第6章 电磁感应与磁场的能量

§6.1 电磁感应定律

法拉第电磁感应定律：

当通过导体回路的**磁通量发生改变**时，回路中就有**感应电动势**的产生，进而产生感应电流。

感应电动势的大小：

与磁通量变化的快慢有关

或者说与磁通量随时间的变化率有关

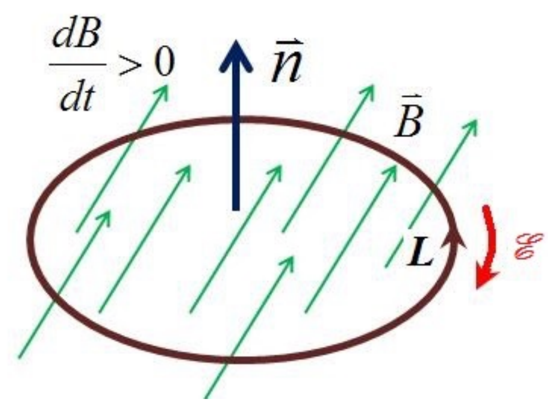
$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

感应电动势的方向：

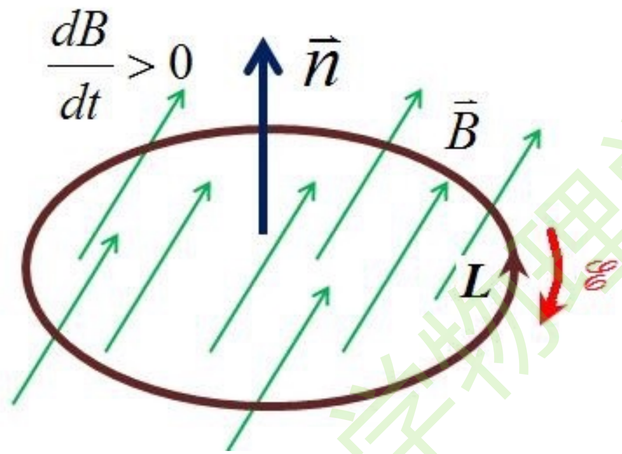
总是企图由它产生的感应电流建立一个附加磁通量，阻碍磁通量的变化。（“楞次定律”）

回路的绕行方向为感应电动势**参考方向**

- ε为**正**，代表与绕行方向**相同**
- ε为**负**，代表与绕行方向**相反**

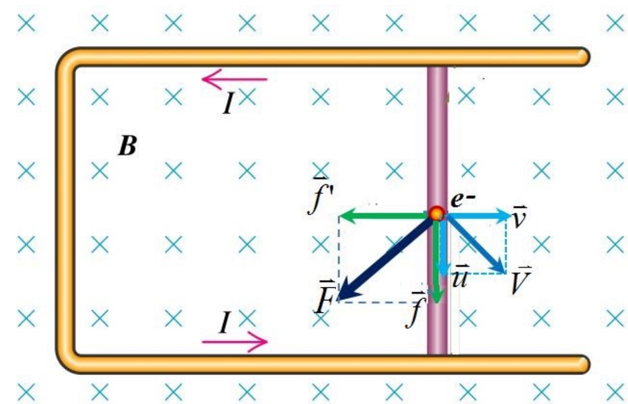


§ 6.2 动生电动势与感生电动势



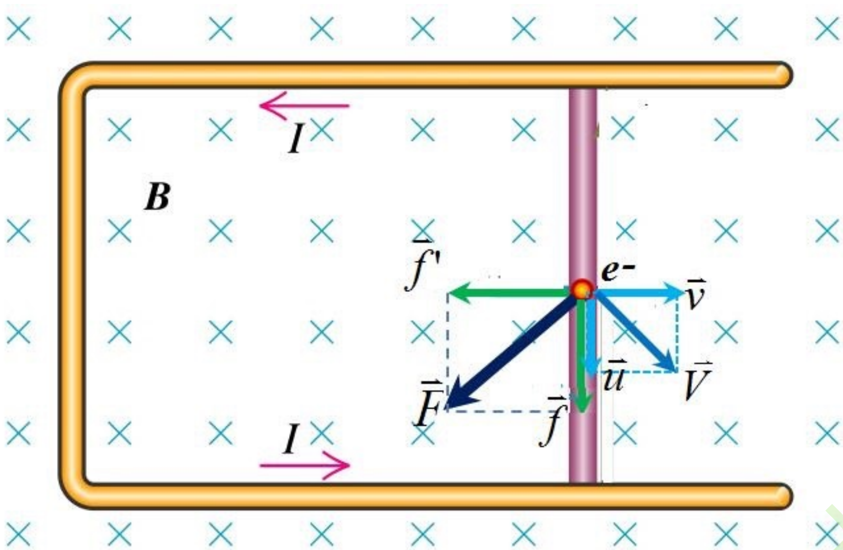
动生电动势：导体与磁场的相对运动产生的电动势

$$\varepsilon = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$



非静电力： 洛伦兹力

洛伦兹力不做功?!



设电子的定向运动速度为$\vec{u}$

导体运动速度为$\vec{v}$

电子的总的定向运动速度为

$$\boxed{\vec{V} = \vec{v} + \vec{u}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{F} &= -e\vec{V} \times \vec{B} = \left(-e\vec{v} \times \vec{B}\right) + \left(-e\vec{u} \times \vec{B}\right) \\ &= \vec{f} + \vec{f}'\end{aligned}}$$

$\vec{f}$为非静电力的来源。驱动电荷沿导体定向运动。

但其本质来源于外力克服$\vec{f}'$做功。

$\vec{f}$对电子的做功功率为：

$$P=\vec{f}\cdot\vec{u}=-e\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{u}$$

