

第6章 电磁感应与磁场的能量

§ 6.1 电磁感应定律

§ 6.2 动生电动势与感生电动势

§ 6.3 互感与自感

§ 6.4 似稳电路与暂态过程

§ 6.5 磁场的能量

§ 6.1 电磁感应定律

M. Faraday
1791-1867



法拉第电磁感应定律：

当通过导体回路的**磁通量发生改变**时，回路中就有**感应电动势**的产生，进而产生感应电流。

感应电动势的大小：

与磁通量变化的快慢有关

或者说与磁通量随时间的变化率有关

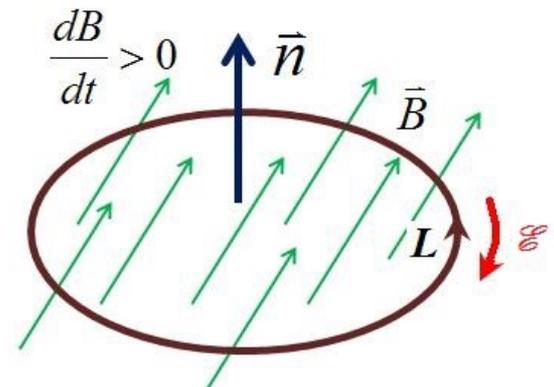
$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

感应电动势的方向：

总是企图由它产生的感应电流建立一个附加磁通量，阻碍磁通量的变化。（“楞次定律”）

回路的绕行方向为感应电动势参考方向

- \mathcal{E} 为**正**，代表与绕行方向**相同**
- \mathcal{E} 为**负**，代表与绕行方向**相反**

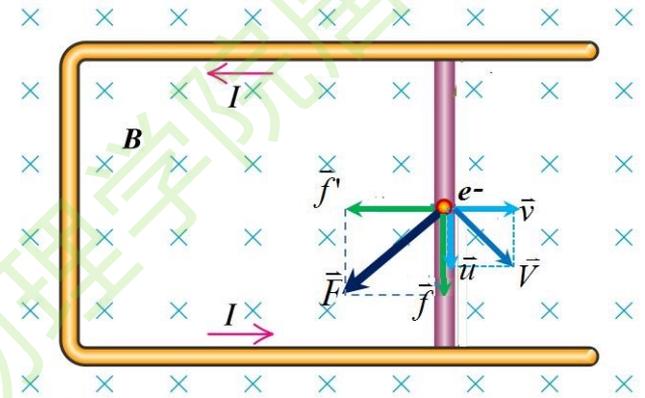


§ 6.2 动生电动势与感生电动势

动生电动势:

$$\mathcal{E} = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

非静电力: 洛伦兹力

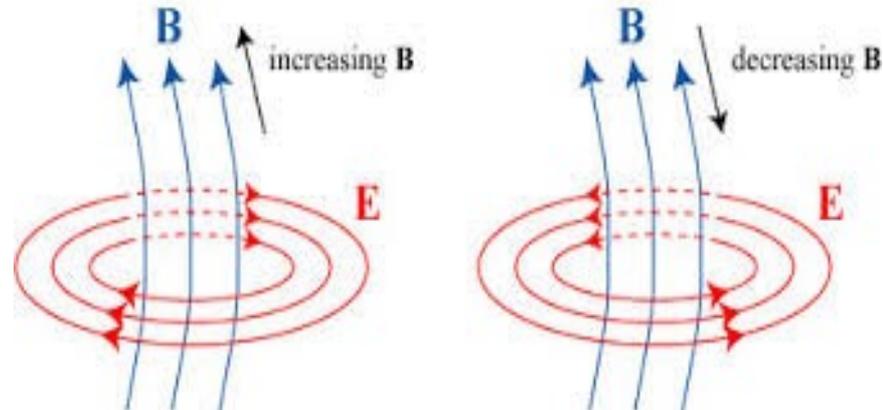


感生电动势:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{E}_{\text{旋}} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

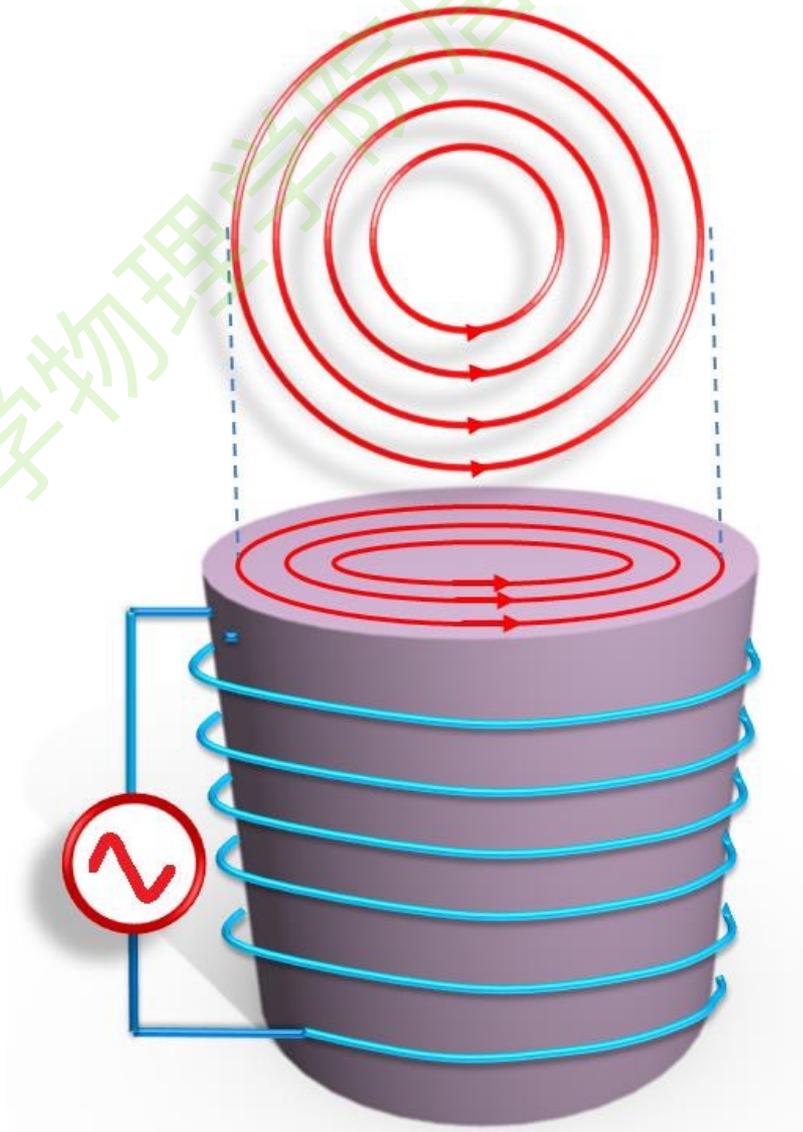
非静电力: 涡旋电场



§ 6.2.4 涡电流和趋肤效应

1851年，傅科(Leon Foucault)发现金属块处在变化的电磁场中或相对磁场运动时，在他们内部会产生感应电流。

电流线成闭合的涡旋状，因此称为涡电流，简称涡流 (eddy current)



