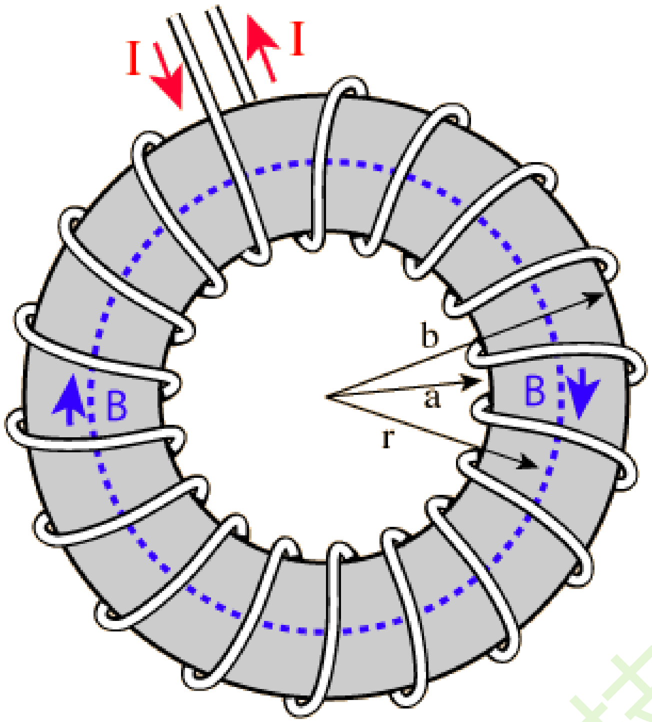
事实上，管外磁场有垂直分量



$$i = \frac{I}{2\pi R}$$

$$\boxed{B_{\perp i} = 0}$$

$$\boxed{B_{\perp e} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$



$$B\,2\pi r = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

当环比较细时，$a \approx b = R$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} = \mu_0 nI$$

与无限长直螺线管结果一致

作业

- 4.6
- 4.8
- 4.11
- 4.12
- 4.13