第4章 磁力与磁场

§4.1 磁现象与磁力

§4.2 电流的磁场

§4.3 静磁场的基本定理

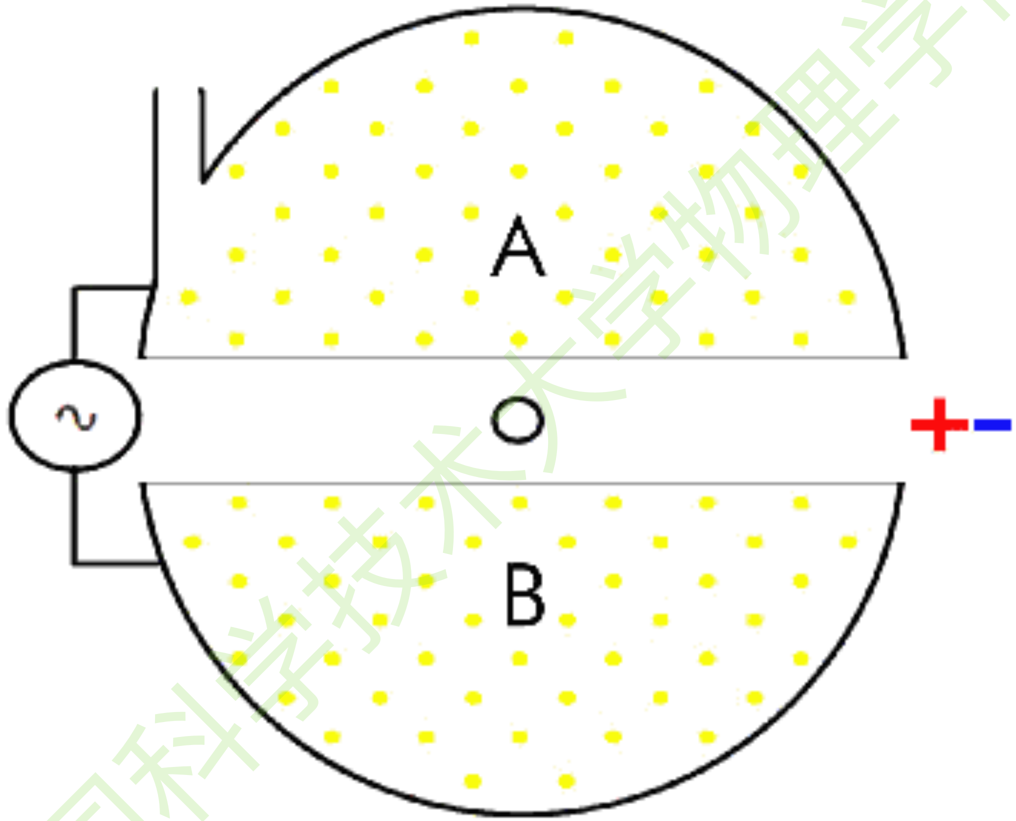
§4.4 带电粒子在磁场中的运动

§4.5 霍尔效应

电场 vs. 磁场

	电场	磁场
高斯定理	$\displaystyle\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S_{in}} q_i$	$\displaystyle\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$
	$\nabla\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\nabla\cdot\vec{B} = 0$
环路定理	$\displaystyle\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$	$\displaystyle\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\sum_{L_{in}} I_i$
	$\nabla\times\vec{E} = 0$	$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}$
	有源无旋	无源有旋

§ 4.4 带电粒子在磁场中的运动



§ 4.4.1 带电粒子在均匀场中的运动

洛伦兹力

带电粒子在磁场中的受力 $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{v} = 0$$

洛伦兹力不对粒子做功，功率为零。动能不变。速率不变。

带电粒子在均匀磁场中的运动

设磁场的方向为z

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\begin{cases} F_x = m\dfrac{dv_x}{dt} = qv_yB \\ F_y = m\dfrac{dv_y}{dt} = -qv_xB \\ F_z = m\dfrac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = \frac{qB}{m}\frac{dv_y}{dt} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x$$

$$v_x = v_\perp \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

$$v_y = \frac{m}{qB}\frac{dv_x}{dt} = -v_\perp \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v_x^2 + v_y^2 = v_\perp^2 = v_{x0}^2 + v_{y0}^2$$

$$v_\perp = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}$$

横向速率恒定

z方向作匀速直线运动

$$\begin{cases} v_x = \quad v_\perp \cos(\omega t + \varphi) \\ v_y = -v_\perp \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{v_\perp}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) \\ y = y_0 + \dfrac{v_\perp}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \left(\frac{v_\perp}{\omega}\right)^2 = R^2$$

$$R = \frac{v_\perp}{\omega} = \frac{m v_\perp}{qB}$$

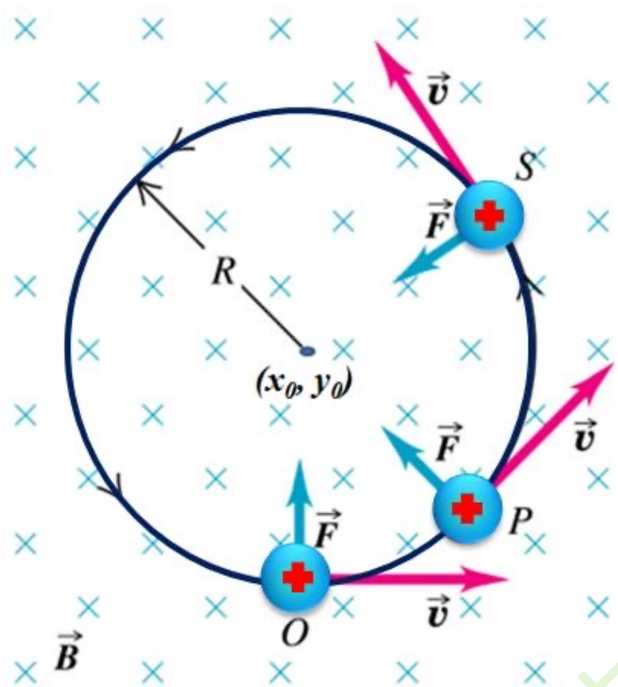
$$T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi m}{qB}$$