$\vec{f}'$对电子的做功功率为：

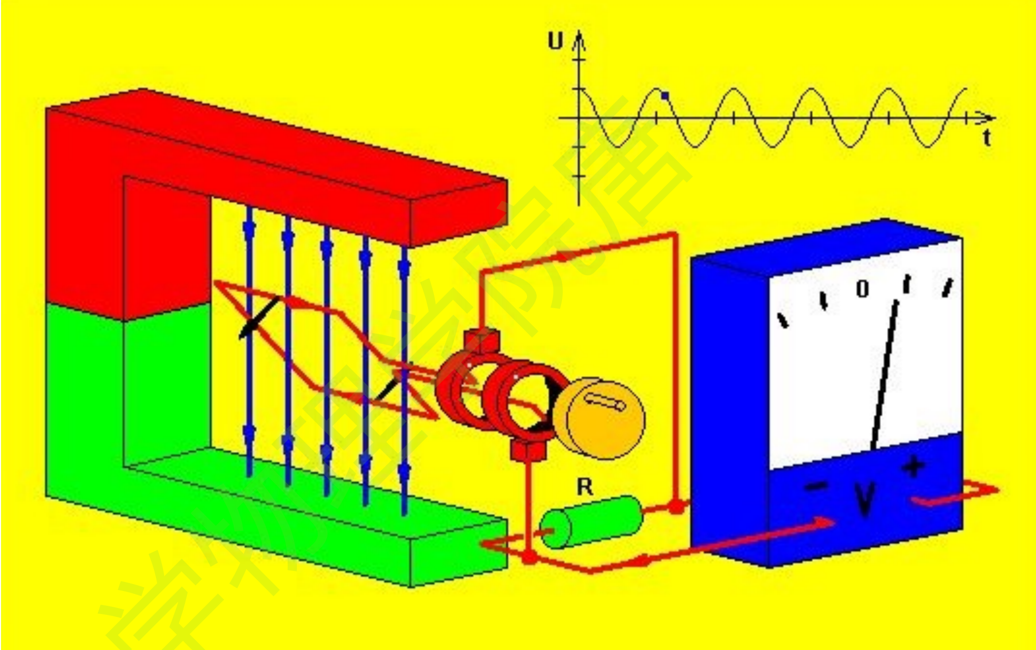
$$P'=\vec{f}'\cdot\vec{v}=-e\left(\vec{u}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{v}=e\left(\vec{B}\times\vec{u}\right)\cdot\vec{v}$$
$$=e\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{u}$$

$$P+P'=0$$

洛伦兹力确实不做功!!

但洛伦兹力传递能量。将外力克服洛伦兹力做功转化为电流的能量。

交流发电机



上面一段导线产生的动生电动势为：

$$\boxed{(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{l}=vBl\sin\theta}$$

方向指向上面电刷

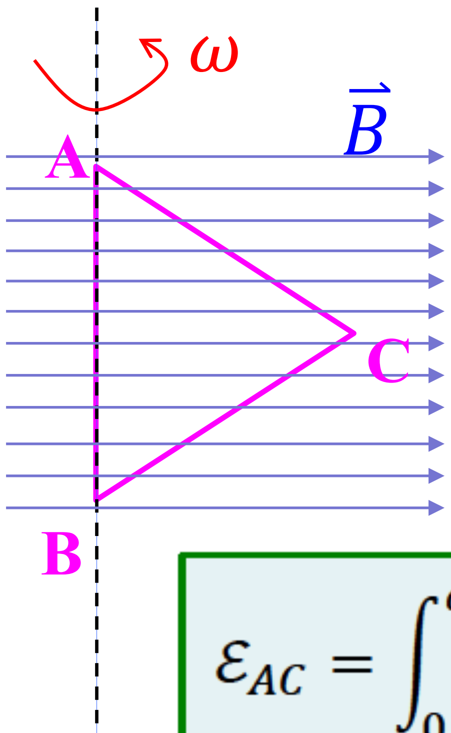
下面一段导线产生的动生电动势为：

$$\boxed{(-\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{l}=vBl\sin\theta}$$

方向背向下面电刷

两电刷之间的电动势为：$\boxed{\mathcal{E}=2vBl\sin\theta=2BLR\omega\sin\omega t}$

【例】一正三角形线圈的电阻为R，边长为a，以角速度ω绕AB轴旋转，均匀磁场B与转轴垂直，求线圈每两个顶点之间的电势差。



解：AC与BC段切割磁力线，有动生电动势

$$d\mathcal{E}_{AC} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$
$$= \omega \frac{\sqrt{3}}{2} l \cdot B \sin\theta \cdot \frac{1}{2} dl = \frac{\sqrt{3}}{4} B\omega \sin\theta \, l dl$$

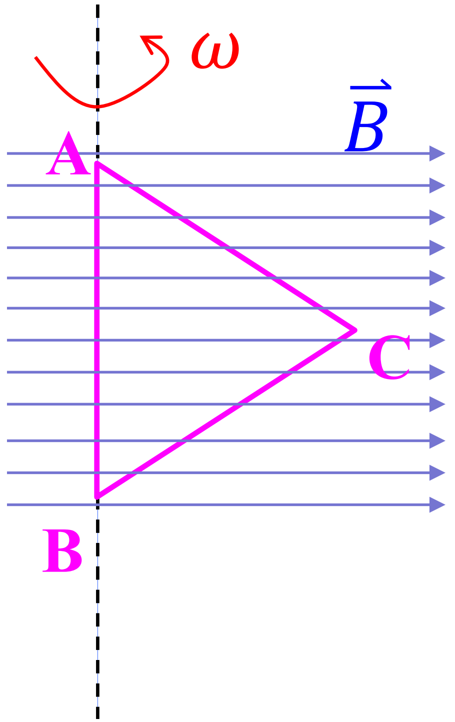
$$\mathcal{E}_{AC} = \int_0^a \frac{\sqrt{3}}{4} B\omega \sin\theta \, l dl = \frac{\sqrt{3}}{8} B\omega a^2 \sin\theta$$

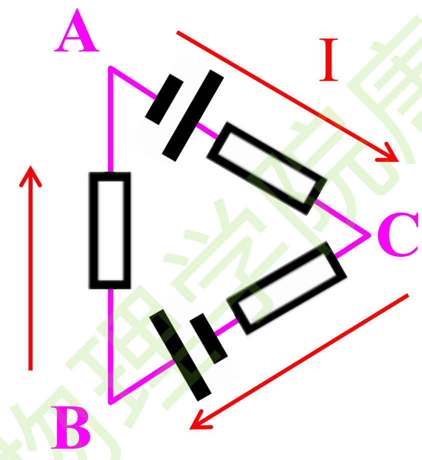
方向向下

同法

$$\mathcal{E}_{CB} = \int_0^a \frac{\sqrt{3}}{4} B\omega \sin\theta \, l dl = \frac{\sqrt{3}}{8} B\omega a^2 \sin\theta$$