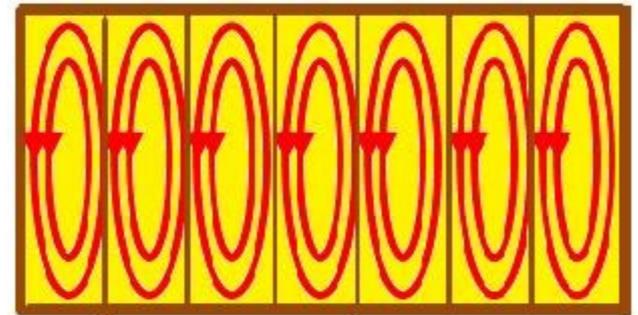
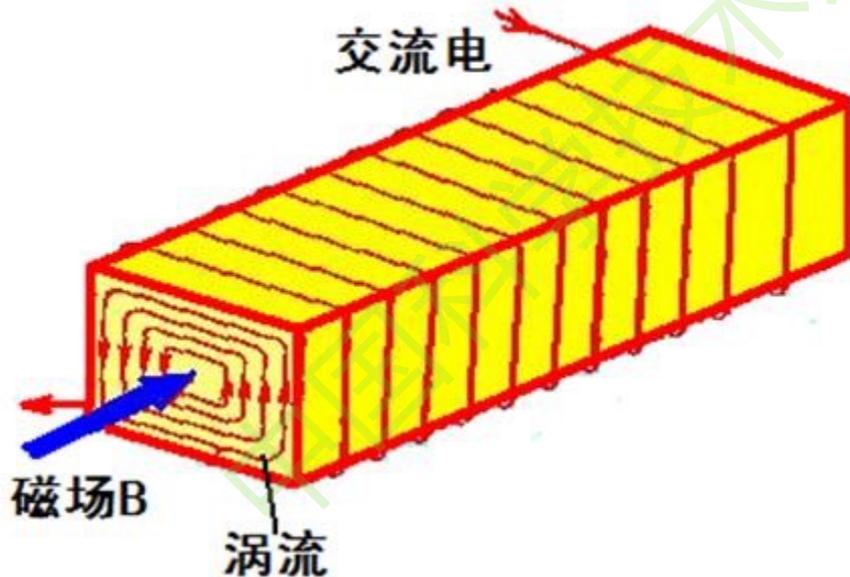
减少涡流的方法： 增加电阻

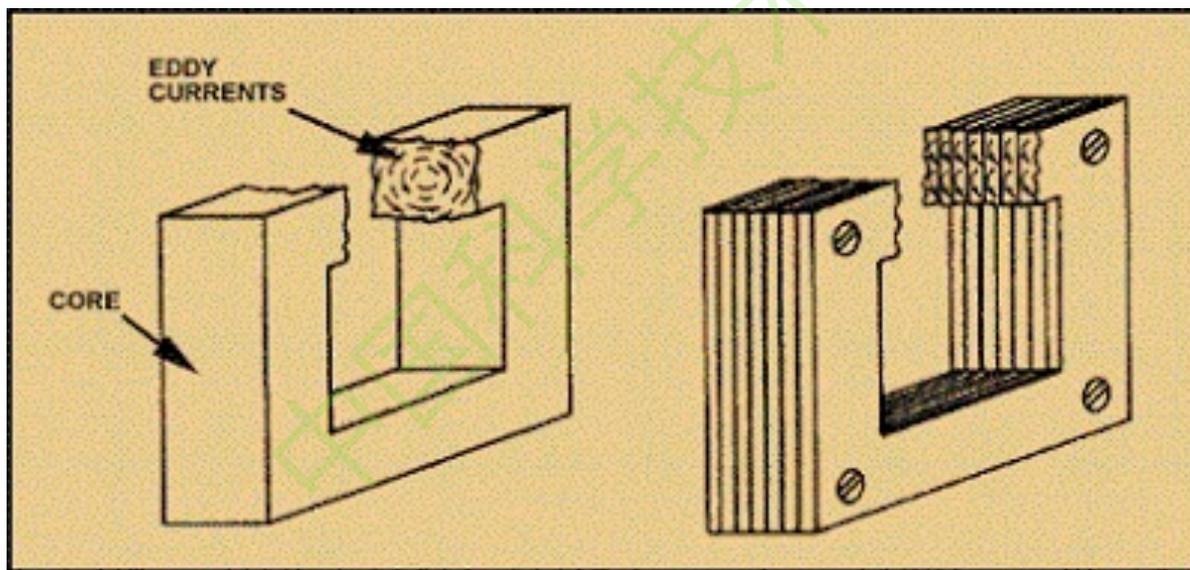
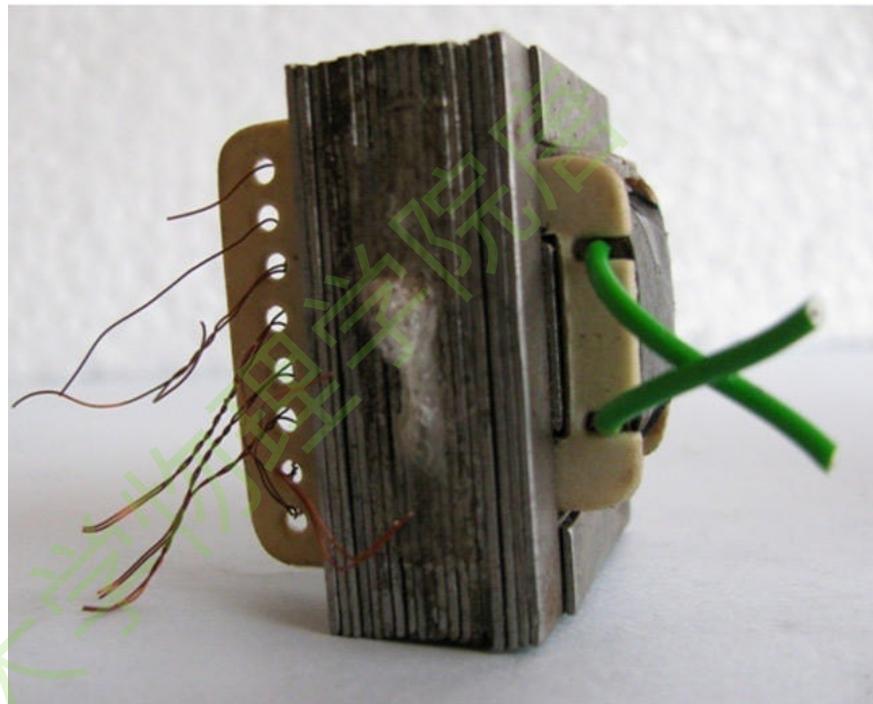
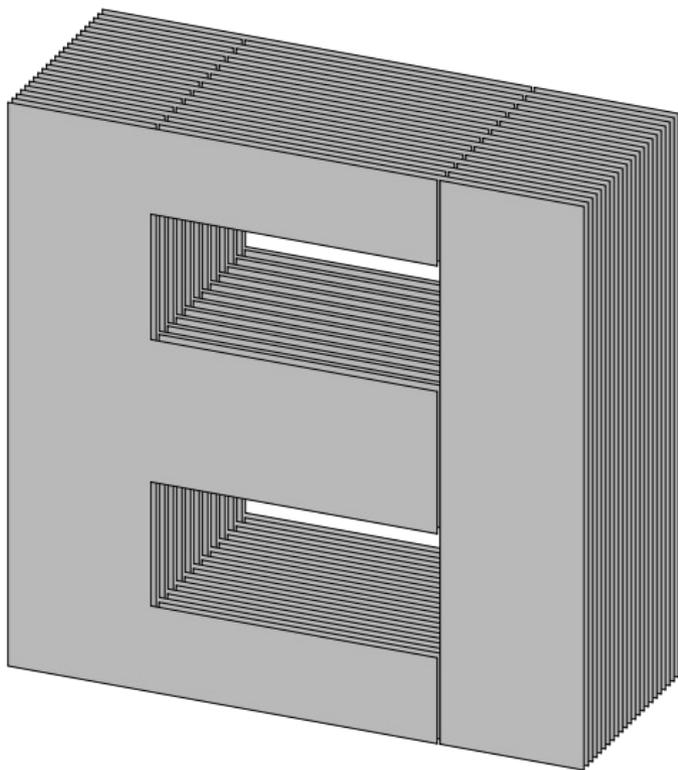
1. 高电阻材料。