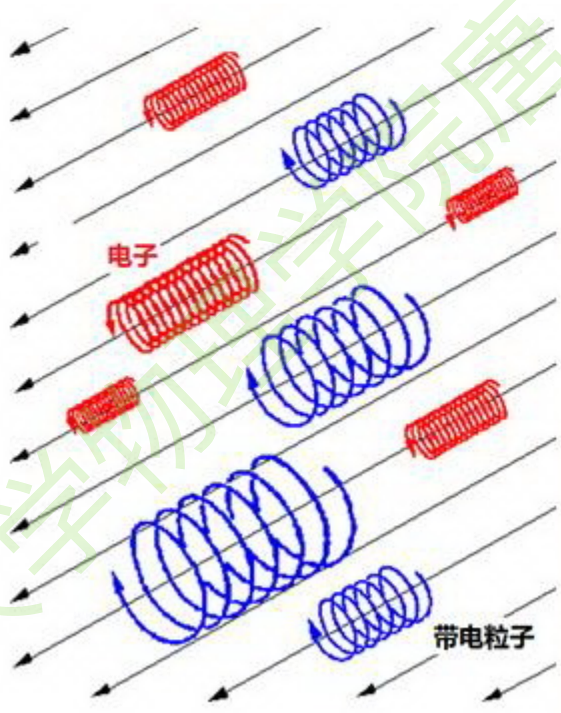
周期与粒子速度无关

在与磁场垂直的平面里做匀速圆周运动

在与磁场平行的方向做匀速直线运动

轨迹为以磁场方向为轴的螺旋运动

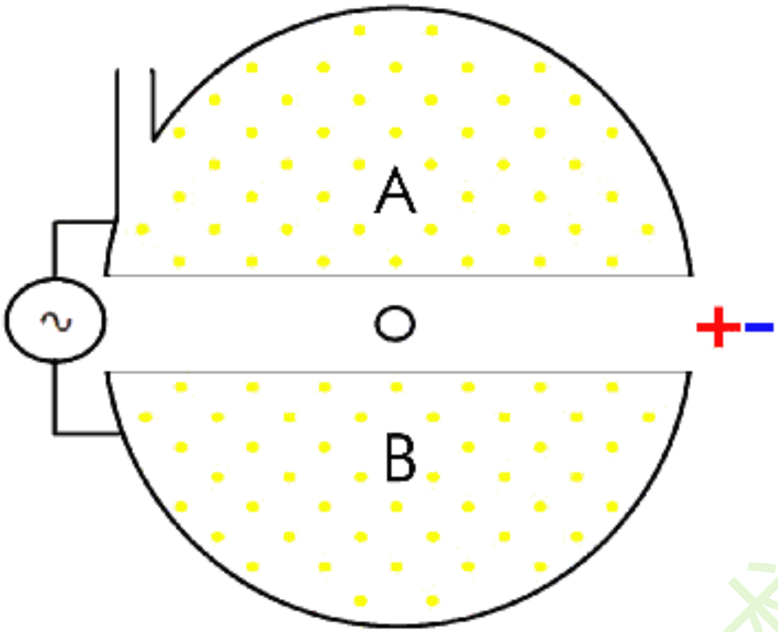


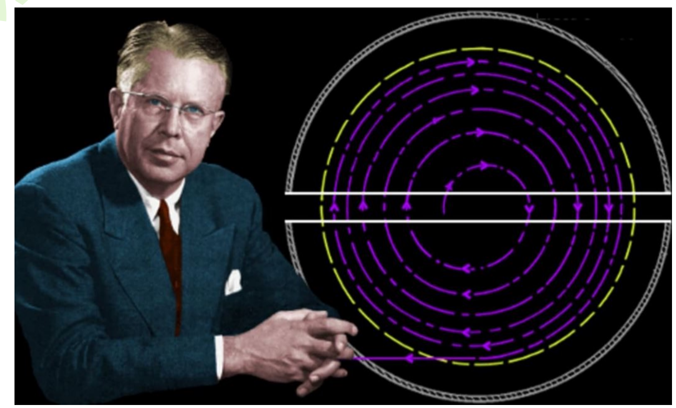


(a)

螺距：$$\boxed{h = v_{\parallel} T = \frac{2\pi m v_{\parallel}}{qB}}$$

回旋加速器（Cyclotron）





$$T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi m}{qB}$$

$$R = \frac{v_\perp}{\omega} = \frac{m v_\perp}{qB}$$

$$v_{max} = \frac{qBR}{m}$$

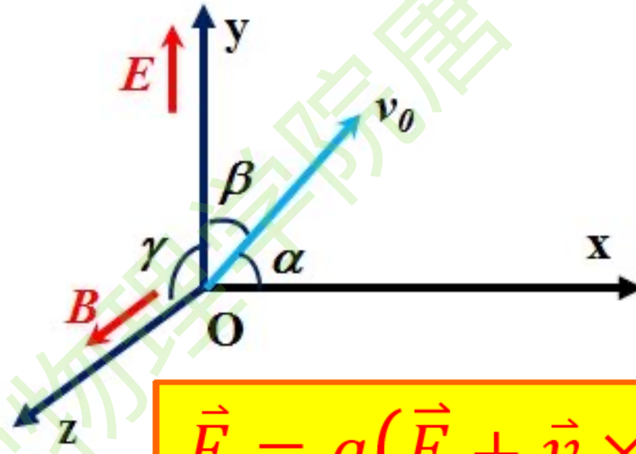
$$E_k = \frac{(qBR)^2}{2m}$$

Ernest Lawrence (1901-1058)

1939 Nobel Prize in Physics

带电粒子在均匀电磁场中的运动*

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{E}{B} + v_\perp \sin(\omega t + \varphi) \\ v_y = v_\perp \cos(\omega t + \varphi) \\ v_z = v_0 \cos\gamma \end{cases}$$



$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

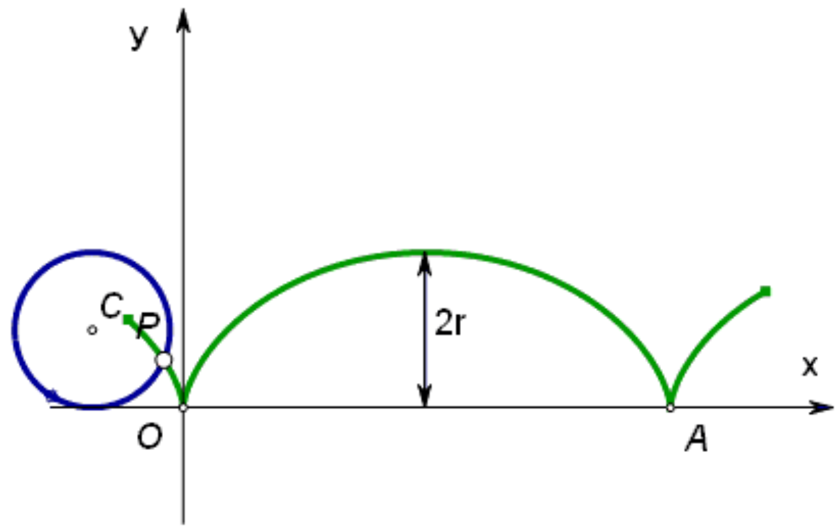
$$v_\perp = \sqrt{\left(v_{x0} - \frac{E}{B}\right)^2 + v_{y0}^2}$$