方向向下

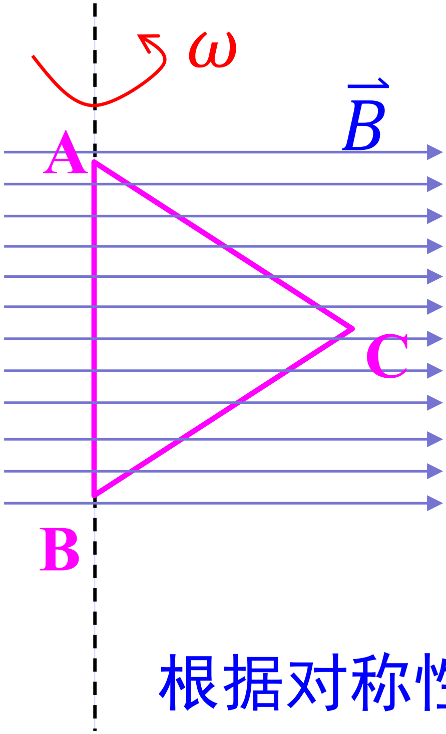


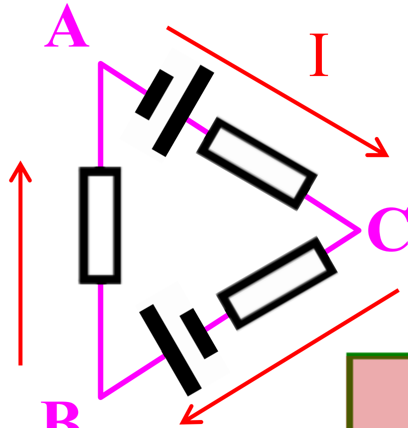


$$U_{BA}=\frac{1}{3}IR=\frac{1}{3}(\mathcal{E}_{AC}+\mathcal{E}_{CB})=\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{8}B\omega a^2\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{12}B\omega a^2\sin\omega t$$

$$U_{AC}=U_{CB}=-\mathcal{E}_{AC}+\frac{1}{3}IR=-\frac{1}{3}\mathcal{E}_{AC}=-\frac{\sqrt{3}}{24}B\omega a^2\sin\omega t$$

解II：





$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cos\omega t$$

$$\mathcal{E}_{ACBA} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4}B\omega a^2\sin\omega t$$

根据对称性可判断：

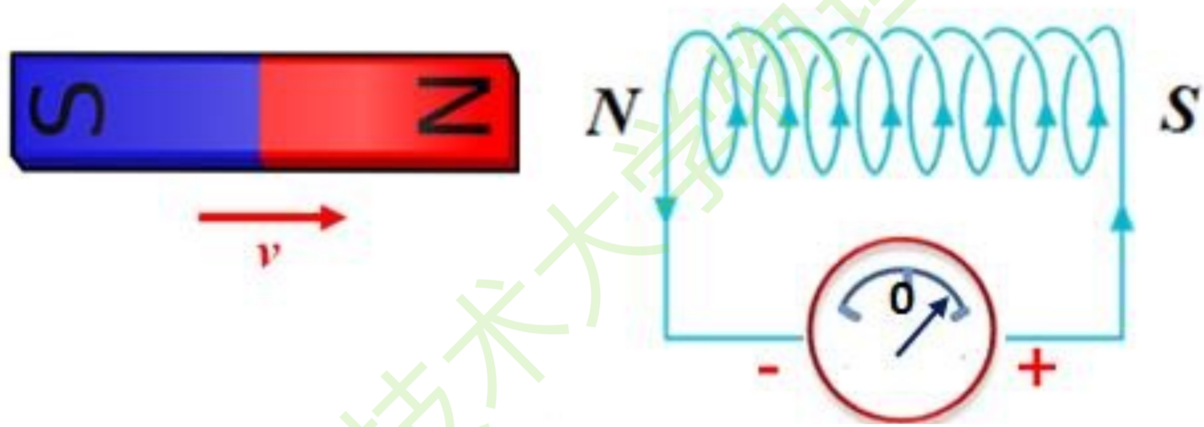
$$\mathcal{E}_{BA} = 0,\quad \mathcal{E}_{AC} = \mathcal{E}_{CB} = \frac{\mathcal{E}_{ACBA}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}B\omega a^2\sin\omega t$$

$$U_{BA} = \frac{1}{3}IR = \frac{1}{3}(\mathcal{E}_{AC} + \mathcal{E}_{CB}) = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{8}B\omega a^2\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{12}B\omega a^2\sin\omega t$$

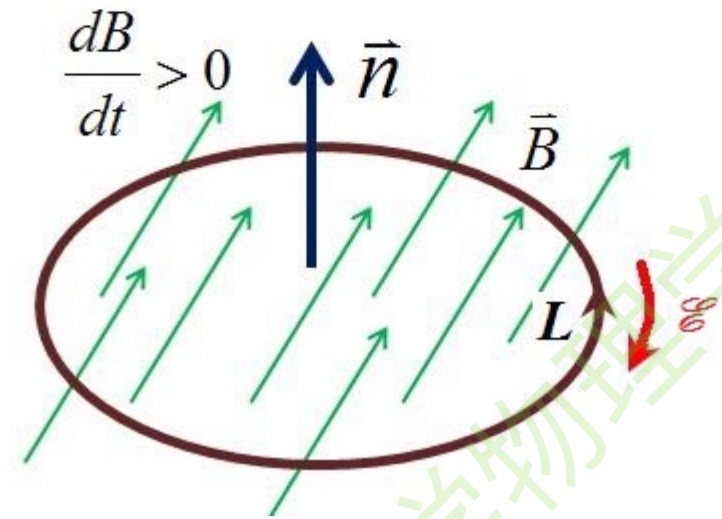
$$U_{AC} = U_{CB} = -\mathcal{E}_{AC} + \frac{1}{3}IR = -\frac{1}{3}\mathcal{E}_{AC} = -\frac{\sqrt{3}}{24}B\omega a^2\sin\omega t$$