如硅钢，在钢中增加硅的含量以增加电阻率

2. 多层相互绝缘的硅片叠加而成。

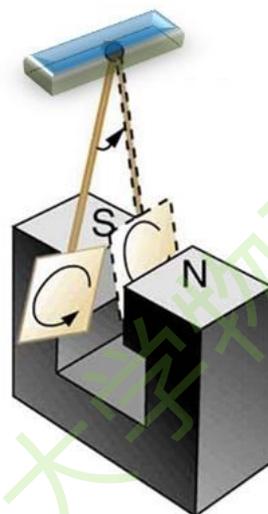
减小涡电流的导体截面积。



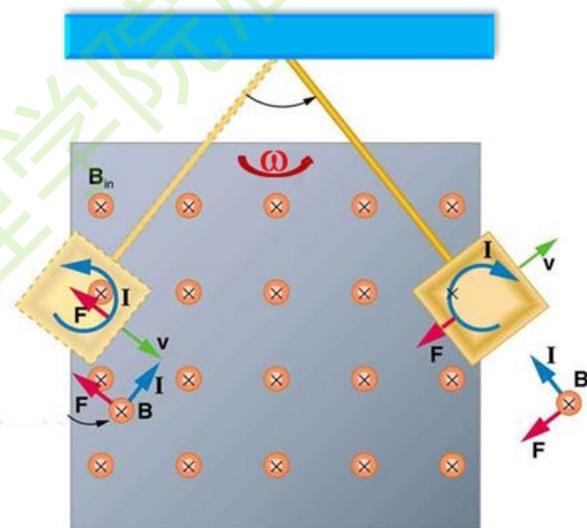


变压器铁芯

电磁阻尼



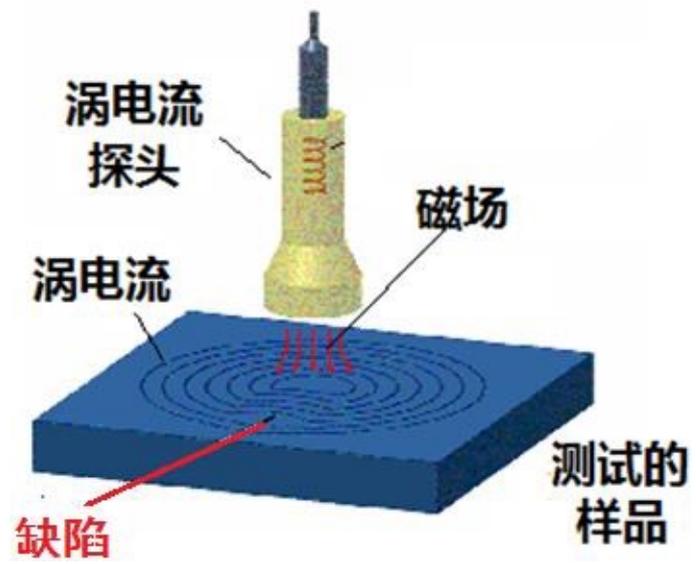
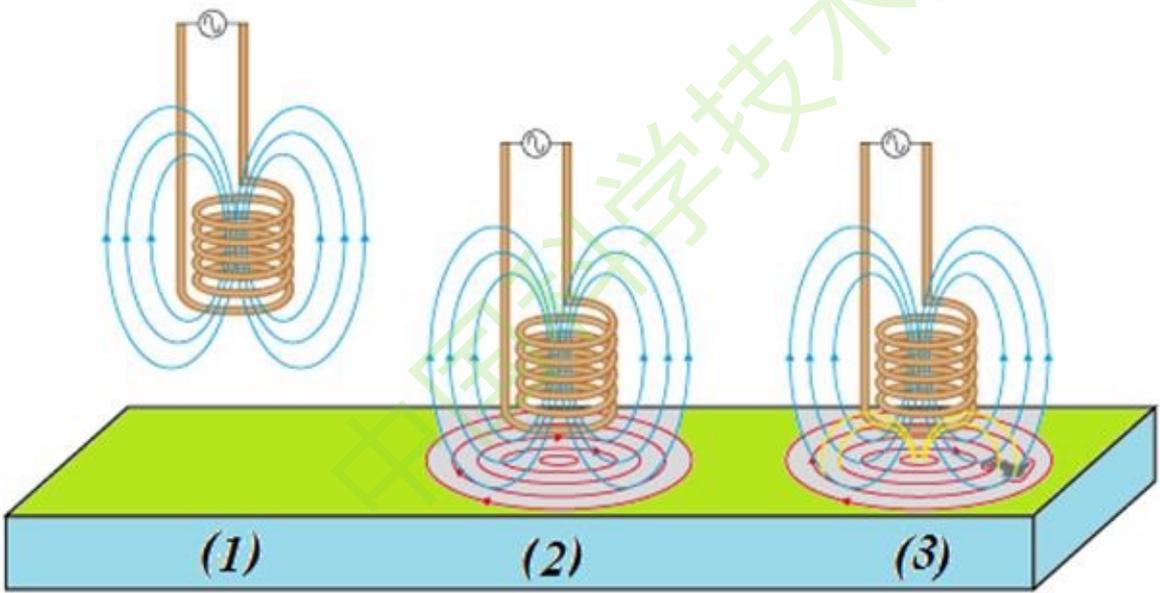
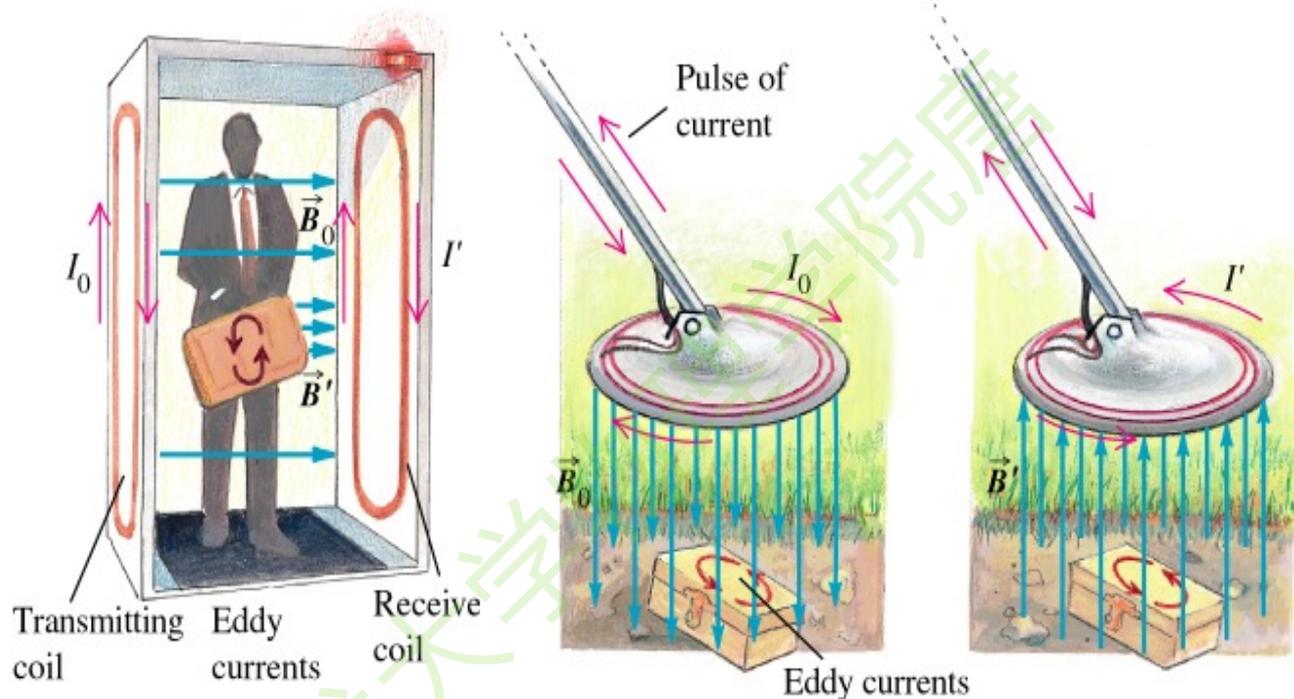
(a)



(b)



