第6章 电磁感应与磁场的能量

§6.1 电磁感应定律

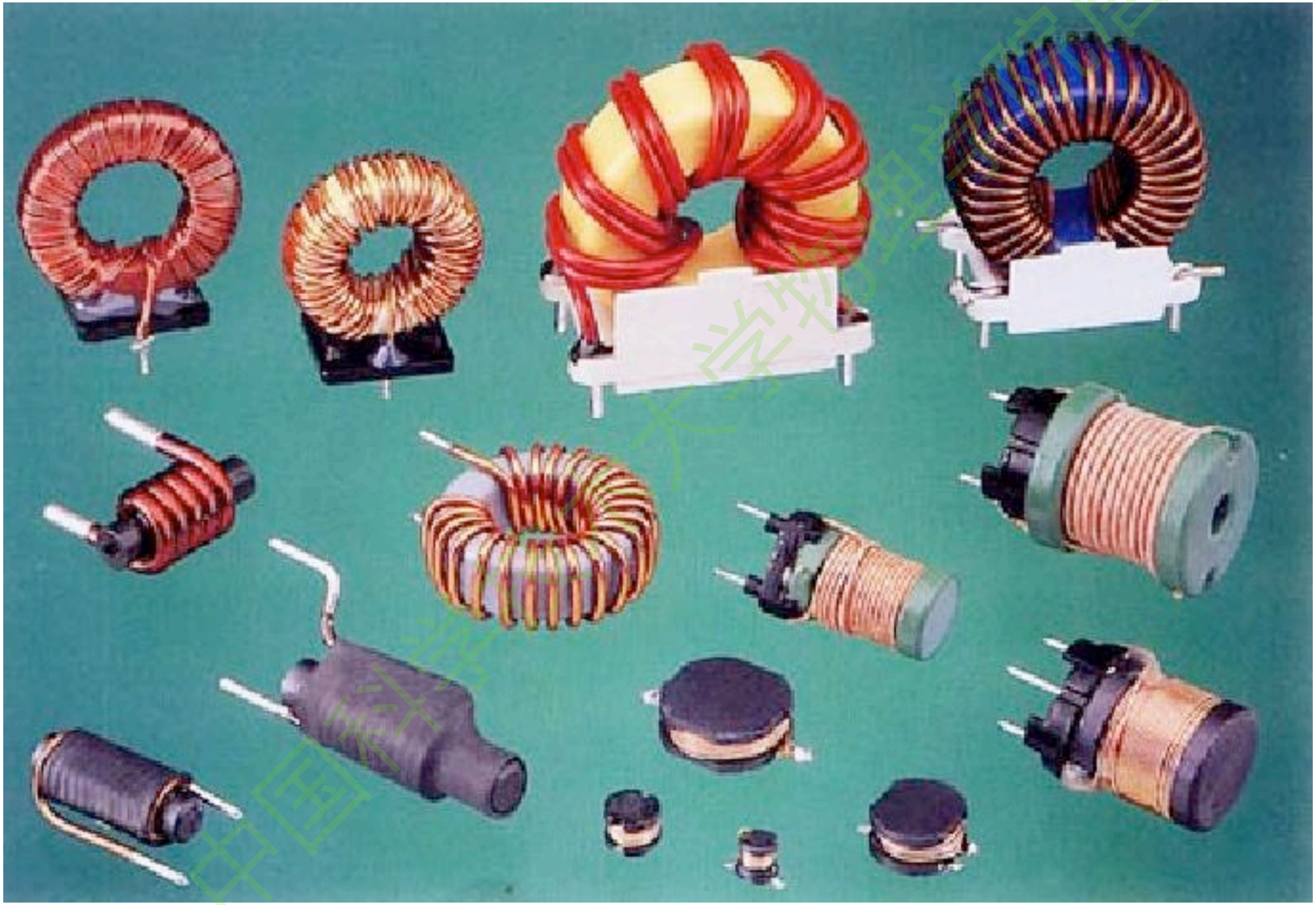
§6.2 动生电动势与感生电动势

§6.3 互感与自感

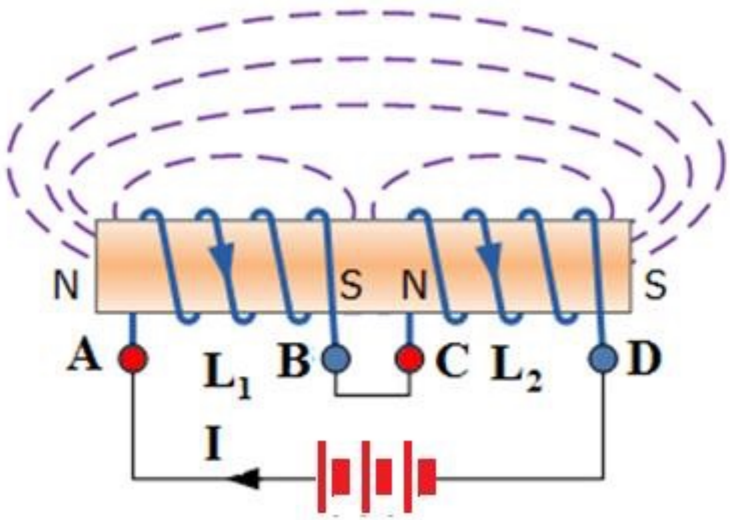
§6.4 似稳电路与暂态过程

§6.5 磁场的能量

§ 6.3.4 电感的串联与并联



串联



磁场加强，

A,C为同名端，

顺接

注意：定义了同名端与异名端以后，M总是大于0。同名端时互感取M，异名端时互感取-M

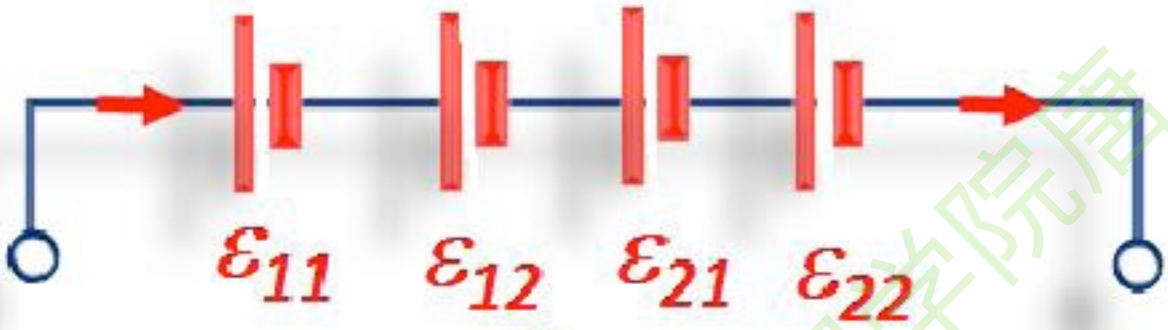
$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = L_1 I_1 + M I_2$$