§ 6.2.2 感生电动势

导体不动，由磁场随时间的变化而产生的电动势，称为感生电动势



磁场的变化 → 磁通量的变化 → 感生电动势



$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

电动势的产生意味着回路中有非静电力。

动生电动势的非静电力是洛伦兹力，那感生电动势的非静电力是什么呢？

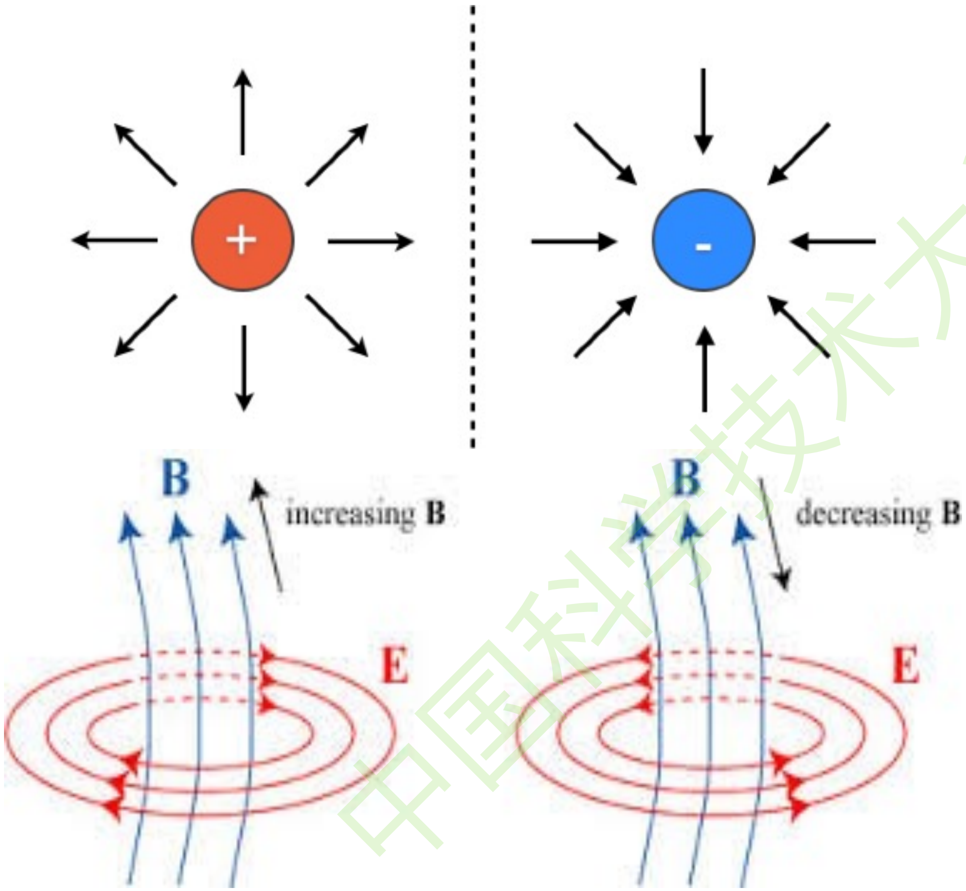
也是洛伦兹力吗？导体没有运动，洛伦兹力与载流子定向运动速度垂直，无法提供驱动电荷定向运动的非静电力。

只有电磁场的存在，不是磁场力的话，只有可能是电场力。

麦克斯韦在分析电磁感应现象的基础上，提出了一个大胆的假设：

变化的磁场在其周围空间激发出一种新的电场，称为涡旋电场。

产生感生电动势的非静电力就是这个涡旋电场提供的。



静电场：

由电荷产生，电力线不闭合。

$$\boxed{\oint \vec{E}_{\text{静}} \cdot d\vec{l} = 0}$$

涡旋电场：

变化的磁场产生，电力线闭合。

$$\boxed{\oint \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} \neq 0}$$

单位电荷的带电粒子在涡旋电场中运动一周，电场力做正功。

根据电动势的定义，有：

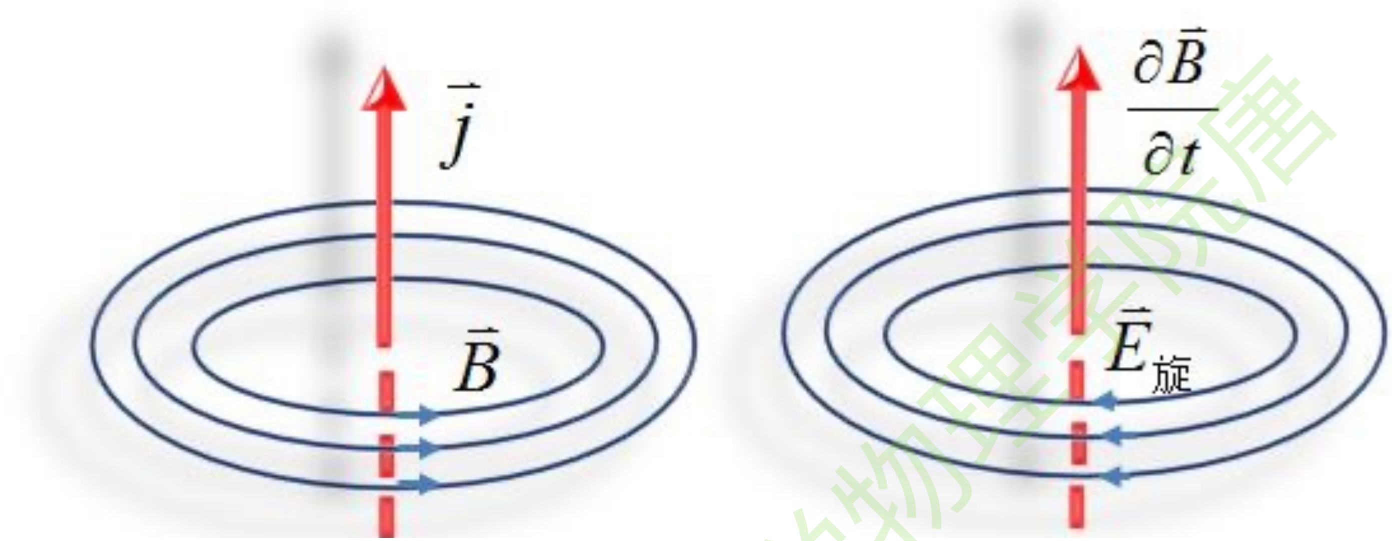
$$\boxed{\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l}}$$

