第6章 电磁感应与磁场的能量

§6.1 电磁感应定律

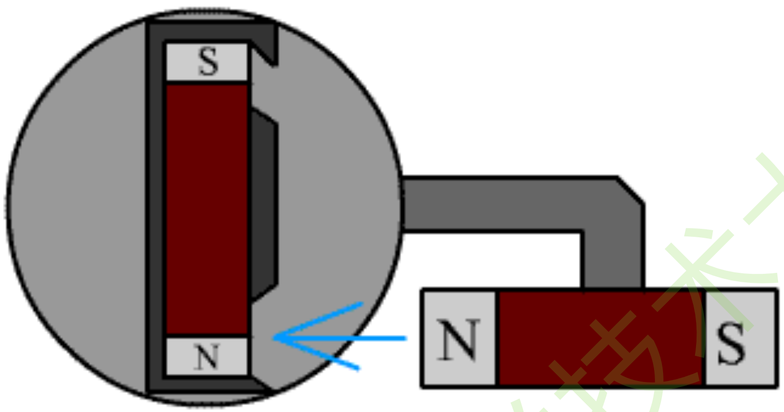
§6.2 动生电动势与感生电动势

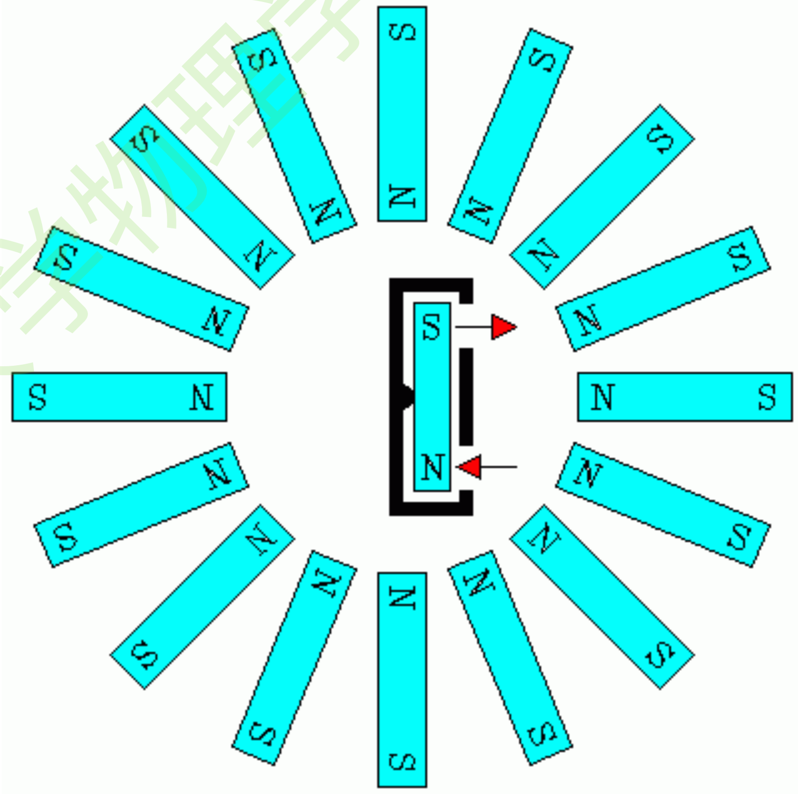
§6.3 互感与自感

§6.4 似稳电路与暂态过程

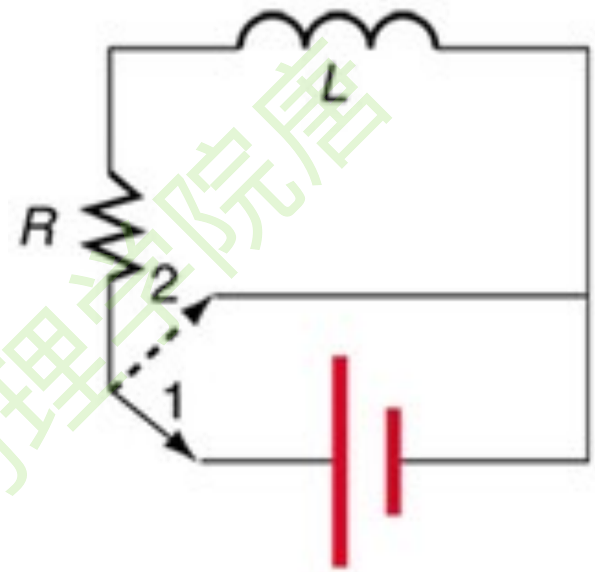
§6.5 磁场的能量

§ 6.5 磁场的能量





§ 6.5.1 载流线圈的磁能



RL电路中，撤去电源后，电阻总焦耳热：

$$W_R = \frac{1}{2} L I_0^2$$

它只能来自线圈储存的能量。

- 接通电源时

$$\mathcal{E} = IR + L\frac{dI}{dt}$$

电源做功功率

$$\mathcal{E} I = I^2 R + LI\frac{dI}{dt} = I^2 R + d\left(\frac{1}{2} L I^2\right)$$