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22} = M I_1 + L_2 I_2$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = LI$$

$$I = I_1 = I_2$$

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

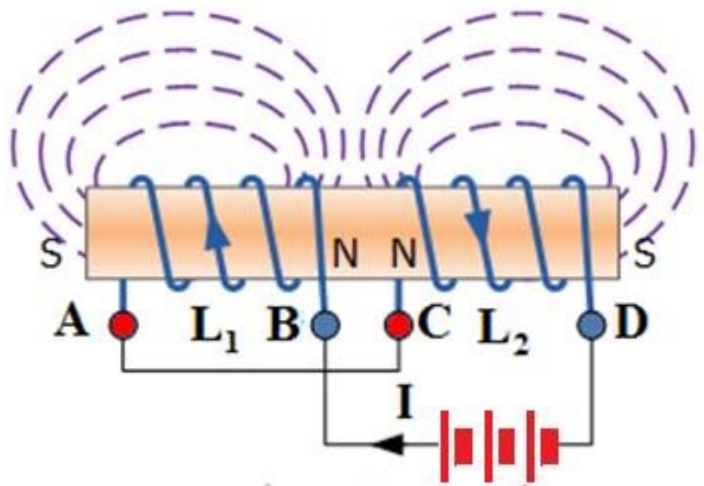


$$\frac{dI}{dt} > 0$$

$$L = -\frac{\mathcal{E}}{dI/dt}$$

$$= -\frac{\mathcal{E}_{11} + \mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{21} + \mathcal{E}_{21}}{dI/dt}$$

$$= L_1 + L_2 + 2M$$



磁场减弱，
A,C为同名端，
反接

沿着电流回路的方向取磁通量方向，两个线圈的参考方向相反。

$$\Phi_1 = \Phi_{11} - \Phi_{12} = L_1 I_1 - M I_2$$

$$\Phi_2 = -\Phi_{21} + \Phi_{22} = -M I_1 + L_2 I_2$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = LI$$

$$I = I_1 = I_2$$

$$L = L_1 + L_2 - 2M$$

总电感表达式与顺接一致，
只需要将互感M的符号取反。

- 可以通过分别测量顺接和反接情况下的自感来得到两个线圈的互感

$$\boxed{L_{\text{顺}} = L_1 + L_2 + 2M}$$

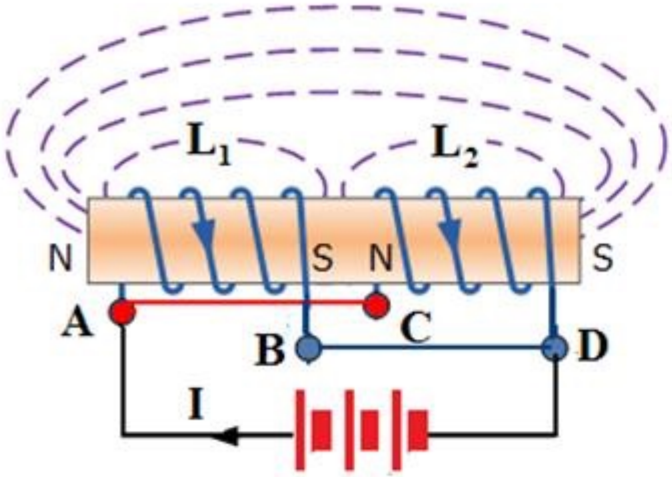
$$\boxed{L_{\text{反}} = L_1 + L_2 - 2M}$$

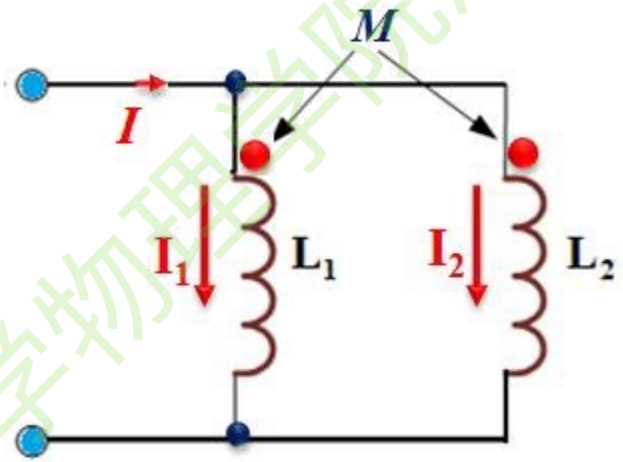
$$\boxed{M = \frac{L_{\text{顺}} - L_{\text{反}}}{4}}$$

反接的时候要小心，防止造成“短路”

并联

同名端并联





$$\mathcal{E}_1 = -\left(L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}\right)$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = -L \frac{dI}{dt}$$

$$\mathcal{E}_2 = -\left(L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}\right)$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$(L_1 - M)\frac{dI_1}{dt} + M\frac{dI}{dt} = L_2\frac{dI}{dt} + (M - L_2)\frac{dI_1}{dt}$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{L_2 - M}{L_1 + L_2 - 2M}\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \frac{L_1 - M}{L_1 + L_2 - 2M}\frac{dI}{dt}$$

$$\mathcal{E} = -\left(L_1\frac{dI_1}{dt} + M\frac{dI_2}{dt}\right) = -\frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}\frac{dI}{dt}$$

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$$

$$L = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

$$\frac{L_1 + L_2}{2} \geq \sqrt{L_1L_2} \geq M \quad \Rightarrow \quad L > 0$$

$L_1 = L_2 = L_0$时

$$\boxed{L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} = \frac{1}{2}(L_0 + M)}$$