根据感应定律，有：

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}}$$

可得涡旋电场与磁场变化率的关系：

$$\boxed{\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}}$$



$$\varepsilon = \oint \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

积分形式

$$\oint \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\nabla \times \vec{E}_{旋}\right) \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{E}_{旋} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

微分形式

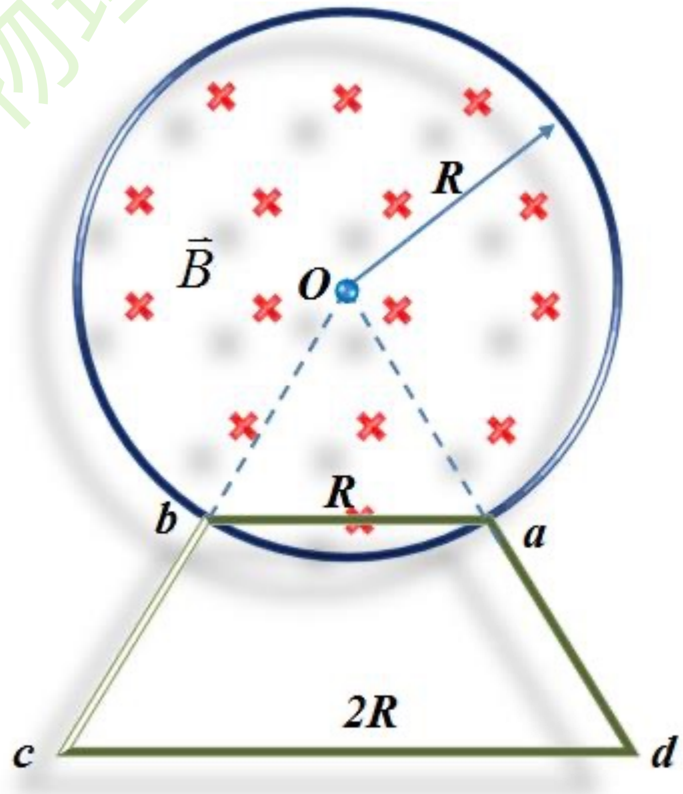
【例】在半径为R的无限长圆柱形空间内有均匀的磁场B以恒定的变化率$dB/dt = k$ ($k>0$)变化，有一内阻可忽略的等腰梯形导线框$abcd$，a、b两点位于圆柱面上，且有$cd = 2ab = 2R$，bc和ad边延长线过圆心O，求导线框中的感应电动势。

【解】先求涡旋电场分布，成圆环状

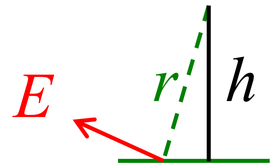
取顺时针方向为正向，根据

$$\oint \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} = -\iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$E = \begin{cases} -\dfrac{rk}{2}, & r < R \\ -\dfrac{R^2 k}{2r}, & r > R \end{cases}$$



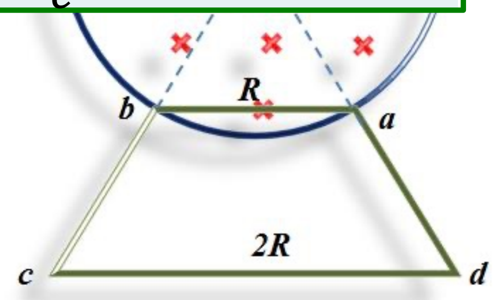
导线ba段的动电动势为



$$\mathcal{E}_{ba}=\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_b^a -\frac{rk}{2}\cos\theta\, dl=\frac{k}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}R\int_b^a dl=\frac{\sqrt{3}}{4}kR^2$$

导线cd段的电动势为 $l=h\tan\theta$ $dl=h/\cos^2\theta$ $r=h/\cos\theta$

$$\mathcal{E}_{cd}=\int_c^d \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_c^d -\frac{R^2k}{2r}dl\cos\theta=\frac{R^2k}{2}\int_c^d d\theta=\frac{\pi}{6}kR^2$$



导线ad段和cb与涡旋电场垂直，电动势为零

回路中的总的感应电动势为

$$\mathcal{E}_{badcb}=\mathcal{E}_{ba}+\mathcal{E}_{dc}=\mathcal{E}_{ba}-\mathcal{E}_{cd}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}\right)kR^2$$

【解II】 取Oab回路

$$\Phi_{Oab}=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2B$$

$$\mathcal{E}_{OabO}=-\frac{d\Phi_{Oab}}{dt}=-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2k$$

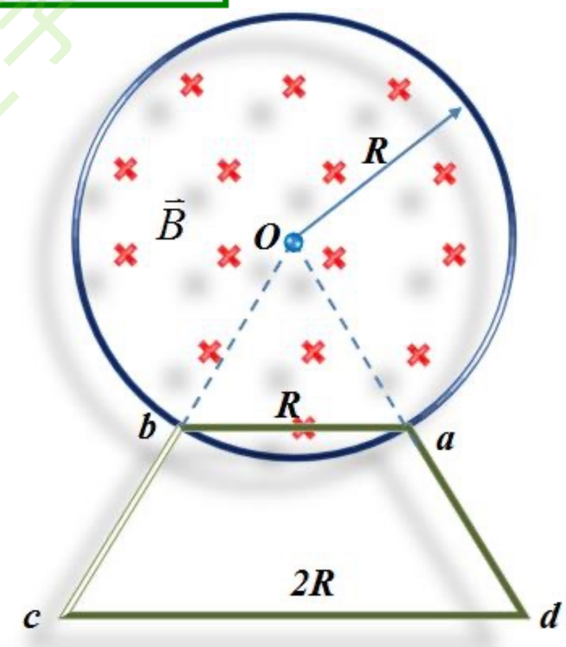
Oa与Ob段与涡旋电场垂直，无电动势

$$\mathcal{E}_{ab}=\mathcal{E}_{OabO}=-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2k$$