匀速圆周运动+匀速直线运动

匀速直线运动包含两个：

$$\begin{cases} \vec{v}_E = \dfrac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \\ v_z = v_0 \cos\gamma \end{cases}$$

电漂移速度



§ 4.4.2 带电粒子在非均匀磁场中的运动

1. 磁矩守恒

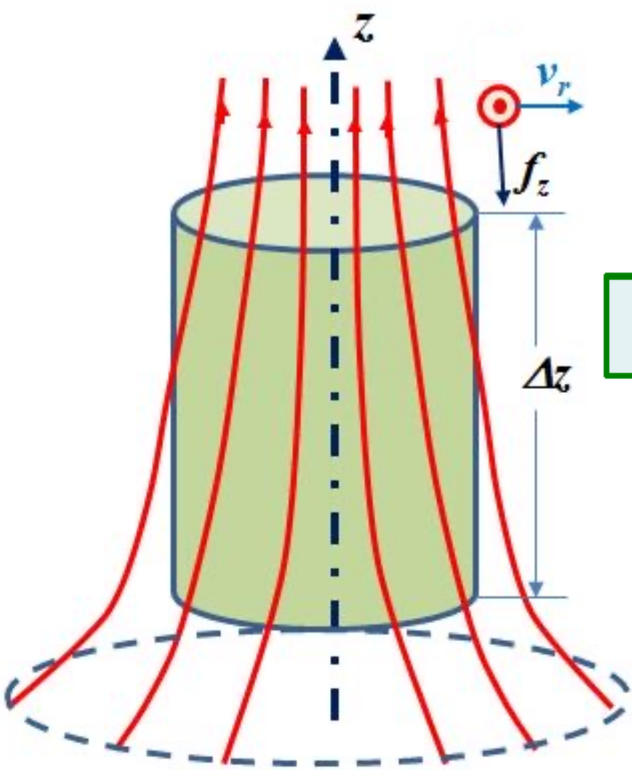
带电粒子在非均匀磁场中运动，当磁场的非均匀尺度远大于带电粒子的回旋半径的时候，粒子的运动依然可以近似看成绕磁感应线的螺旋运动。

由于非均匀磁场造成的梯度力做功，粒子沿磁感应线方向的速度$v_{\parallel}$不再是守恒量。

由于磁场力不做功，动能不变。相应地，粒子垂直于磁感应线方向的速度$v_{\perp}$不再是守恒量。

可证，粒子运动的回旋磁矩μ是守恒量。

$$\boxed{\mu = \frac{\frac{1}{2} m v_{\perp}^2}{B}}$$



设在轴对称、缓慢变化的磁场中

取圆柱高斯面，根据磁场高斯定理，有

$$B_r 2\pi r\Delta z + [B_z(z+\Delta z) - B_z(z)]\pi r^2 = 0$$

$$B_r = -\frac{r}{2}\frac{[B_z(z+\Delta z) - B_z(z)]}{\Delta z}$$

$$B_r \xrightarrow{\Delta z\to 0} = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

z方向有梯度必然导致径向有磁场

径向磁场导致的洛伦兹力:

$$f_z = qv_\perp B_r = -qv_\perp \frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

用梯度力可得到同样结果

$$\mu = I\pi r^2 = \frac{q}{2\pi r/v_\perp}\pi r^2 = qv_\perp \frac{r}{2}$$

$$f_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} = -qv_\perp \frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$f_z = m\frac{dv_z}{dt} = -\mu\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

两边同乘v_z

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_z^2\right) = -\mu\frac{\partial B_z}{\partial z}\frac{dz}{dt} = -\mu\frac{dB}{dt}$$

其中带电粒子的磁矩：

$$\mu = qv_\perp\frac{r}{2} = \frac{qv_\perp}{2}\frac{mv_\perp}{qB} = \frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{B}$$

$$\frac{1}{2}mv_\perp^2 = \mu B$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_\perp^2\right) = \frac{d}{dt}(\mu B) = \mu\frac{dB}{dt} + B\frac{d\mu}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}mv_\perp^2\right) = 0 = B\frac{d\mu}{dt}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = 0,\quad \mu = \mathrm{const}$$