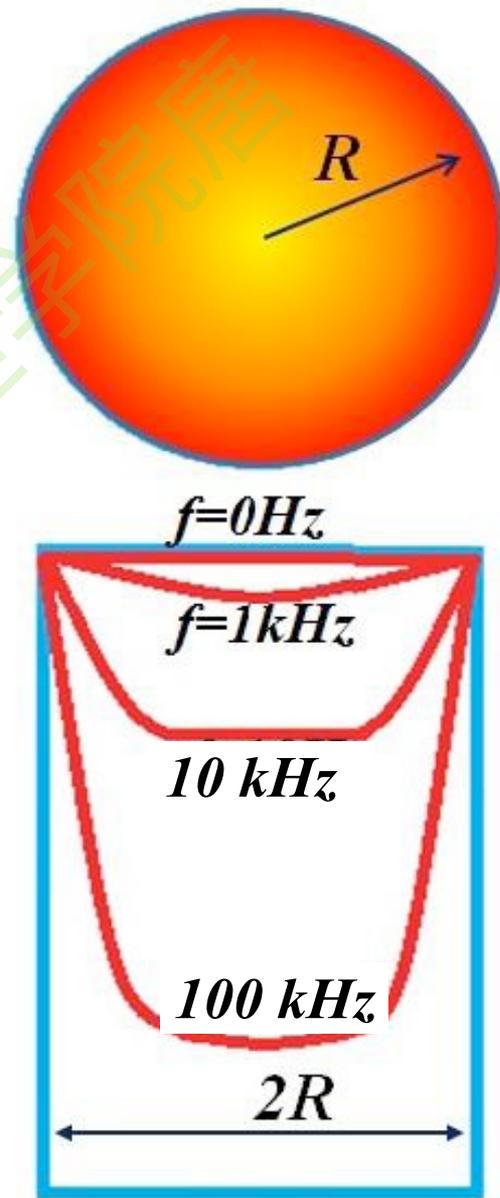
其他应用



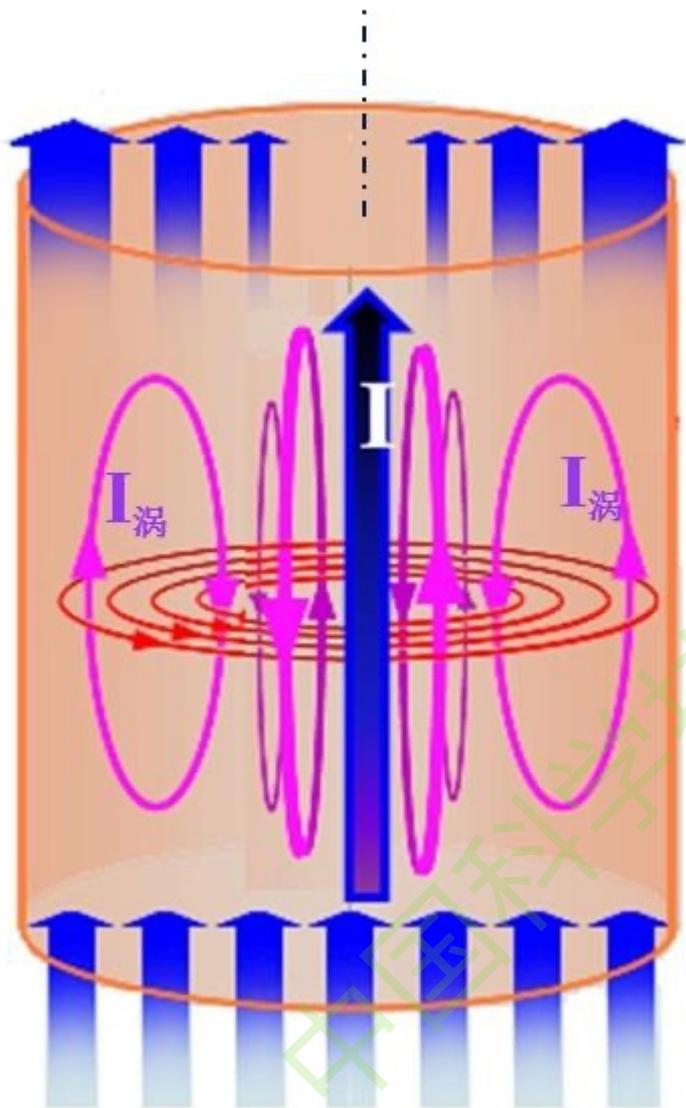
趋肤效应

当交变电流通过导体时，电流密度分布不均匀，越靠近导体表面电流密度越大。称为趋肤效应。

其结果使得导体有效截面减少，电阻增大。



趋肤效应的机制



$$j = j_0 e^{-d/d_s}$$

j_0 : 导线表面的电流密度

d : 从表面向轴向的深度

j : 导线内深度 d 处的电流密度

d_s : 趋肤深度