同法，取Odc回路

$$\mathcal{E}_{OdcO}=-\frac{d\Phi_{Odc}}{dt}=-\frac{1}{6}\pi R^2k$$

$$\mathcal{E}_{dc}=\mathcal{E}_{OdcO}=-\frac{\pi}{6}R^2k$$

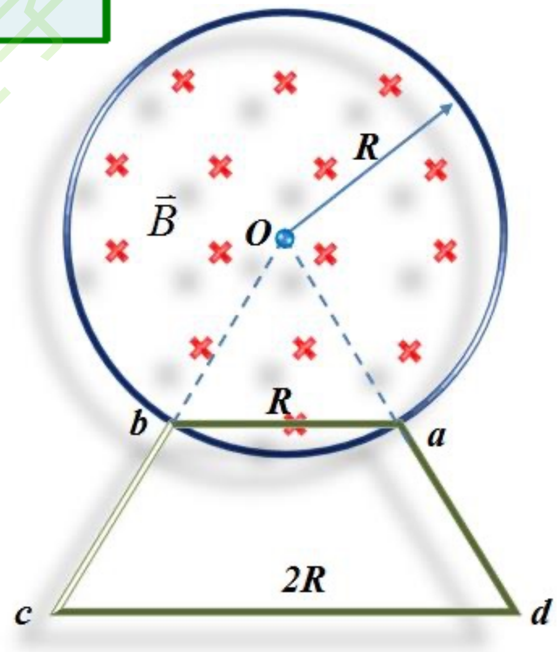


$$\mathcal{E}_{badcb}=\mathcal{E}_{ba}+\mathcal{E}_{dc}=-\mathcal{E}_{ab}-\mathcal{E}_{cd}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}\right)kR^2$$

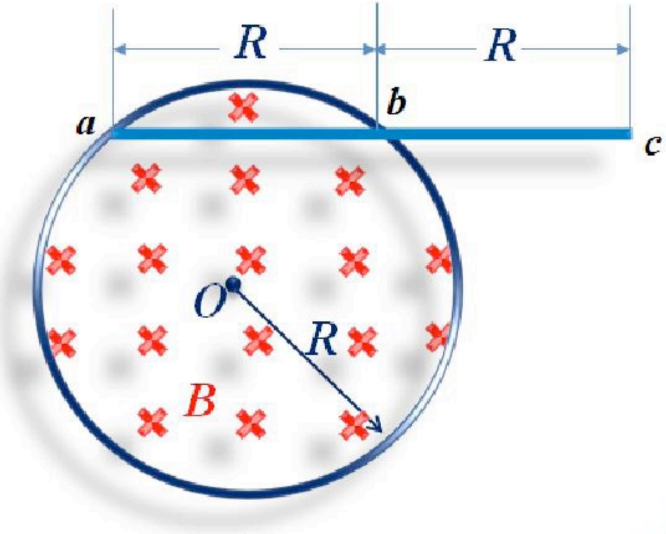
【解III】取$badc$回路

$$\Phi_{badc}=B\left(\frac{1}{6}\pi R^2-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right)=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)BR^2$$

$$\mathcal{E}_{badcb}=-\frac{d\Phi_{\mathrm{Oab}}}{dt}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}\right)kR^2$$

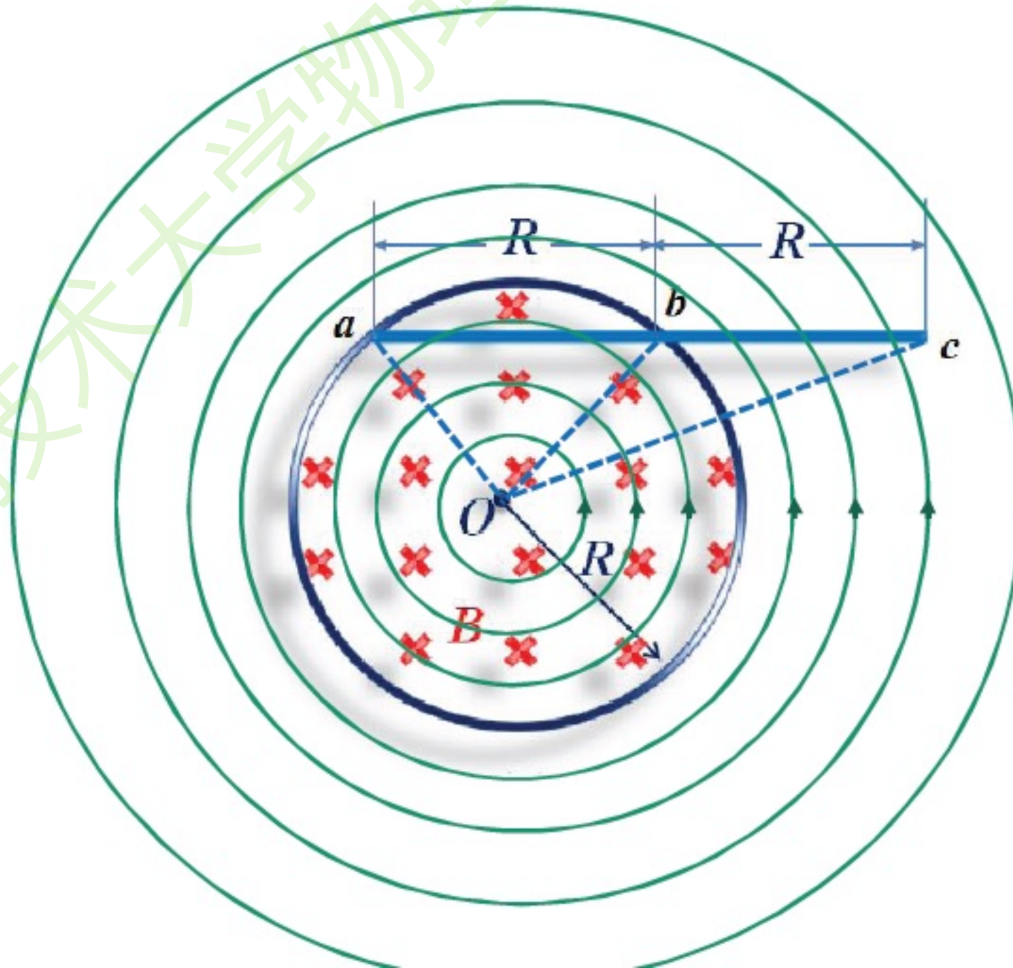


【例】

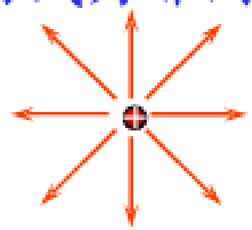
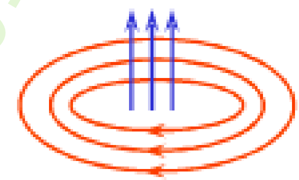