理想耦合时： $\boxed{M = L_0}$

$$\boxed{L = L_0 = L_1 = L_2}$$

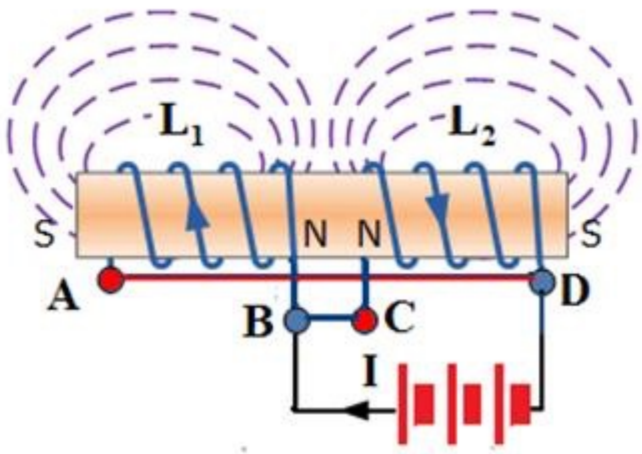
电感未变，
但电流小一半

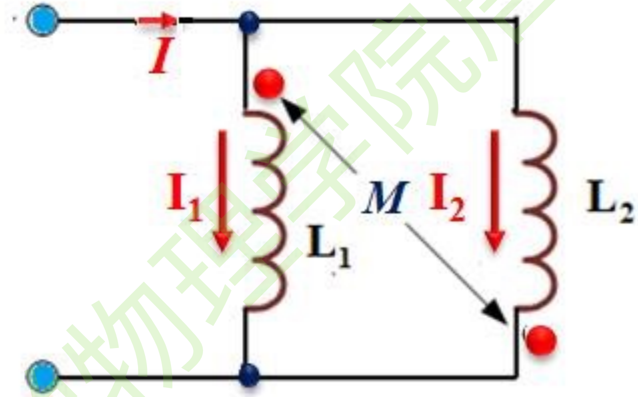
无耦合时： $\boxed{M = 0}$

$$\boxed{L = \frac{L_0}{2} = \frac{L_1}{2} = \frac{L_2}{2}}$$

电感减半

异名端并联





$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

$L_1 = L_2 = L_0$时

$$L = \frac{1}{2}(L_0 - M)$$

理想耦合时：$L = 0$ 短路危险

无耦合时：$L = \frac{L_0}{2}$

无耦合时

无所谓同名端、异名端

- 串联时

$$\boxed{L = \sum L_i}$$

- 并联时

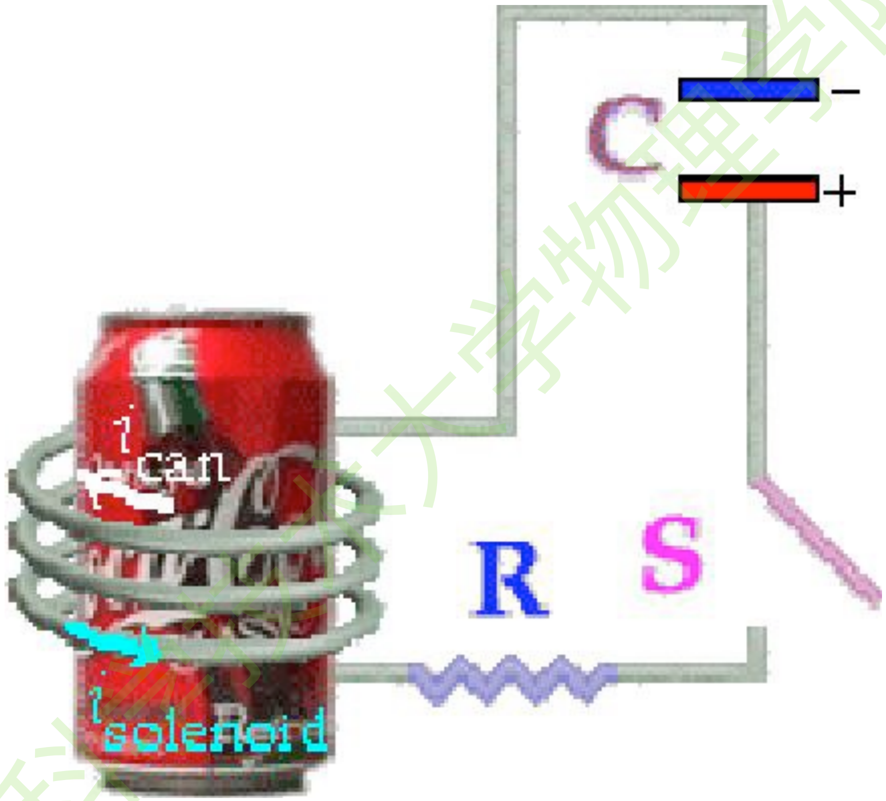
$$\boxed{\frac{1}{L} = \sum \frac{1}{L_i}}$$

与电阻类似

电阻、电感、电容的阻抗：

$$\boxed{Z_R = R} \quad \boxed{Z_L = j\omega L} \quad \boxed{Z_C = \frac{1}{j\omega C}}$$

§ 6.4 似稳电路与暂态过程



§ 6.4.1 似稳(quasi-stationary)过程与似稳电路

稳恒电流：电流密度不随时间变化

稳恒条件：任何地方都没有电荷量的改变

电流线只能是无头无尾的封闭曲线

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0}$$

稳恒电流 ➔ 稳恒电场

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{j} = 0} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0}$$

稳恒电场是稳恒电流存在的必要条件

- 一般情况下，电场是随时间变化的
- 变化的电场不满足稳恒条件 $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq 0$

  在变化的电场作用下，电流也随时间变化，不是稳恒电流
- 但欧姆定律的微分形式对非稳恒电流依然成立

$$\boxed{\vec{j} = \sigma\left(\vec{E}_{静} + \vec{E}_{旋} + \vec{K}\right)}$$

对非稳恒电流，电流随时间变化，磁场也随时间变化

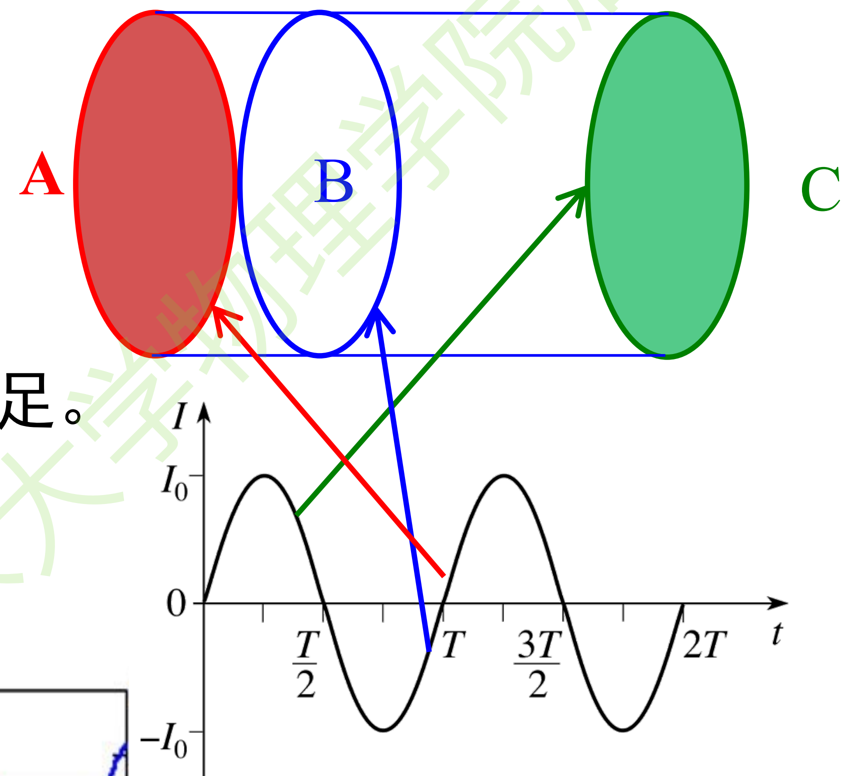
$$\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV$$