缓变磁场中，磁矩守恒

回旋运动

$$R=\frac{mv_\perp}{qB}$$

$$R^2=\left(\frac{mv_\perp}{qB}\right)^2=\mu\frac{2m}{q^2B}$$

$$R=\sqrt{\frac{2m\mu}{q^2B}}$$

回旋半径与磁场的平方根成反比

弱场到强场时，回旋半径变小

$$\Phi=BS=B\pi R^2=\mu\frac{2\pi m}{q^2}=\text{const}$$

磁通量守恒

$$T=\frac{2\pi R}{v_\perp}=\frac{2\pi m}{qB}$$

回旋周期近似守恒

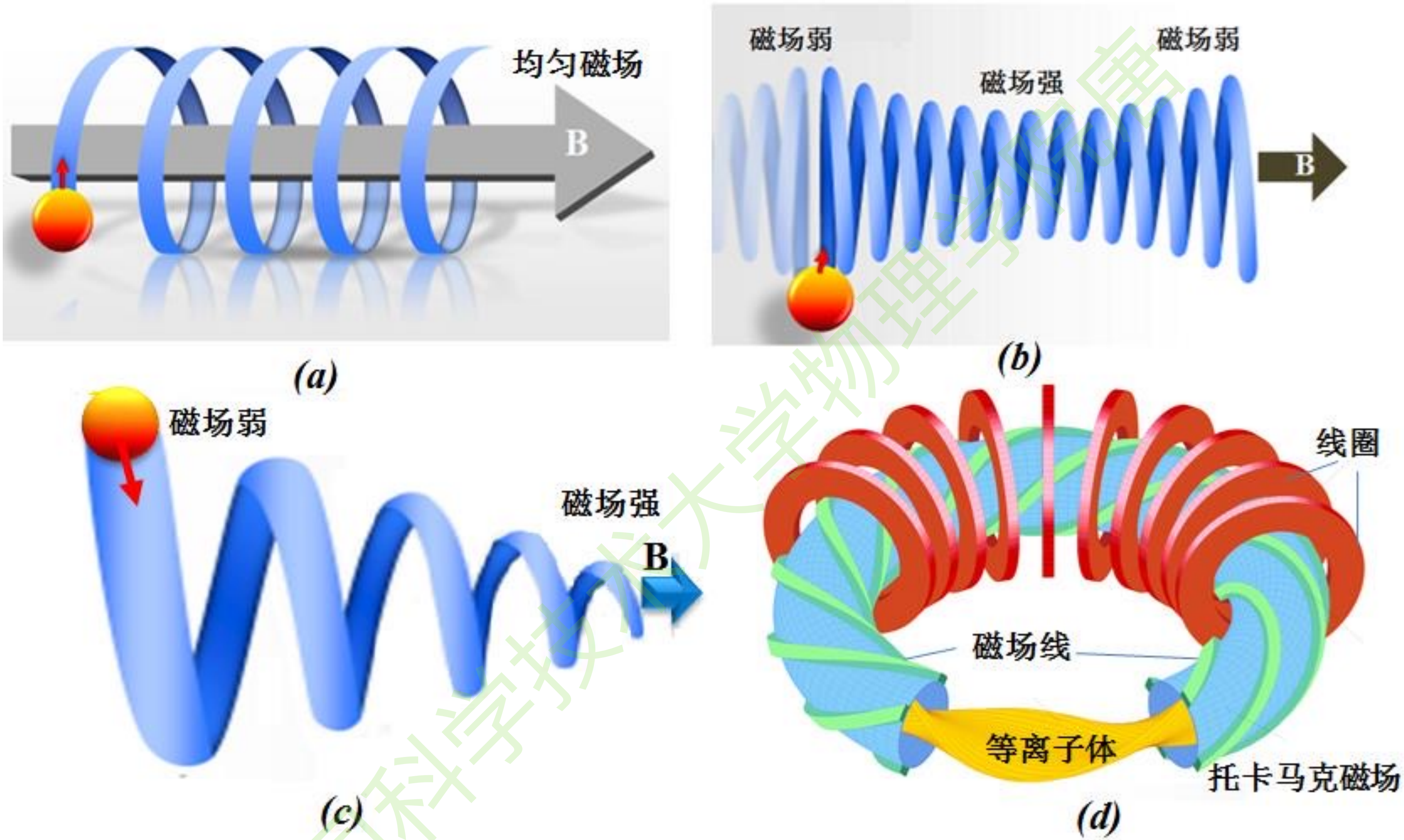
z向速度$v_\parallel$的变化

$$\boxed{\mu = \frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{B} = \text{const}}$$

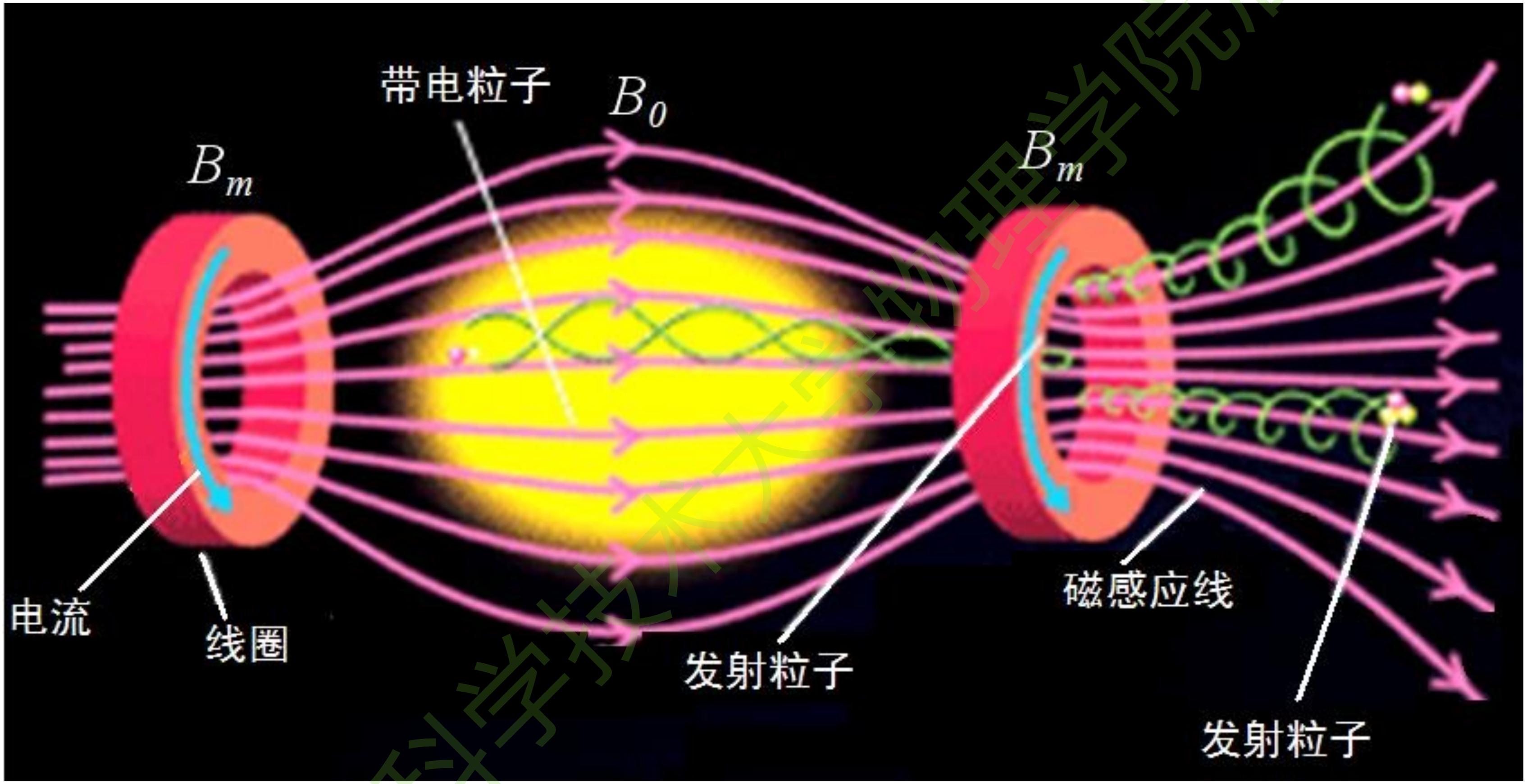
弱场到强场时，回旋速度$v_\perp$变大，z向速度$v_\parallel$变小