$$d_s = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \frac{503}{\sqrt{f\mu_r\sigma}}$$

$$e^{-0.1} = 90\%$$

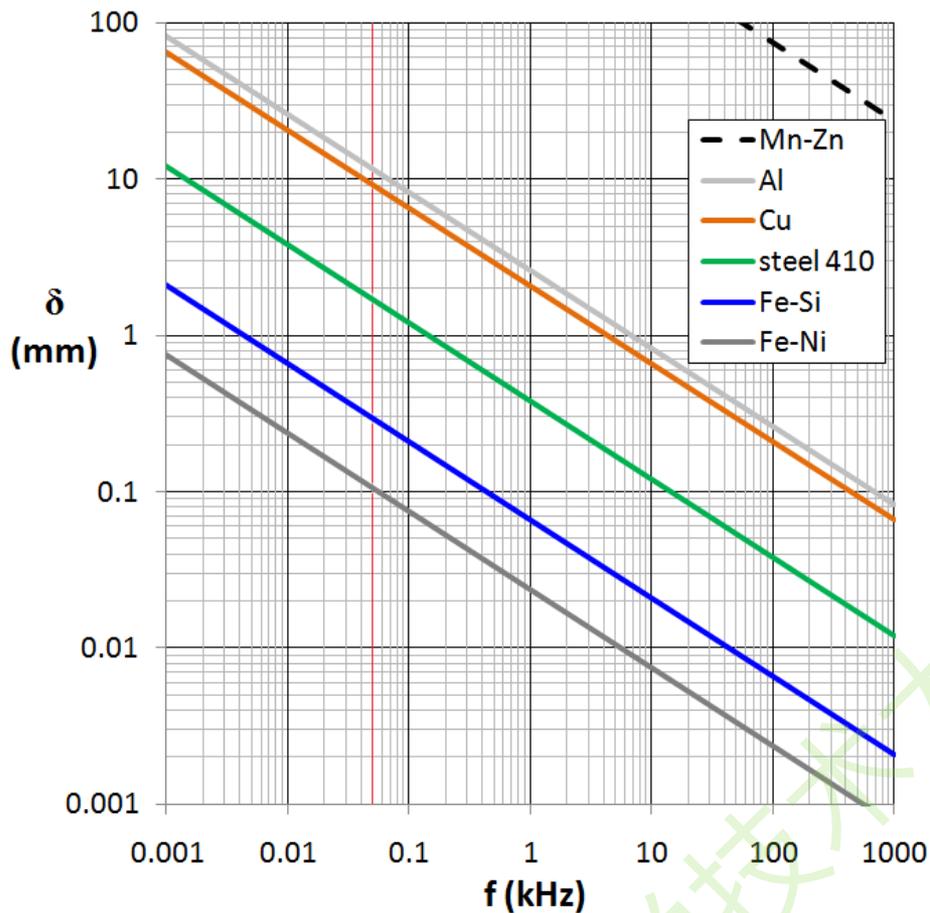
$$e^{-2} = 14\%$$

$$e^{-0.5} = 60\%$$

$$e^{-3} = 5\%$$

$$e^{-1} = 37\%$$

$$e^{-5} = 0.7\%$$



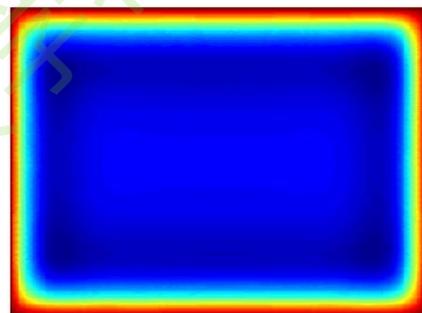
对于铜:

$f=50\text{ Hz}$, 趋肤深度 $\sim 9\text{ mm}$

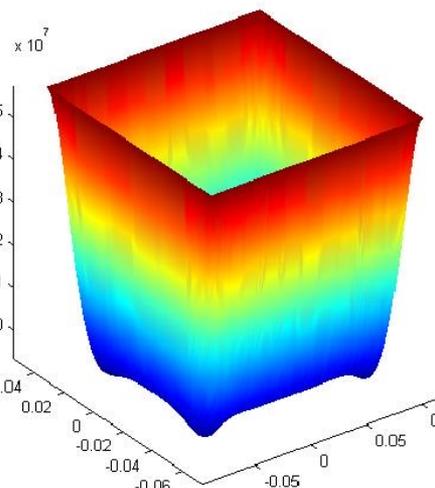
$f=1\text{ kHz}$, 趋肤深度 $\sim 2\text{ mm}$

$f=100\text{ kHz}$, 趋肤深度 $\sim 0.2\text{ mm}$

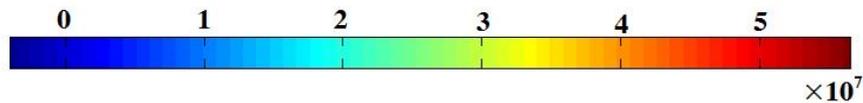
高频电流通过方形铜导体



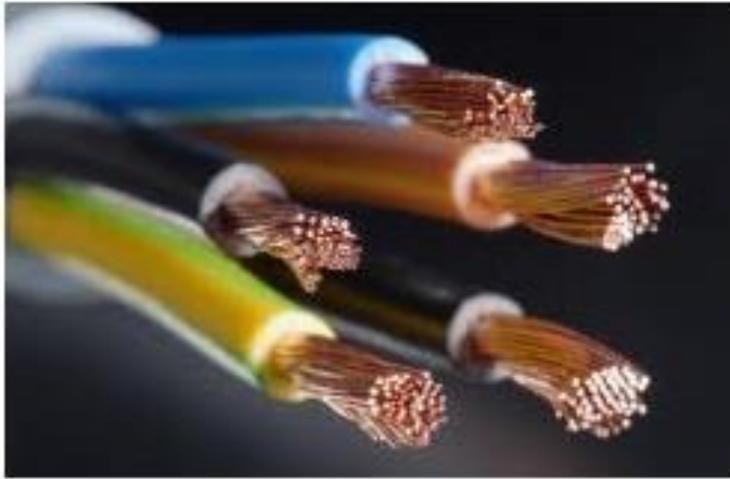
电流密度分布俯视图



电流密度分布侧视图



$$d_s = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \frac{503}{\sqrt{f\mu_r\sigma}}$$



为了减少趋肤效应的影响，高频电缆线通常有多股金属丝组成



趋肤效应的应用：
刀具等的表面淬火、焊接等

§ 6.3 自感与互感

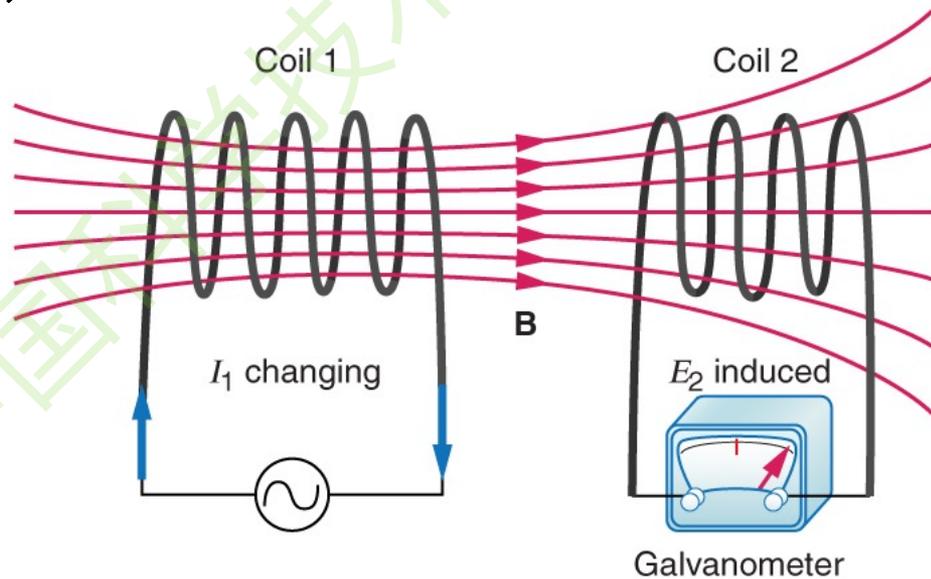


§ 6.3.1 互感与互感系数

当一个线圈流过电流时，会在空间中产生磁场，磁场中的另外一个线圈具有磁通量。

当初级线圈中的电流发生变化时，次级线圈中的磁通量也会发生改变，产生感应电动势。这种现象称为互感现象。

互感产生的电动势称为互感电动势。与初级线圈的电流变化快慢有关，也与两个线圈的结构及相对位置有关。



互感系数 (mutual inductance)