电源提供的能量一部分在电阻上产生焦耳热，一部分为克服线圈自感电动势做功

克服线圈电动势做的功储存在电感里，断开电源后可全部释放给电阻

电感里储存的磁能：

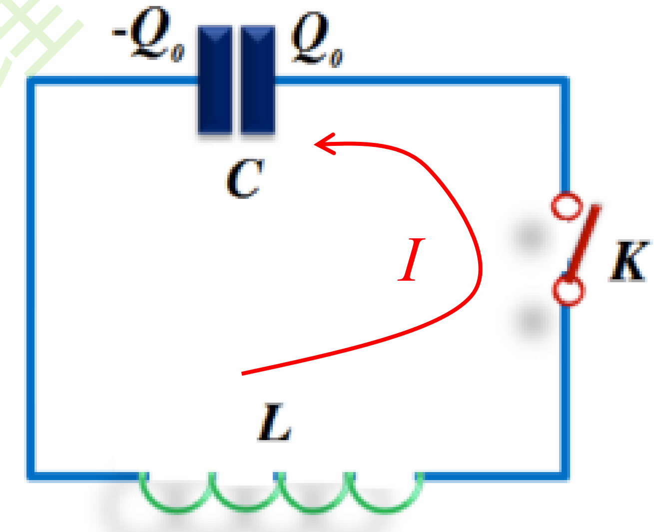
$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}I\Phi}$$

【例】一电容C 蓄有电量Q_0，在$t = 0$时刻接通K，经自感为 L 的线圈放电，求：

(1) L 内磁场能量第一次等于C 内电场能量的时刻 t_1；

(2) L 内磁场能量第二次达到极大值的时刻 t_2。

【解】由似稳电路基本方程



$$\boxed{\frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} = 0}$$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0}$$

$$\boxed{q = A\cos\omega t + B\sin\omega t\,, \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

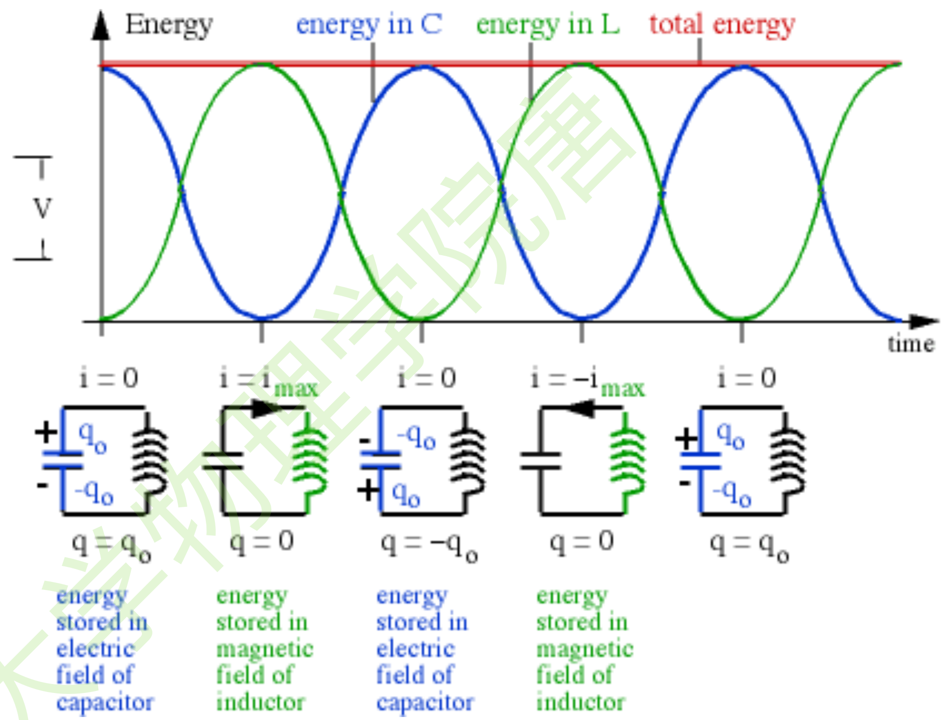
$$\boxed{I = \frac{dq}{dt} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t}$$