螺距 $$\boxed{h = v_\parallel T = \frac{2\pi m v_\parallel}{qB}}$$

弱场到强场时，螺距变小


均匀磁场
B
(a)
磁场弱
磁场强
磁场弱
B
(b)
磁场弱
磁场强
B
(c)
线圈
磁场线
等离子体
托卡马克磁场
(d)

2. 磁镜与磁聚焦



磁镜： 两端强、中间弱的磁场位形的装置。

$$\boxed{\mu = \frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{B} = \text{const}}$$

弱场到强场时，回旋速度$v_\perp$变大，z向速度$v_\parallel$变小

$v_\parallel = 0$时，粒子不能再往前走，返回，永远无法逃出磁镜

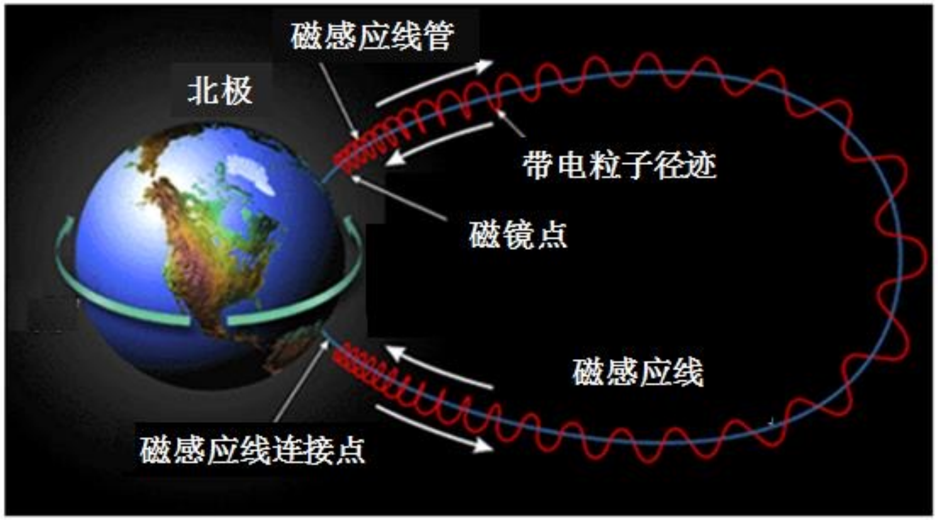
设粒子在磁镜最弱处运动速度与磁场夹角为θ，设到达磁场最强处恰好$v_\parallel = 0$，根据磁矩守恒，有

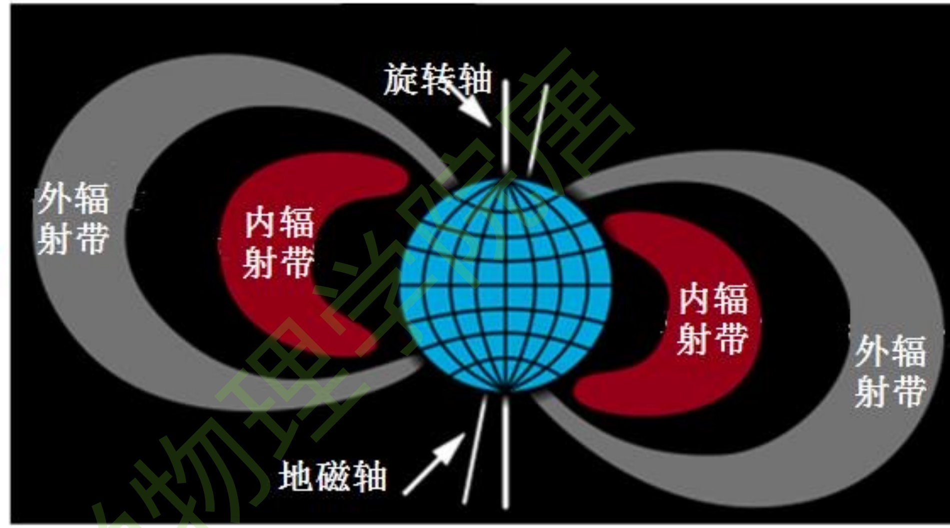
$$\mu = \frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{B} = \frac{\frac{1}{2}mv^2\sin^2\theta}{B_0} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{B_m}$$