基尔霍夫第一定律不再适用。

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \neq 0$$

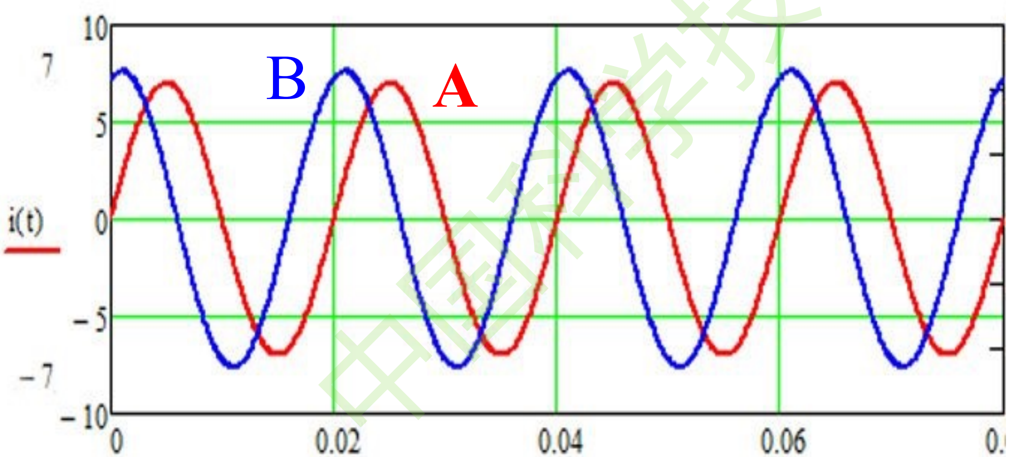
基尔霍夫第二定律不再适用。

稳恒电流的闭合性要求在没有支路的电路中，通过导线的任何截面的电流都相等



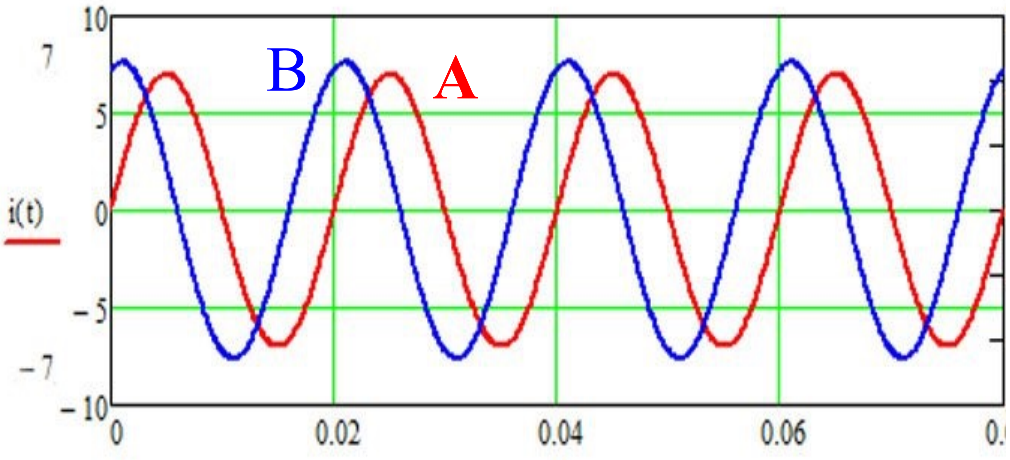
这一要求对于可变电流并不满足。

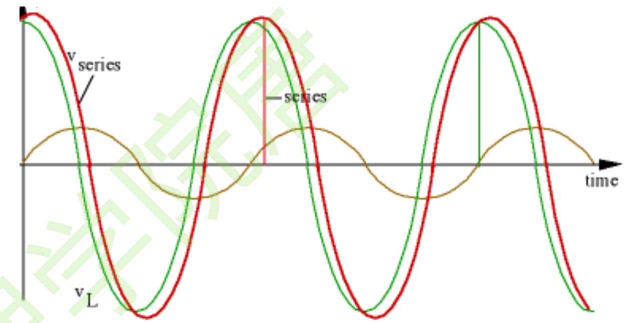
因为电磁场的传播速度有限。



流过A、B两个面的电流永远不相等。

A、B间的电荷量永远在变。





但如果场传到A、B的时间差远小于场的变化周期，则A、B间的场分布近似为稳恒场。

$$\Delta t \ll T \qquad \frac{l}{c} \ll \frac{1}{f} \qquad l \ll \frac{c}{f} = \lambda$$

称为似稳条件。

例如市电频率$f = 50\ Hz$ $\lambda = \dfrac{3 \times 10^8}{50} = 6 \times 10^6 m = 6000km$

似稳电路

对于满足似稳条件的电路，其对应的电磁场为似稳场，对应的电流为似稳电流。

对于似稳电流的瞬时值，有关直流电路的基本概念、电路定律仍然有效的。

似稳电流与稳恒电流一样，无分支电路任意时刻各个截面电流相等，可用毕奥萨伐尔定律计算磁场，服从安培环路定理

…

但是，由于趋肤效应存在，电流密度在导体截面上的分布不均匀。当稳恒电流变化缓慢、导线又比较细时，趋肤效应可以忽略。

当电路中包含电感或电容时，有异于直流电路的情况。

在电感中：

- 电流受涡旋电场力等非静电力的影响。电势概念失效。
- 但只要将对应的感应电动势当做另一类电源电动势，则纯电阻电路的有关结论仍然成立。

在电容中：

- 电容器内部电流中断，使稳恒情况下的电流连续性被破坏。
- 但这一影响仅限于电容器内部，不涉及电路其他部分。
- 由于两极板的电量相等，符号相反，流入电容器两端的电流大小相等，方向相反。这使得外部电流依然连续。

似稳条件将电流连续性问题（即基尔霍夫第一定律）解决。

基尔霍夫第二定律，即电势差问题？

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E}_{静} + \vec{E}_{旋} + \vec{K}\right)$$

$$\frac{\vec{j}}{\sigma} = \vec{E}_{静} + \vec{E}_{旋} + \vec{K}$$

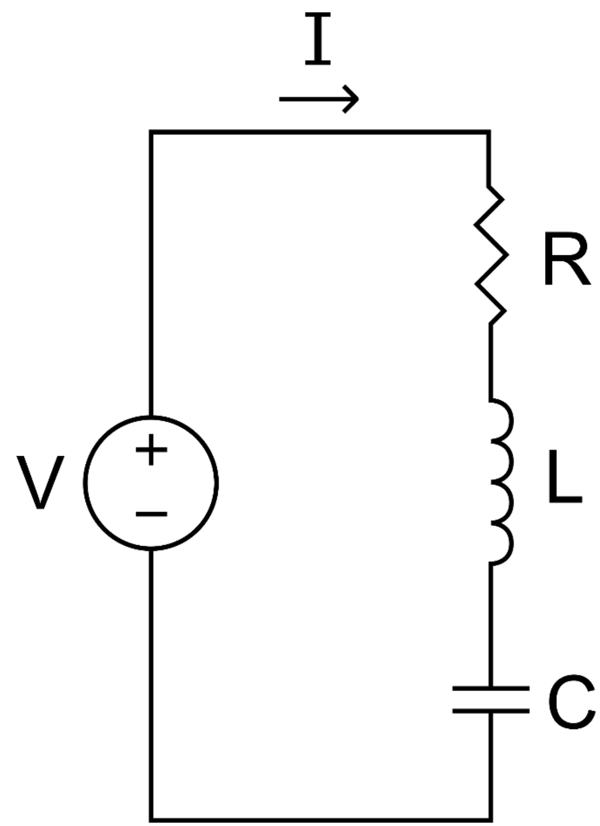
- 电源中

$$\vec{E}_{旋} = 0$$

$$\vec{E}_{静} = -\vec{K} + \frac{\vec{j}}{\sigma}$$

$$U_r = \int_{电源} \vec{E}_{静} \cdot d\vec{l}$$
$$= -\int_{电源} \vec{K} \cdot d\vec{l} + \int_{电源} \frac{\vec{j}}{\sigma} dl = -\mathcal{E} + Ir$$

$$U_r = -\mathcal{E} + Ir$$



$$\frac{\vec{j}}{\sigma} = \vec{E}_{静} + \vec{E}_{旋} + \vec{K}$$

- 电阻区

$$\vec{E}_{旋} = 0, \quad \vec{K} = 0$$

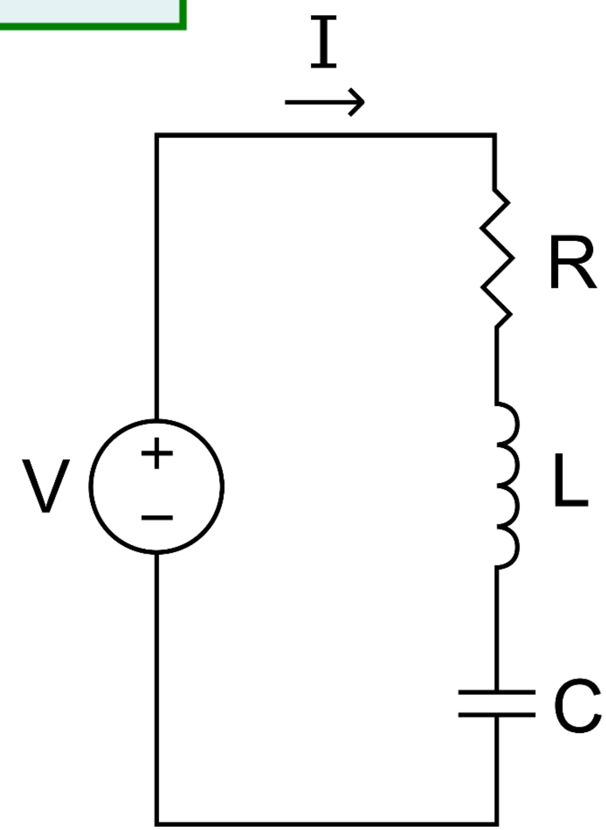
$$U_R = \int_{电阻} \vec{E}_{静} \cdot d\vec{l} = \int_{电阻} \frac{\vec{j}}{\sigma} dl = IR$$

$$U_R = IR$$

- 电容区

$$\vec{E}_{旋} = 0, \quad \vec{K} = 0, \quad \sigma = 0$$

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\int I dt$$



- 电感区

$$\vec{K}=0;\quad \sigma\to\infty$$

$$0=\vec{E}_{静}+\vec{E}_{旋}$$

$$U_L=\int_{电感}\vec{E}_{静}\cdot d\vec{l}=-\int_{电感}\vec{E}_{旋}\cdot d\vec{l}=-\mathcal{E}_L$$