初始条件

$$\begin{cases} q = Q_0, & t = 0 \\ I = \dfrac{dq}{dt} = 0, & t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = Q_0 \cos \omega t \\ I = -Q_0 \omega \sin \omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_e = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C} = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q_0^2}{C}\cos^2 \omega t \\[2ex] W_m = \dfrac{1}{2}LI^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q_0^2}{C}\sin^2 \omega t \end{cases}$$



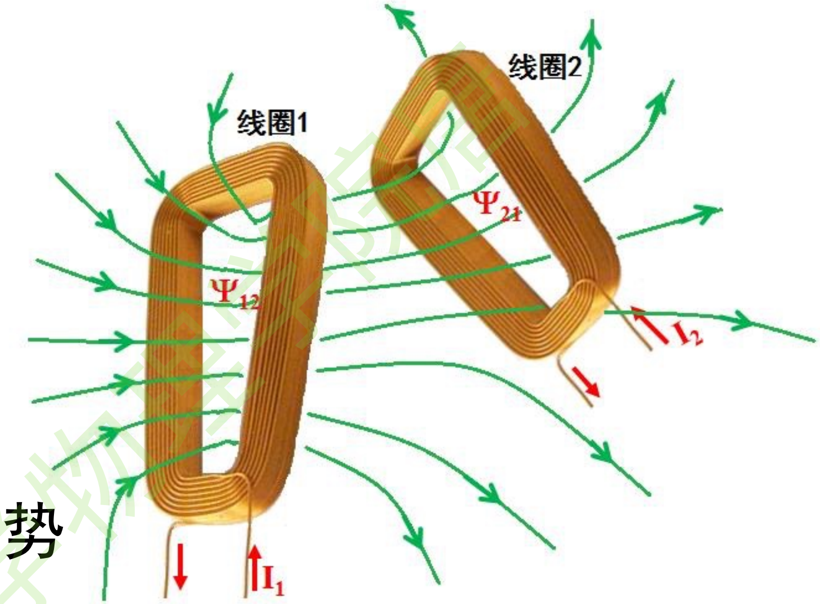
（1）第一次L内磁能与C内电能相等

$$\omega t_1 = \frac{\pi}{4}, t_1 = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{4}\sqrt{LC}$$

（2）L内磁能第二次达到极大值

$$\omega t_2 = \frac{3\pi}{2}, t_2 = \frac{3\pi}{2\omega} = \frac{3\pi}{2}\sqrt{LC}$$

两个线圈系统的磁能



L_1单独存在时的磁能为

$$W_{m1}=\frac{1}{2}L_1I_1^2$$

由于L_2的存在，在L_1上会产生电动势

$$\mathcal{E}_{12}=-M_{12}\frac{dI_2}{dt}$$

流过L_1的电流I_1需克服这一电动势做功，功率为

$$P=-\mathcal{E}_{12}I_1=M_{12}I_1\frac{dI_2}{dt}=\frac{d(M_{12}I_1I_2)}{dt}$$

因此，线圈L_1由于受到L_2的作用产生的磁能为$M_{12}I_1I_2$

但这一能量不是L_1独有的，而是两个线圈共享这一相互作用能

$$\boxed{W_{m12} = M_{12}I_1I_2 = M_{21}I_1I_2 = \frac{1}{2}(M_{12}I_1I_2 + M_{21}I_1I_2)}$$

总的磁能为:

$$\boxed{\begin{aligned} W_m &= W_{m1} + W_{m2} + W_{m12} \\ &= \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + \frac{1}{2}M_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}M_{21}I_1I_2 \end{aligned}}$$

多个线圈系统的磁能

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{i}^{N} L_i I_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i}^{N}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} M_{ik} I_i I_k$$

自感磁能　　　　互感磁能

自能　　　　相互作用能

第k个线圈的电流产生的磁场在第i个线圈产生的磁通为：

$$\boxed{\Phi_{ik} = M_{ik} I_k}$$

第i个线圈的总磁通为：

$$\boxed{\Phi_i = L_i I_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} M_{ik} I_k = \Phi_i' + \Phi_i''}$$