$$\boxed{\sin\theta_m = \sqrt{\frac{B_0}{B_m}} = \sqrt{\frac{1}{R_m}}}$$

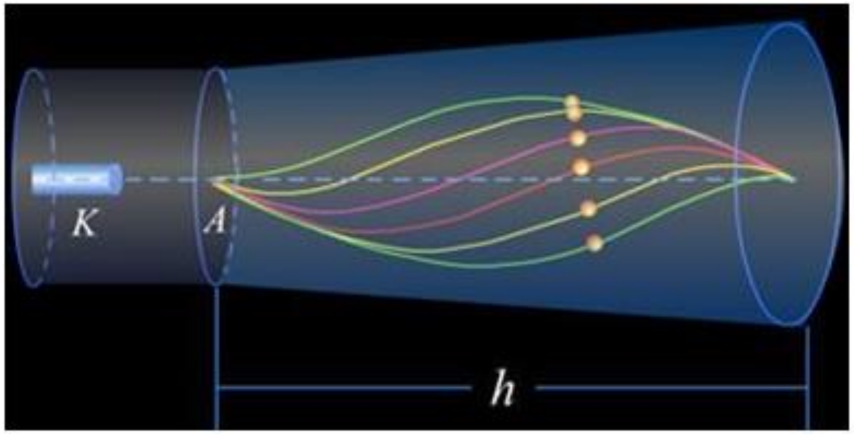
$\theta > \theta_m$，粒子被约束在磁镜里

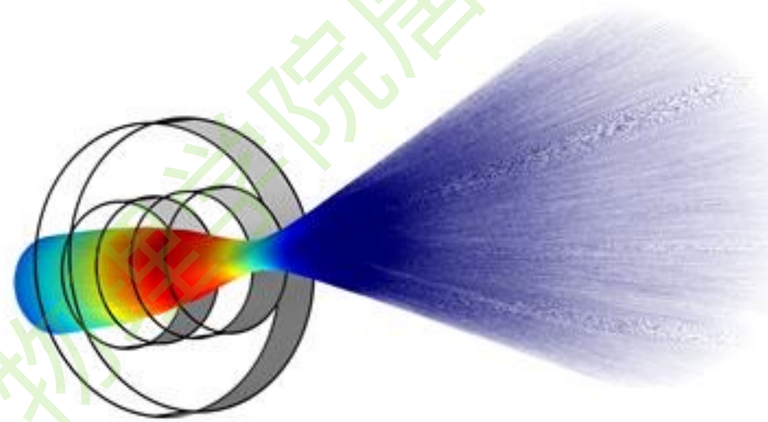
$\theta < \theta_m$，粒子穿过磁镜而损失


磁感应线管
北极
带电粒子径迹
磁镜点
磁感应线
磁感应线连接点


旋转轴
外辐
射带
内辐
射带
内辐
射带
外辐
射带
地磁轴

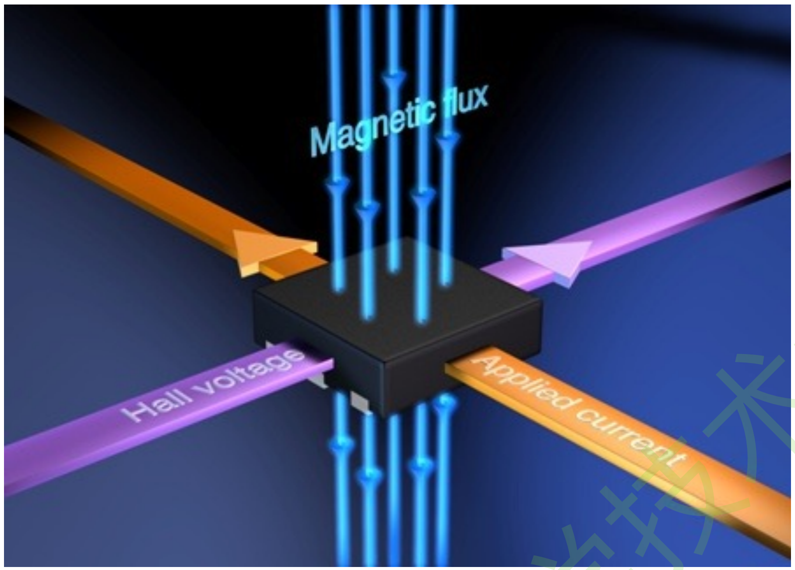
磁聚焦

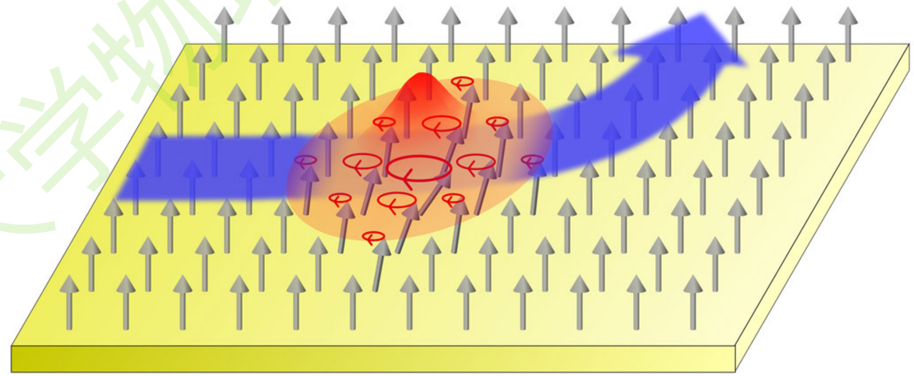




加上磁场后，小角度内发射的粒子在经过一个周期后回到同一个点，达到聚焦目的。

§ 4.5 霍尔效应



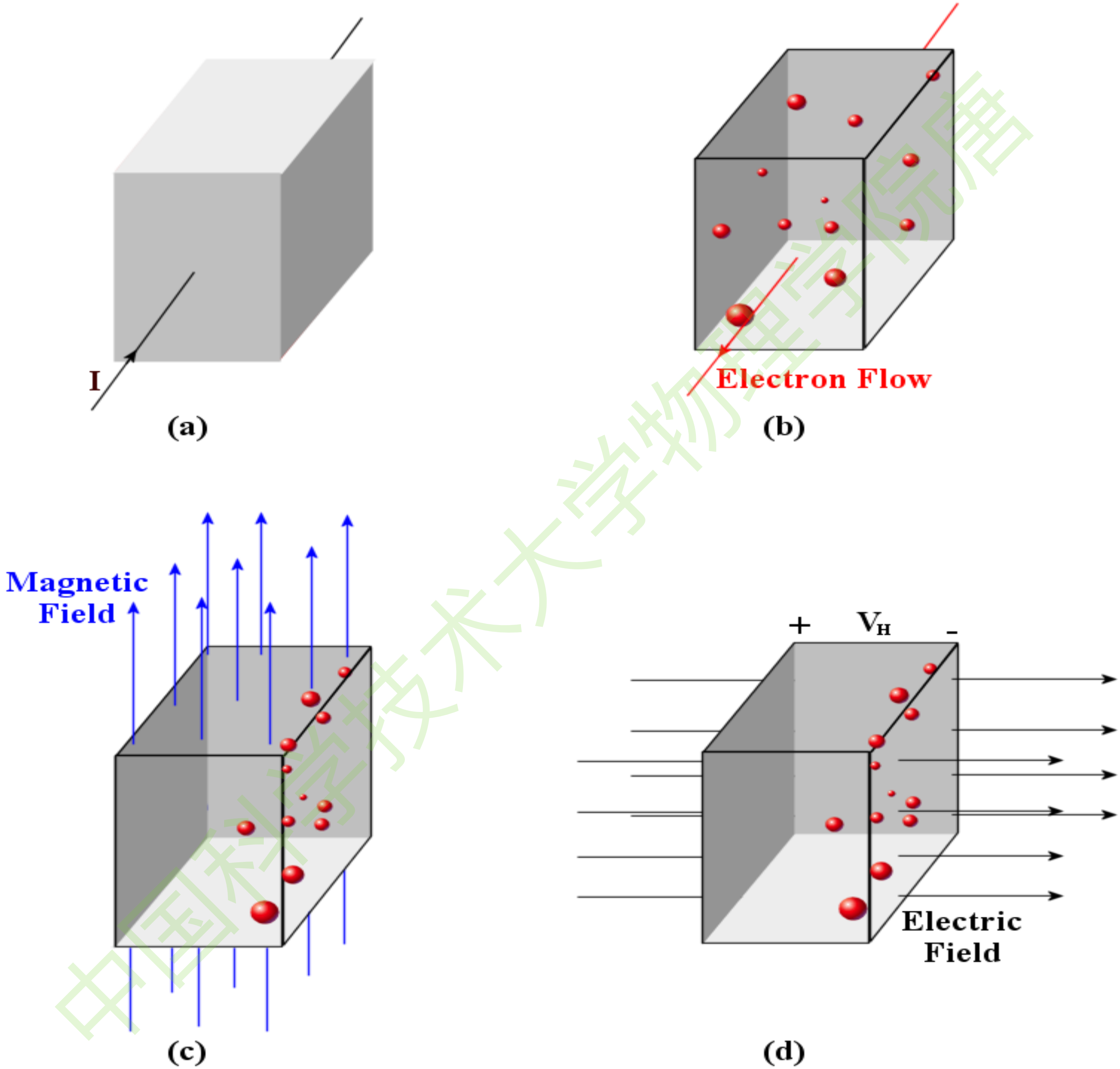


霍尔效应是磁电效应的一种。这一现象是霍尔与1879年在研究金属的导电机制时发现。

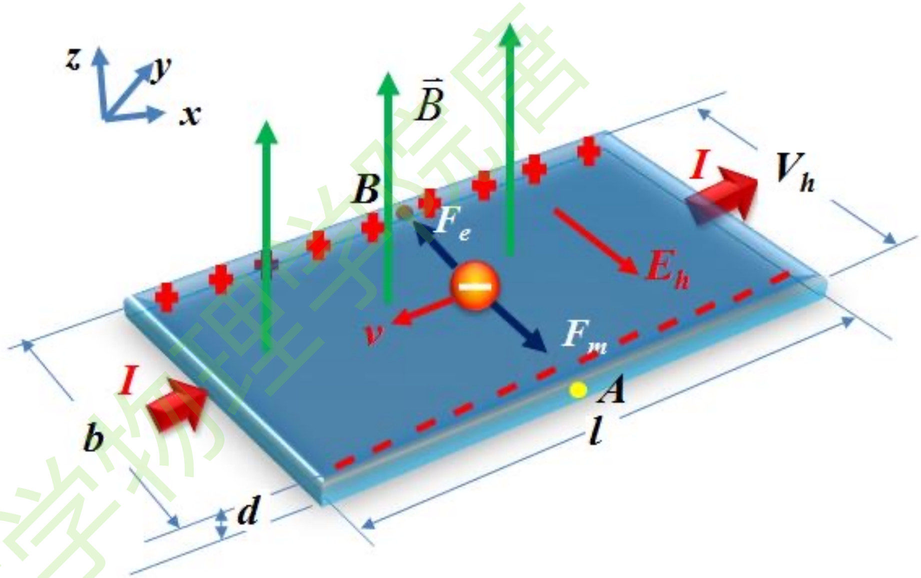
电流流过处在磁场中的金属时，在垂直于电流和磁场方向上，金属导体出现电势差。

但当时电子还没有被发现，人们无法解释霍尔现象。金属的霍尔效应也很弱，没有得到应用。

后来发现半导体也有霍尔效应，而且比金属强得多。随着半导体技术的发展，霍尔效应得到广泛的应用。


I
(a)
Electron Flow
(b)
Magnetic
Field
(c)
+
V_H
-
Electric
Field
(d)

电子流过处在磁场中的半导体时，会因受到洛伦兹力而偏转



$$\vec{F}_m = -e\vec{v} \times \vec{B} = evB\vec{e}_x$$

载流子堆积在半导体一侧，会形成电场，给载流子施加电场力。

$$\vec{F}_e = -e\vec{E}_h = -e\frac{V_h}{b}\vec{e}_x$$

$$evB = e\frac{V_h}{b}$$

电场力抵消洛伦兹力，最终达到平衡。载流子不再偏转，电势差不在变化。

$$V_h = vBb$$

$$I = jS = nev \cdot bd$$

$$v = \frac{I}{nebd}$$

$$V_h = vBb = \frac{IB}{ned} = R_h \frac{IB}{d} = K_h IB$$

$$R_h = \frac{1}{ne} = \frac{1}{\rho_e}$$

Hall constant R_H (cm^3/As)			
metals	10^{-4}	InSb	380
Ge	10^{+3}	GaAs	10^{+4}
Si	10^{+6}		