$$\boxed{B = kt}$$

求ac之间的电位差



涡旋电场与静电场的比较

	静电场 $\vec{E}$	感生电场 $\vec{E}_{感}$
起源	由静止电荷激发	由变化的磁场激发
电力线形状	电力线为非闭合曲线  静电场为无旋场	电力线为闭合曲线 $\vec{E}_{感}$  $\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}>0$ 感生电场为有旋场
电场的性质	为保守场作功与路径无关 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$	为非保守场作功与路径有关 $\varepsilon_i=\oint \vec{E}_{感}\cdot d\vec{l}=-\frac{d\phi_m}{dt}$
	静电场为有源场 $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\sum q}{\varepsilon_0}$	感生电场为无源场 $\oint_S \vec{E}_{感}\cdot d\vec{S}=0$

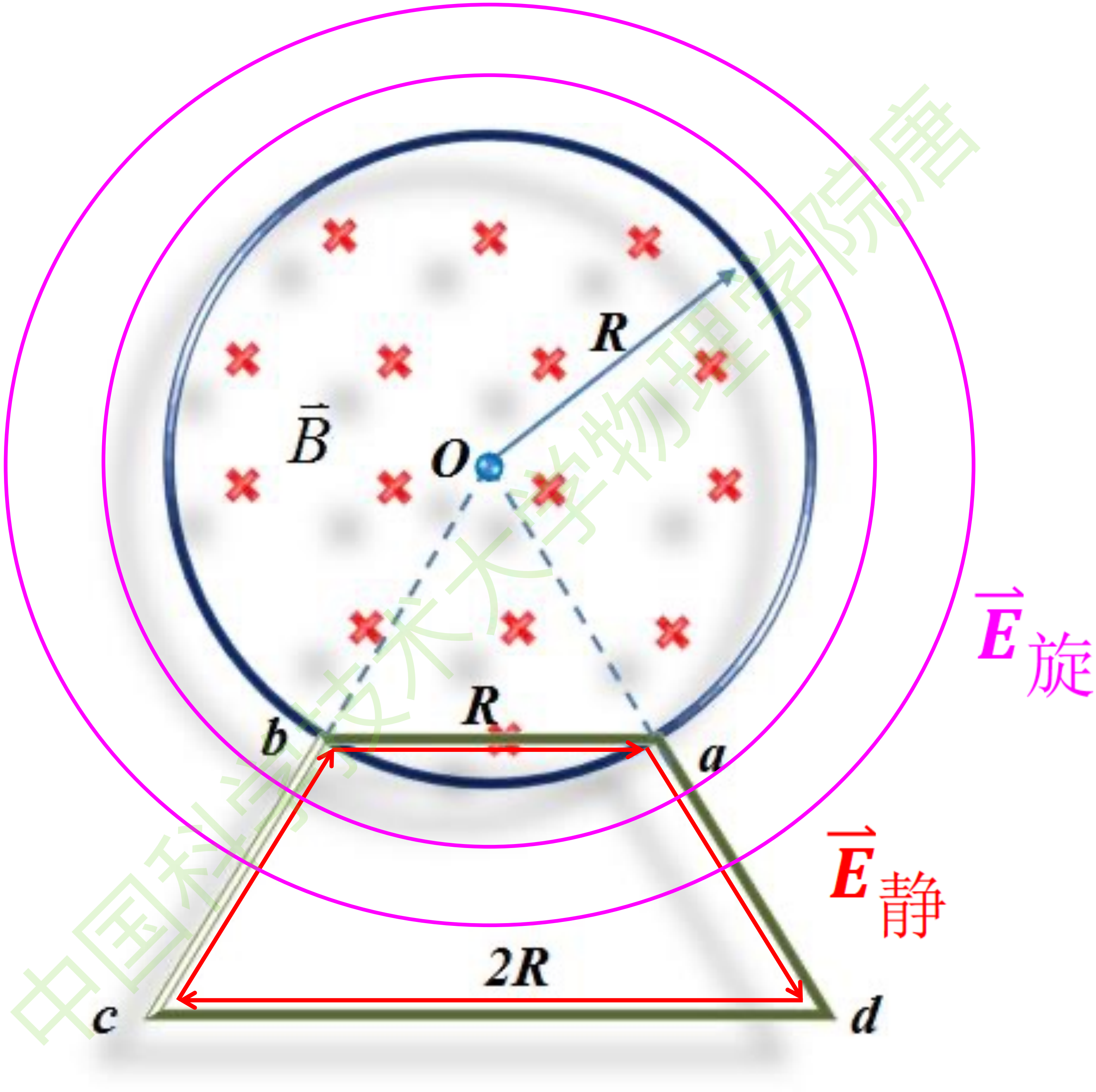
再论电场的高斯定理和环路定理

涡旋电场存在时的总电场 $\vec{E} = \vec{E}_{静} + \vec{E}_{旋}$

有源无旋 + 无源有旋 = 有源有旋

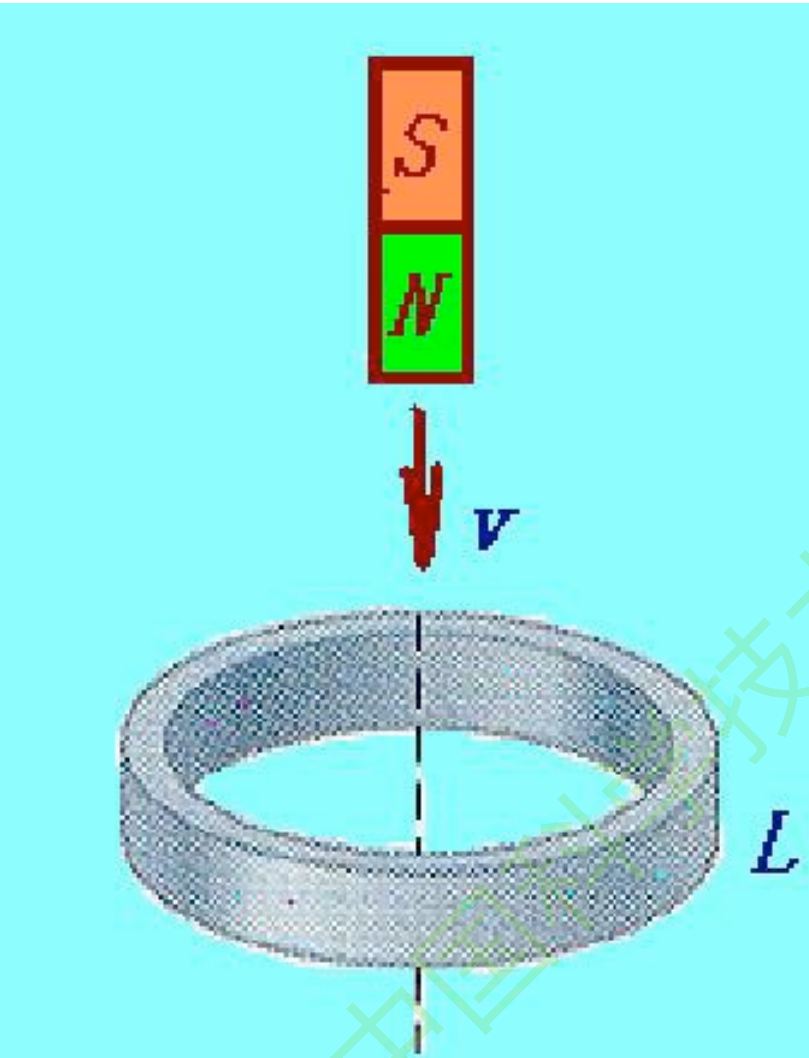