线圈1激发磁场在线圈2中的磁通量：

$$\Phi_{21} = M_{21} I_1$$

M_{21} 只与两个线圈的结构和相对位置有关

同理有：

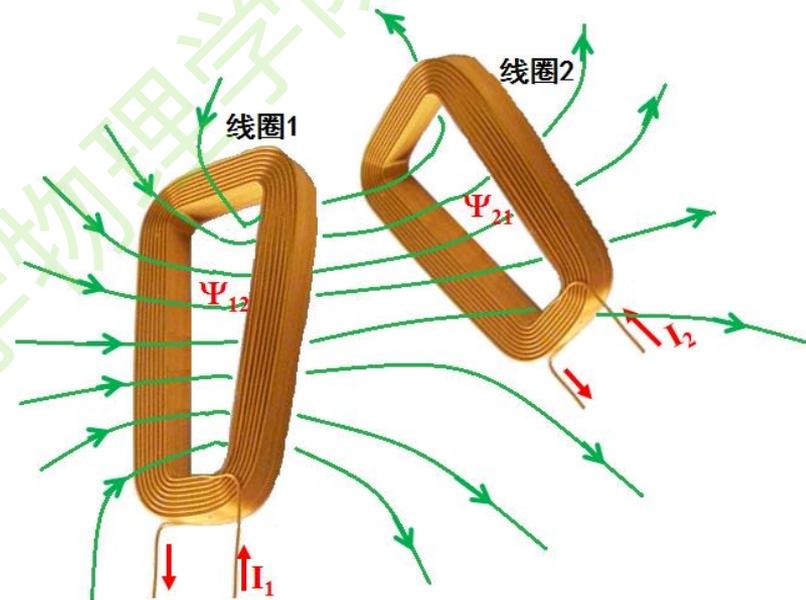
$$\Phi_{12} = M_{12} I_2$$

可以证明：

$$M_{21} = M_{12} = M$$

称为互感系数，简称互感。

单位亨利 (H) $1H = 1Wb/A$



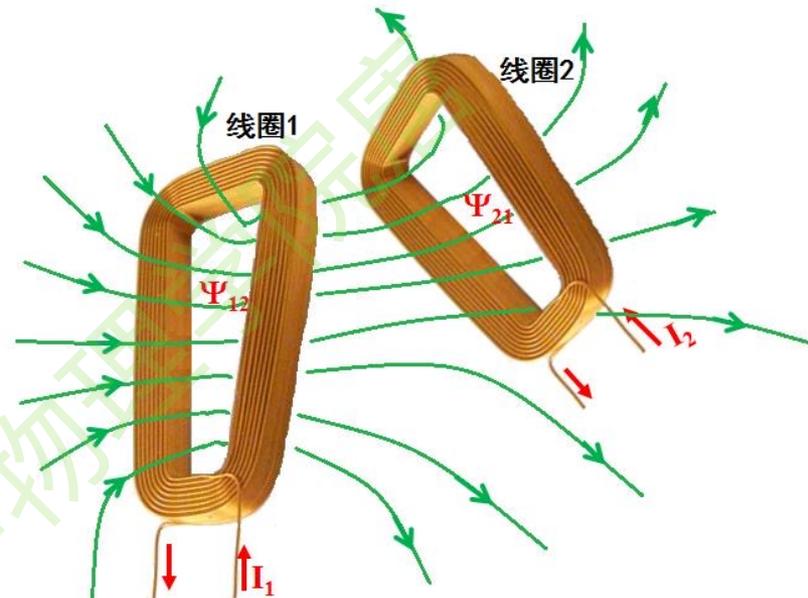
互感电动势

I_1 变化在线圈2中产生的电动势:

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

I_2 变化在线圈1中产生的电动势:

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt}$$



【例】两个同心共面线圈，半径分别为 a 、 b ， $a \ll b$ 。

(1) 求互感系数；

(2) 当 a 线圈流入电流 $I_a = I_0 \sin \omega t$ 求 b 线圈中的电动势。

【解】 (1) 求互感

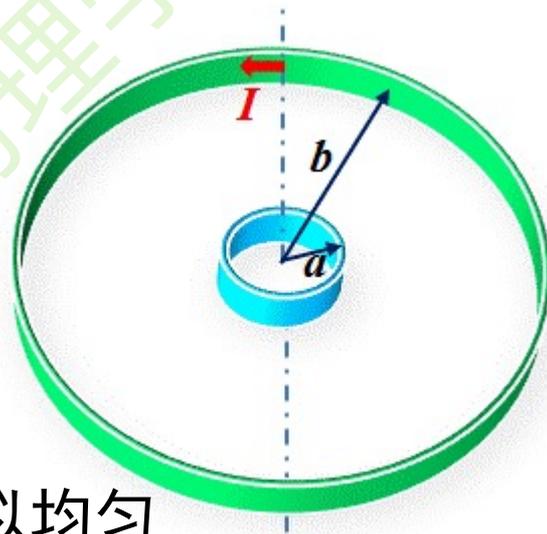
假定 b 线圈电流为 I ，圆心处

$$B = \frac{\mu_0 I}{2b}$$

由于 $a \ll b$ ， a 线圈中的磁感应强度近似均匀

$$\Phi_a = BS_a = \frac{\mu_0 I}{2b} \pi a^2$$

$$M = \frac{\Phi_a}{I} = \frac{\mu_0 \pi a^2}{2b}$$



(2) 求电动势

$$\begin{aligned}\varepsilon_b &= -M \frac{dI_a}{dt} \\ &= -\frac{\mu_0 \pi a^2}{2b} \frac{d}{dt} (I_0 \sin \omega t) \\ &= -\frac{\mu_0 \pi a^2}{2b} \omega I_0 \cos \omega t\end{aligned}$$

注意：互感系数的计算利用了互感系数的对称性。

先假定b中流入电流，通过计算a中的磁通量获得。

也可通过假定a中流入电流，通过计算a中的磁通量获得，但是计算复杂很多。

互感系数是由回路自身的几何特性和介质特性决定的。

互感系数的两种定义：

$$\begin{cases} M = \frac{\Phi}{I} \\ M = -\frac{\mathcal{E}}{dI/dt} \end{cases}$$