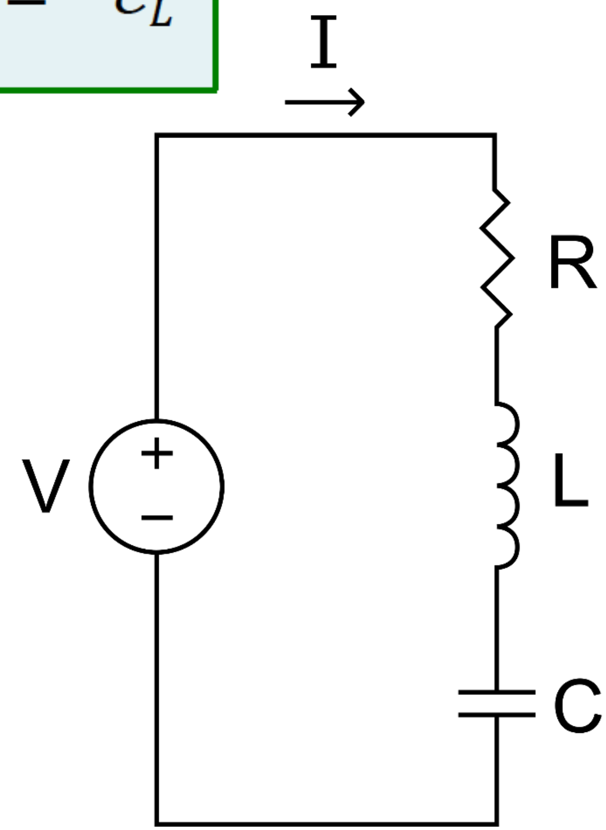
$$U_L=-\mathcal{E}_L=L\frac{dI}{dt}+M\frac{dI'}{dt}$$

- 导线区

$$\vec{E}_{旋}=0,\quad \vec{K}=0,\quad \sigma\to\infty$$

$$U_{导线}=\int_{导线}\vec{E}_{静}\cdot d\vec{l}\to 0$$

$$\frac{\vec{j}}{\sigma}=\vec{E}_{静}+\vec{E}_{旋}+\vec{K}$$



静电场依然满足环路定理

$$\oint \vec{E}_{静} \cdot d\vec{l} = 0 = U_r + U_R + U_C + U_L + U_{导线}$$

$$U_r = -\mathcal{E} + Ir$$

$$U_R = IR$$

$$U_L = -\mathcal{E}_L$$

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\int I dt$$

$$U_{导线} \to 0$$

$$-\mathcal{E} + Ir + IR + U_C + U_L = 0$$

$$I(R + r) + U_C + U_L = \mathcal{E}$$

交流电路的“基尔霍夫第二定律”