霍尔系数。与载流子密度有关，表征材料产生霍尔效应的本领。

$$K_h = \frac{R_h}{d}$$

霍尔元件的灵敏度。表征元件产生霍尔效应的本领。灵敏度越大，产生的电势差越大。

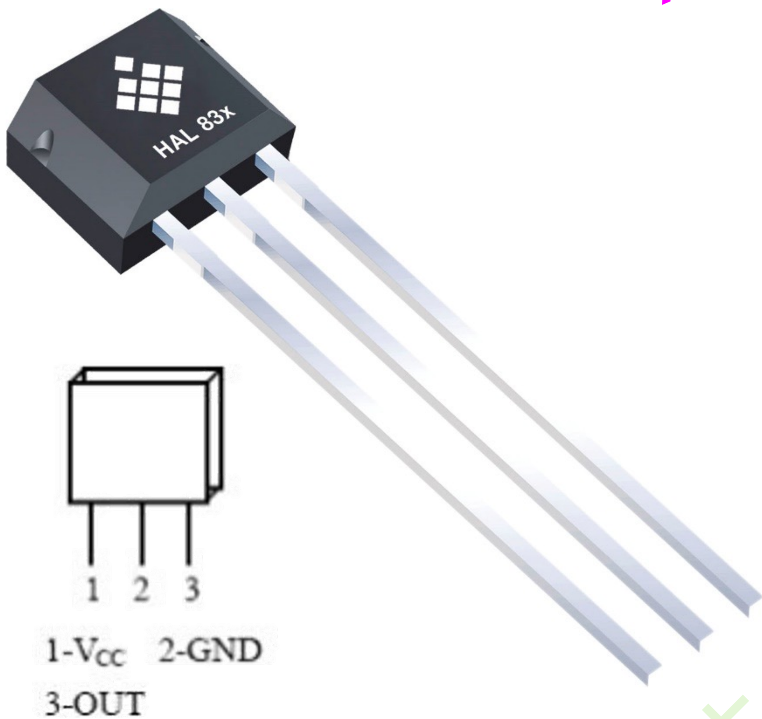
霍尔效应的应用

可测载流子的浓度。

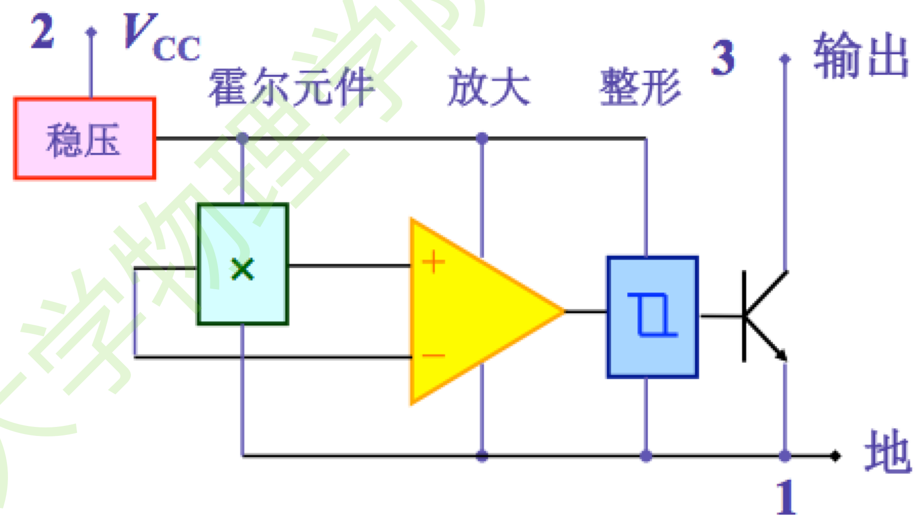
可测载流子带正电荷还是负电荷。即判断半导体是P型还是N型。

可测磁感应强度。是磁场测量的常用方法。

霍尔传感器



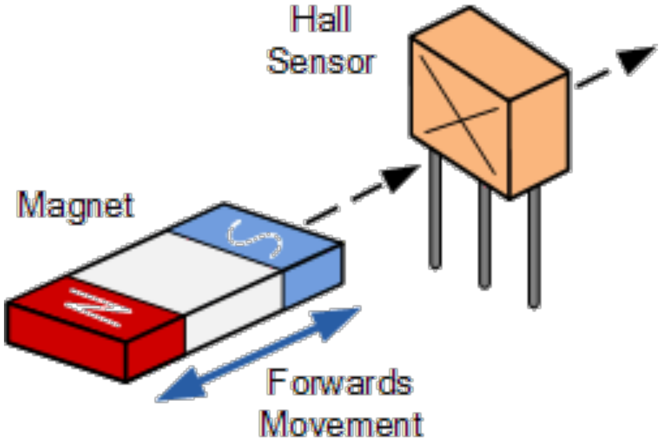
霍尔开关电路

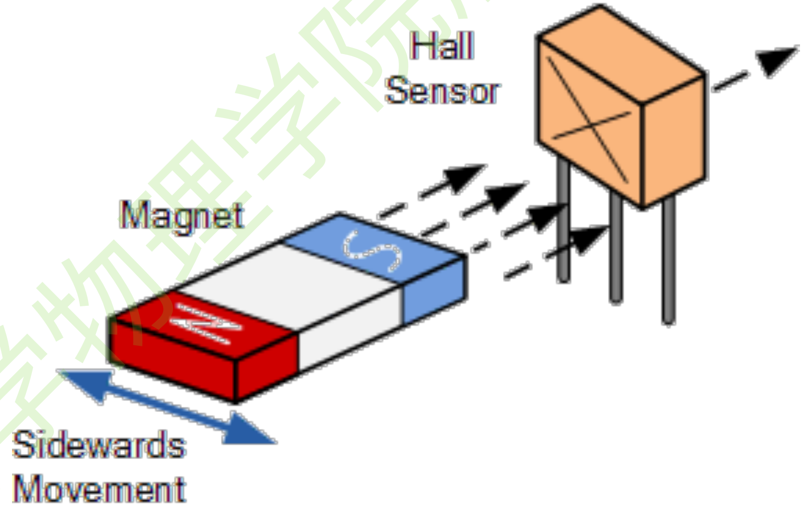


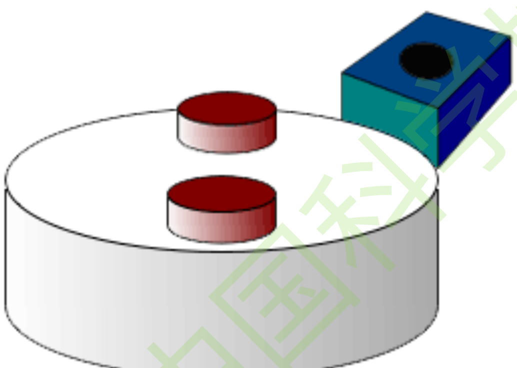
磁场大时，霍尔元件输出电势大，放大后导通电路。

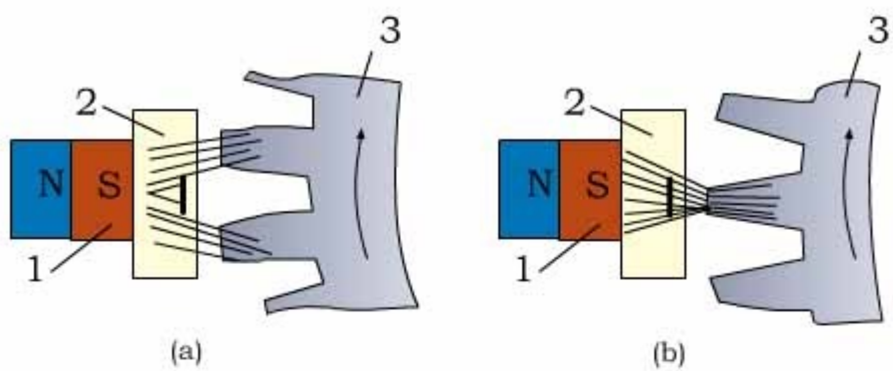
磁场小时，霍尔元件输出电势小，电路关闭。

霍尔传感器的应用









霍尔轮速传感器示意图

1.磁体 2.霍尔元件 3.齿圈

汽车里的霍尔元件

作业

- 4.15
- 4.18
- 4.20
- 4.21
- 4.27