互感系数可正可负，取决于电流的取向。

思考： 如何使两线圈的互感最大？最小？
如何使两导线互感减小？

互感电动势会在线圈中产生感应电流，感应电流可以用来充电，**电能**→**磁能**→**电能**。

感应电流在磁场中会受力，也可将一个线圈的磁能转化为另一个线圈的机械能。

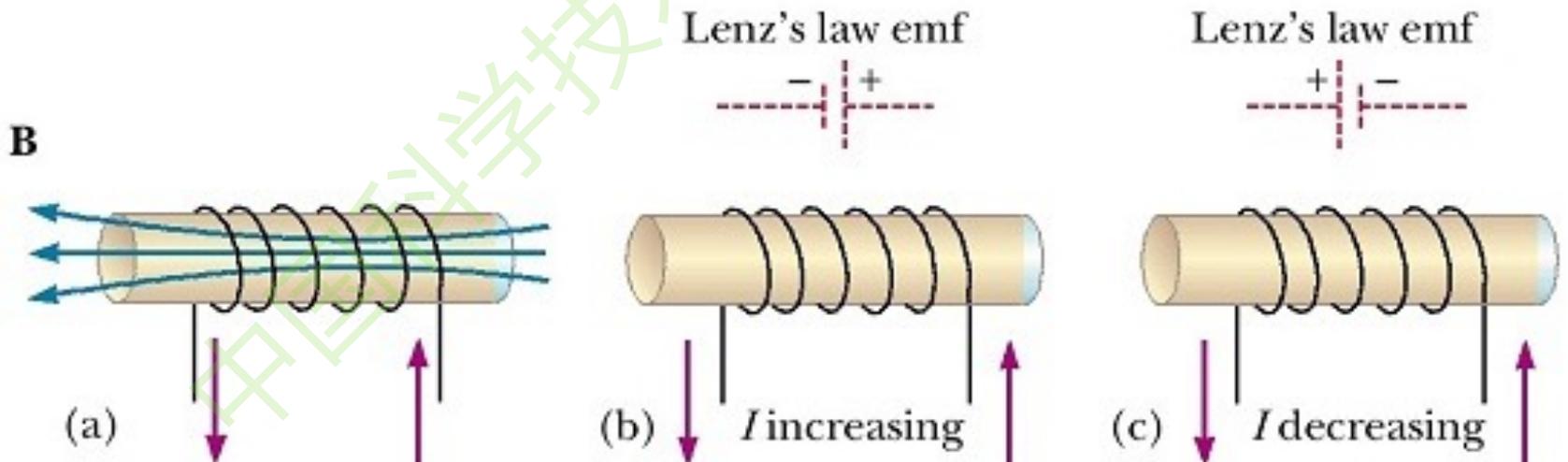


§ 6.3.2 自感与自感系数

当一个线圈流过电流时，会在空间中产生磁场，其**本身**也具有磁通量。

当线圈中的电流发生变化时，线圈本身的磁通量也会发生改变，产生感应电动势。这种现象称为**自感**现象。

自感产生的电动势称为**自感电动势**。根据楞次定律，自感电动势总是**阻碍**电流的变化（**电惯性**）。



自感系数(self-inductance)与自感电动势

$$\Phi = LI$$

L 为自感系数，简称自感。又称电磁惯量。

只与线圈回路几何形状和介质特性有关。单位与互感 M 相同。

自感系数恒为正。

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

理想螺线管的自感系数：

$$B = \mu_0 nI$$

$$\Phi = NBS$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = N\mu_0 nS = \mu_0 n^2 lS$$

【例】求高频近似下的单位长度同轴电缆的自感。

【解】在高频近似下，电流分布在实心导体外表面和导体壳的内表面

磁场分布在两个表面之间，磁感应强度

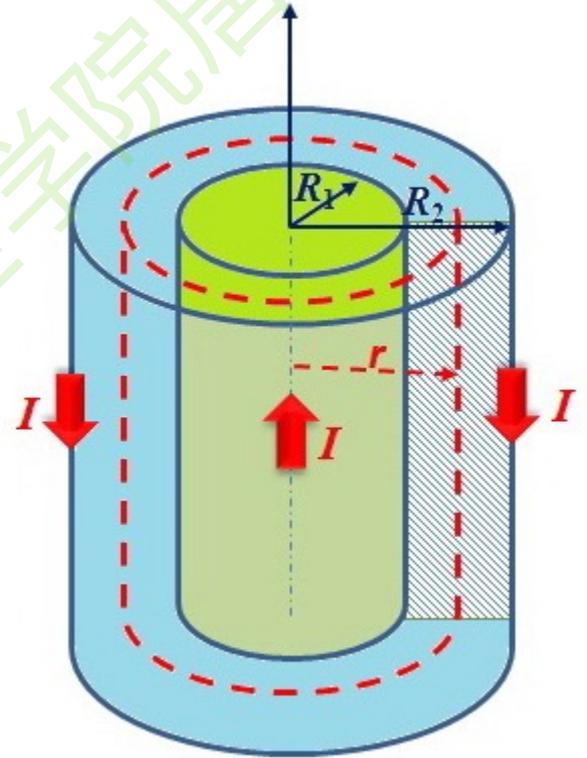
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

纵截面里的磁通：

$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$



同轴电缆单位长度的电容

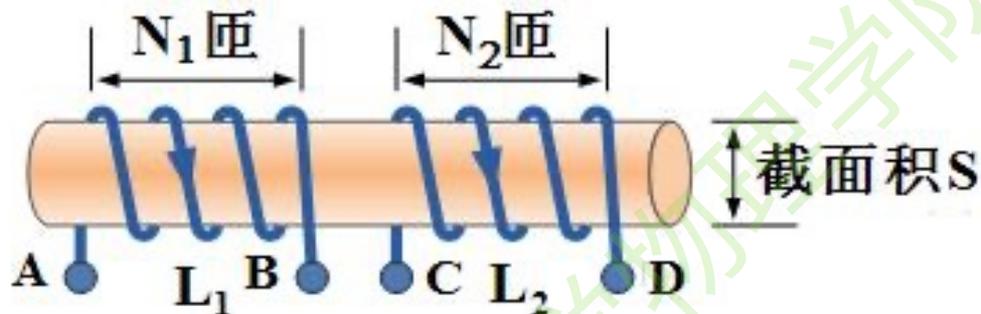
$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

同轴电缆特性阻抗

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

§ 6.3.3 自感系数与互感系数

两个线圈之间的互感和他们各自的自感存在关联



$$\Phi_{11} = L_1 I_1$$

$$\Phi_{22} = L_2 I_2$$

$$\Phi_{21} = M I_1$$

$$\Phi_{12} = M I_2$$

$$\frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}} = \frac{M}{L_1} \leq \frac{N_2}{N_1}$$

$$\frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}} = \frac{M}{L_2} \leq \frac{N_1}{N_2}$$

$$\frac{M^2}{L_1 L_2} \leq 1$$

无漏磁条件：两个线圈产生的磁感应线均穿过所有线匝。

无漏磁时，取等号：

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

一般地

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}, \quad k \leq 1$$

$$\begin{cases} k = 0, & \text{无耦合} \\ k = 1, & \text{理想耦合} \end{cases}$$

变压器的主副线圈之间一般存在很好的耦合， $k=0.98$

作业

- 6. 16
- 6. 24
- 6. 27
- 6. 28

中国科学技术大学物理学院唐