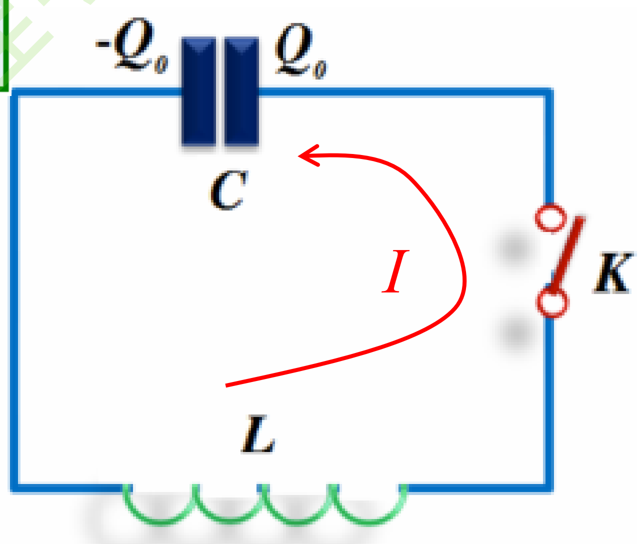
LC振荡电路

电容C 蓄有电量Q_0，在$t = 0$时刻接通K，经自感为 L 的线圈放电

$$I(R+r) + U_C + U_L = \mathcal{E}$$

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\int I dt$$

$$U_L = -\mathcal{E}_L = L\frac{dI}{dt} + M\frac{dI'}{dt}$$



$$\frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$$

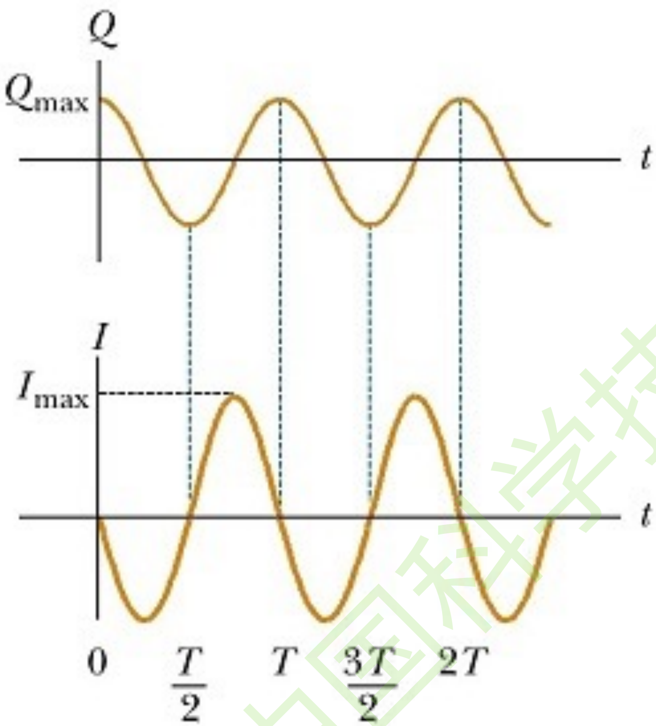
初始条件

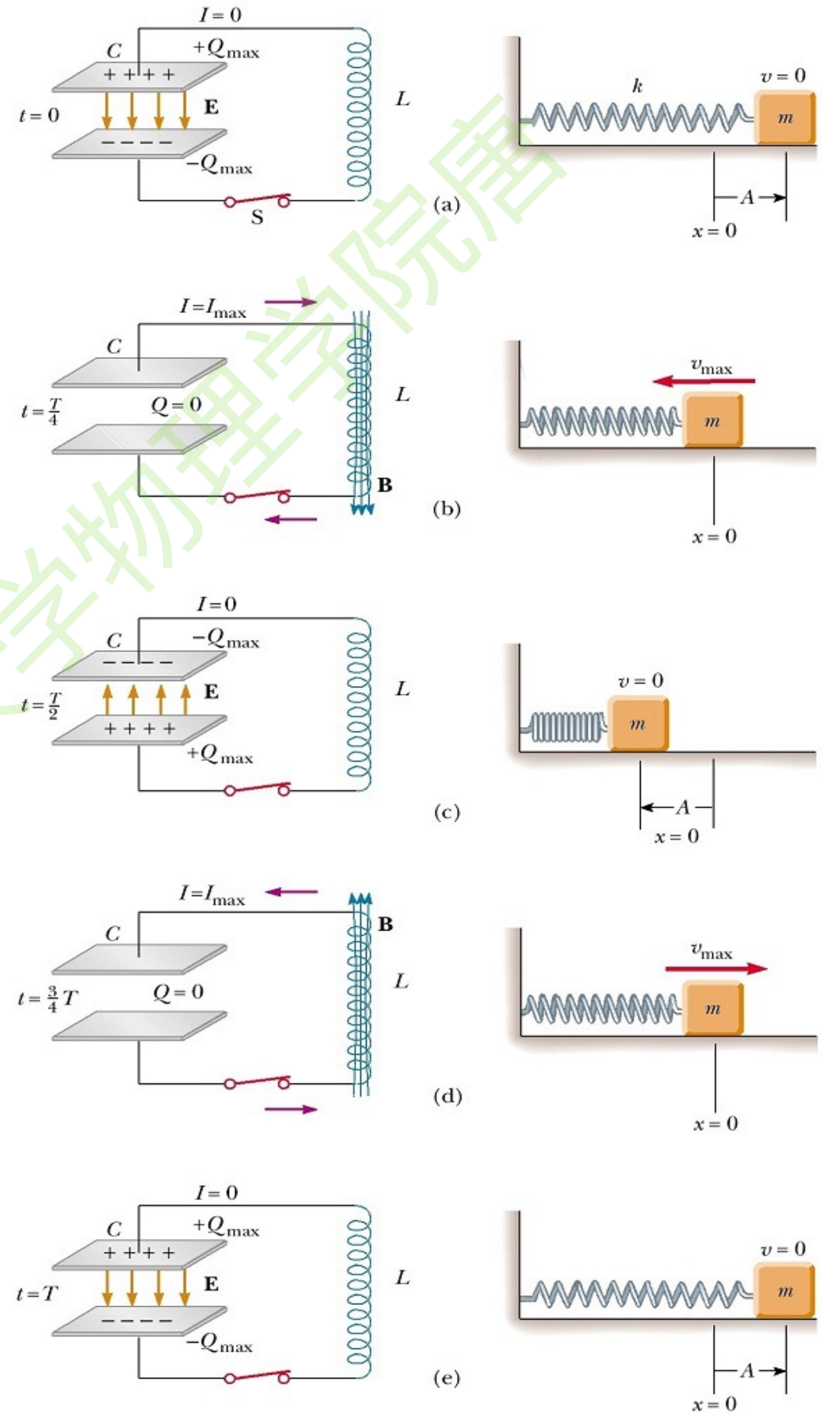
$$q = A\cos\omega t + B\sin\omega t\,,\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\begin{cases} q = Q_0, & t = 0 \\ I = \dfrac{dq}{dt} = 0, & t = 0 \end{cases}$$

$$I = \frac{dq}{dt} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$

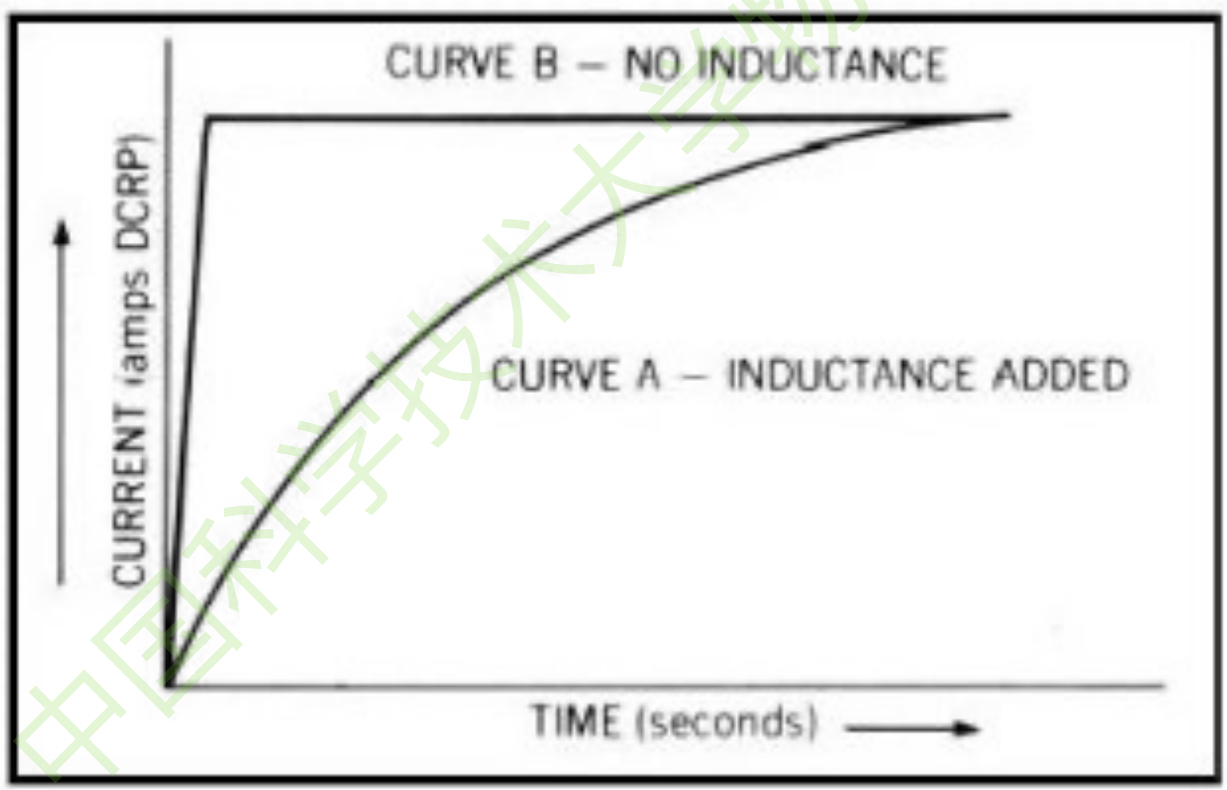
$$\begin{cases} q = Q_0 \cos \omega t \\ I = -Q_0 \omega \sin \omega t \end{cases}$$



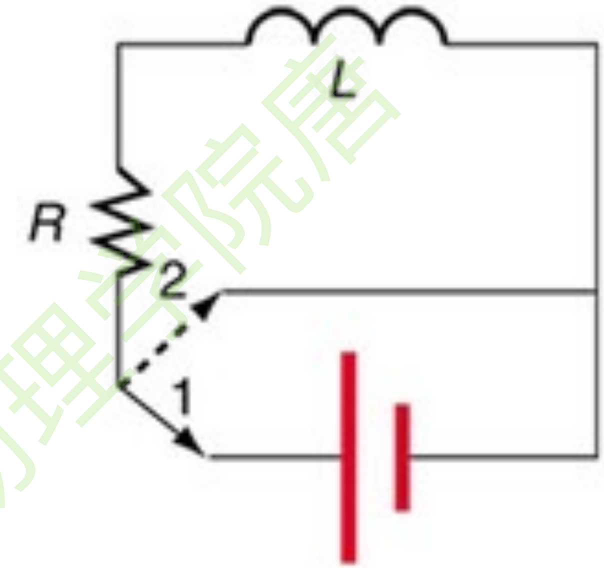


§ 6.4.2 暂态过程 (Transient Process)

包含电容、电感的电路，电流不能瞬间突变，在阶跃电压信号激励下，电流从一个状态变化到另一个状态需要有一个过程，称为“暂态过程”