高斯定理：$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$　　$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$

环路定理：$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$　　$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$



$\vec{B}$
O
R
R
b
a
2R
c
d
$\vec{E}$旋
$\vec{E}$静

电磁感应与相对性原理



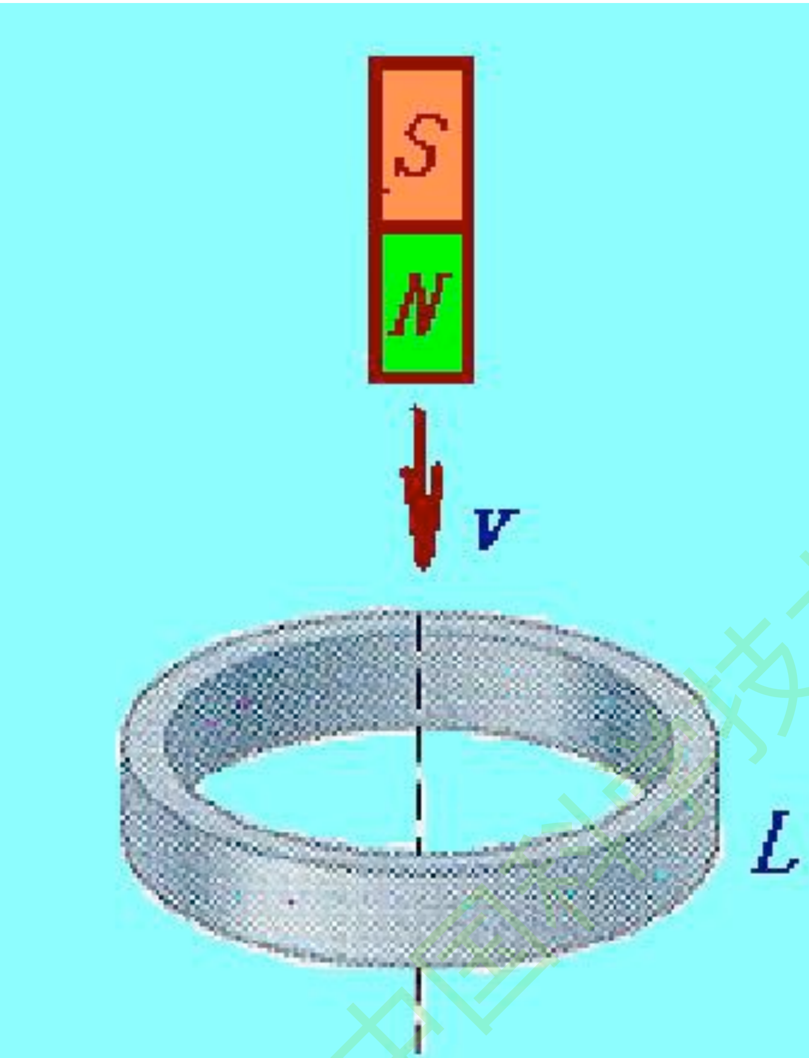
从相对线圈静止的坐标系看，线圈不变，磁场在变，产生感生电动势，非静电力是涡旋电场力。

从相对磁铁静止的坐标系看，线圈在切割磁力线，产生动生电动势，非静电力是洛伦兹力。

从其他坐标系看，线圈在动，磁场也在变，既有感生电动势，也有动生电动势。

- 感生、动生与参考系有关
- 电场与磁场是相对的

再论洛伦兹力不做功



从相对磁铁静止的坐标系看，线圈在切割磁力线，产生动生电动势，非静电力是洛伦兹力。

但从线圈里的载流子看来，它是静止的，它周围的磁场随着时间在变化，激发出涡旋电场，使得它感受到了电场力，驱使它定向运动，产生电动势。

作业

- 6.5
- 6.7
- 6.9
- 6.15