RL串联暂态过程



$$I(R+r)+U_C+U_L=\mathcal{E}$$

$$IR+L\frac{dI}{dt}=\mathcal{E}$$

- 开关在“1”状态时

$$IR+L\frac{dI}{dt}=\mathcal{E}$$

$$L\frac{dI}{dt}+R\left(I-\frac{\mathcal{E}}{R}\right)=0$$

$$\frac{d\left(I-\frac{\mathcal{E}}{R}\right)}{\left(I-\frac{\mathcal{E}}{R}\right)}=-\frac{R}{L}dt$$

$$\ln\left(I-\frac{\mathcal{E}}{R}\right)=-\frac{R}{L}t+C$$

$$I=\frac{\mathcal{E}}{R}+Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

初状态t=0时，I=0。

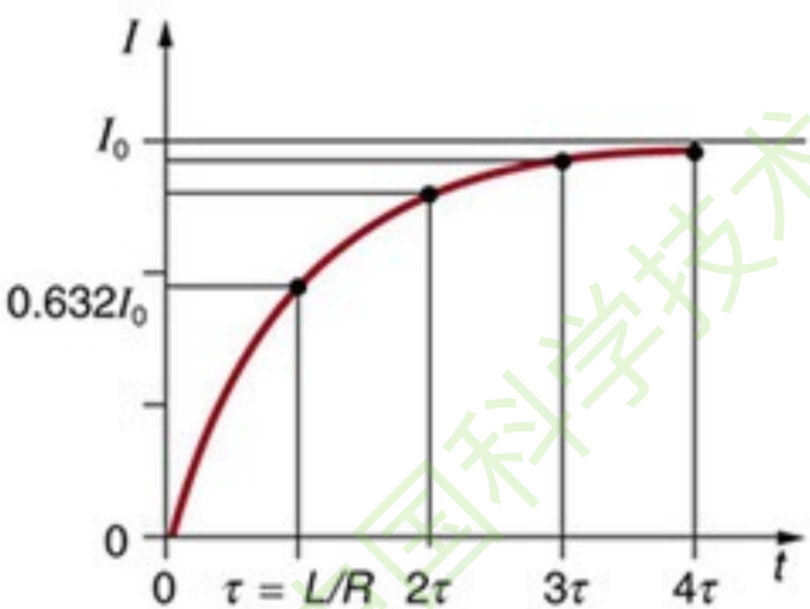
$$I=\frac{\mathcal{E}}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

令$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}, \tau = \frac{L}{R}$

$$\boxed{I = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

$$\boxed{\begin{cases} I = 0, & t = 0 \\ I \to I_0, & t \to \infty \end{cases}}$$

电流从一个状态缓慢过渡到另一个状态



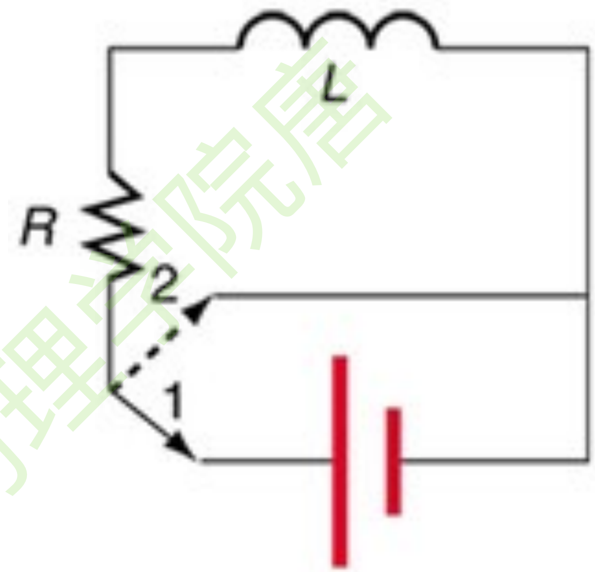
过渡的快慢程度由τ决定

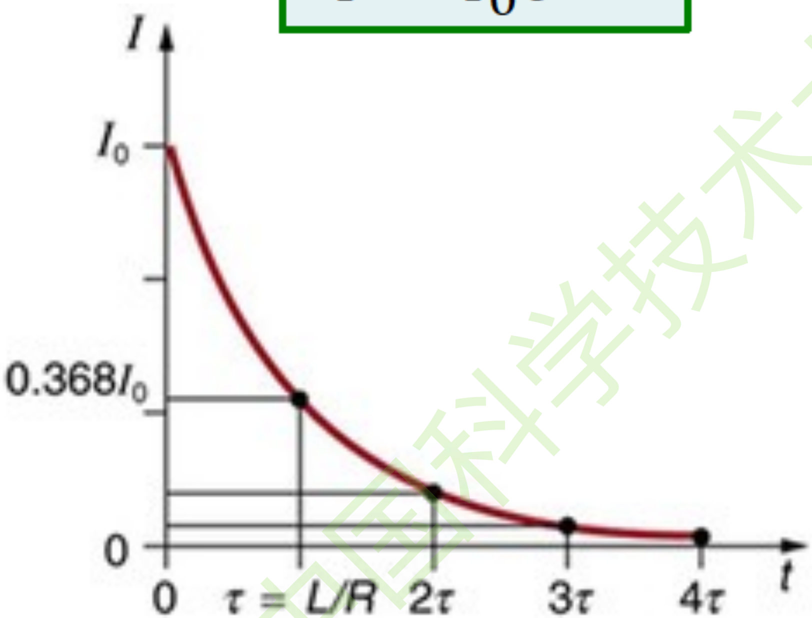
- 开关拨到“2”状态时

$$I=\frac{\mathcal{E}}{R}+Ae^{-\frac{R}{L}t}=Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

初始状态$I(t=0)=I_0$

$$I=I_0e^{-\frac{t}{\tau}}$$





电流对电阻做功：

$$W_R=\int_0^\infty I^2\,Rdt=I_0^2R\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}}dt=I_0^2R\frac{\tau}{2}=\frac{1}{2}LI_0^2$$

能量来自于电感储存的能量

RLC串联电路暂态过程

$$I(R+r)+U_C+U_L=\mathcal{E}$$

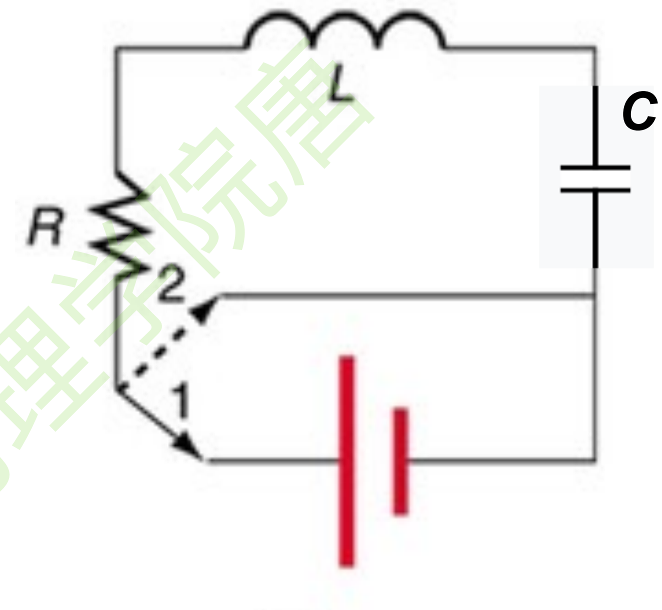
$$IR+\frac{\int Idt}{C}+L\frac{dI}{dt}=\mathcal{E}$$

$$\frac{dq}{dt}R+\frac{q}{C}+L\frac{d^2q}{dt^2}=\mathcal{E}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{q}{LC}=\frac{\mathcal{E}}{L}$$

令 $\frac{R}{2L}=\beta,\frac{1}{\sqrt{LC}}=\omega_0, C\mathcal{E}=q_0$

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2q=\omega_0^2q_0$$



初始条件：

$$\begin{cases} q=0, & t=0 \\ I=\frac{dq}{dt}=0, & t=0 \end{cases}$$

- 欠阻尼

$$\boxed{\beta^2-\omega_0^2<0}$$

$$\boxed{R<2\sqrt{\frac{L}{C}}=R_d}$$

阻尼振荡解

- 过阻尼

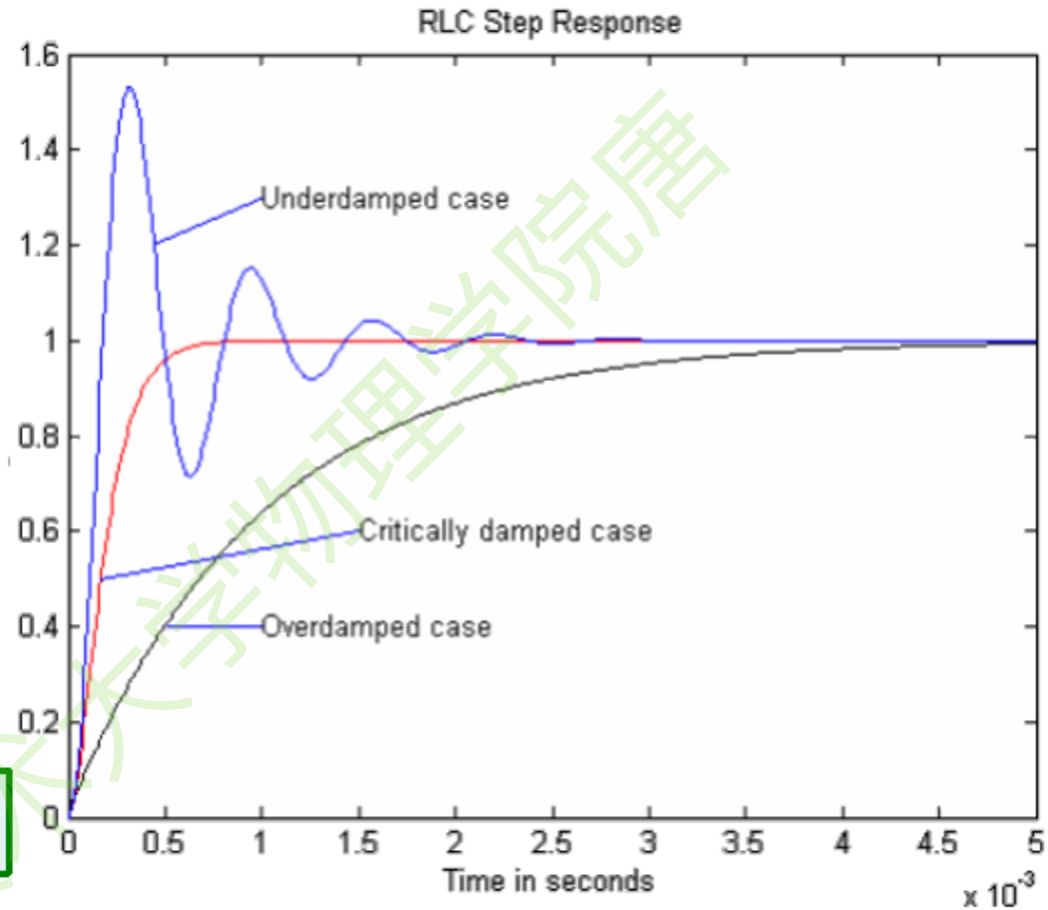
$$\boxed{\beta^2-\omega_0^2>0} \quad \boxed{R>R_d}$$

单调上升，且$\beta=\frac{R}{2L}$越大，上升越慢

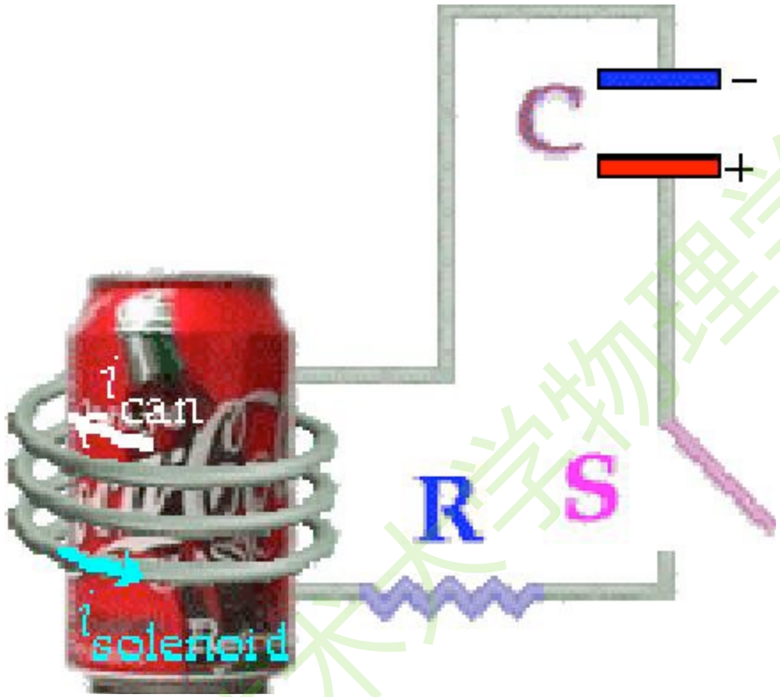
- 临界阻尼

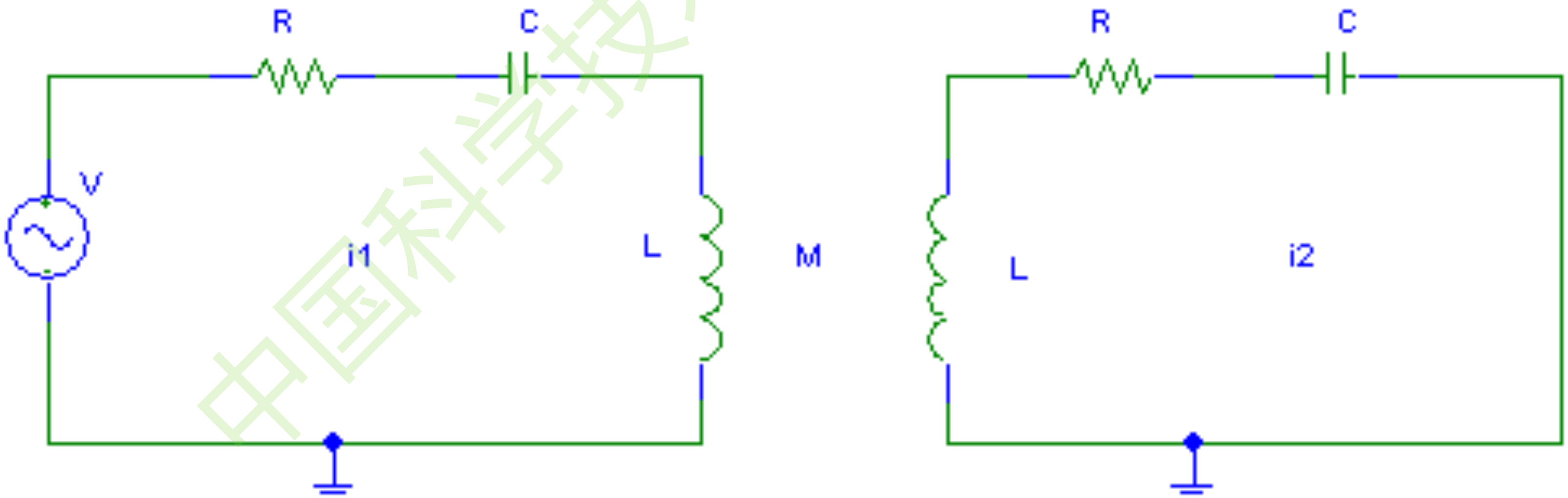
$$\boxed{\beta^2-\omega_0^2=0} \quad \boxed{R=R_d}$$

单调上升，β比过阻尼小，上升比过阻尼快。



思考：RLC电路中，能量消耗在电阻中，如何加热电感中的饮料？





作业

- 6.18
- 6.25
- 6.31
- 6.33