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}\sum_{i}^{N} L_i I_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i}^{N}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} M_{ik} I_i I_k}$$

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2}\sum_{i}^{N} I_i \Phi_i}$$

§ 6.5.2 载流线圈在外磁场中的磁能

第i个线圈处在其他所有线圈产生的磁场中的能量为：

$$\boxed{W_{mi} = I_i \Phi_i}$$

注意：此处没有因子1/2

易知，某一线圈在磁场B中的磁能为

$$\boxed{W_m = I\Phi}$$

$$\boxed{\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}}$$

对均匀外场，或者非均匀外场中的小线圈

$$\boxed{\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{S}}$$

$$\boxed{W_m = I\Phi = I\vec{B} \cdot \vec{S} = I\vec{S} \cdot \vec{B} = \vec{\mu} \cdot \vec{B}}$$

推广到磁场中的多个载流线圈系统

$$W_m = I\Phi = I\sum_i^N \vec{B} \cdot \vec{S}_i = \left(\sum_i^N I\vec{S}_i\right) \cdot \vec{B}$$

$$= \left(\sum_i^N \vec{\mu}_i\right) \cdot \vec{B} = \vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

§ 6.5.3 磁场的能量和磁能密度

与静电能储存在电场中一样，磁能也存储在磁场中

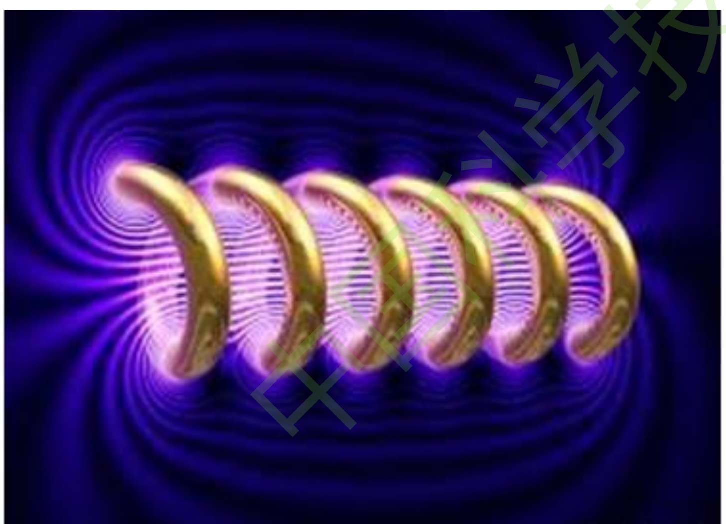
以理想螺线管为例，其内部磁场的能量：

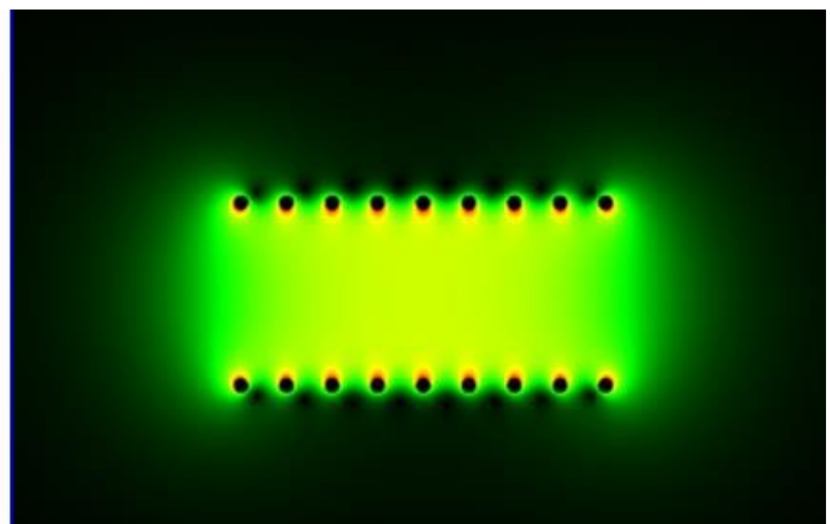
$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}INBS = \frac{1}{2}BSl\frac{NI}{l} = \frac{1}{2}BSlH = \frac{1}{2}BHV$$

单位体积的能量：

磁能密度

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2}BH$$





一般地，磁能密度：

$$\boxed{w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}}$$

对磁介质也成立

对比电场能量密度

$$\boxed{w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}}$$

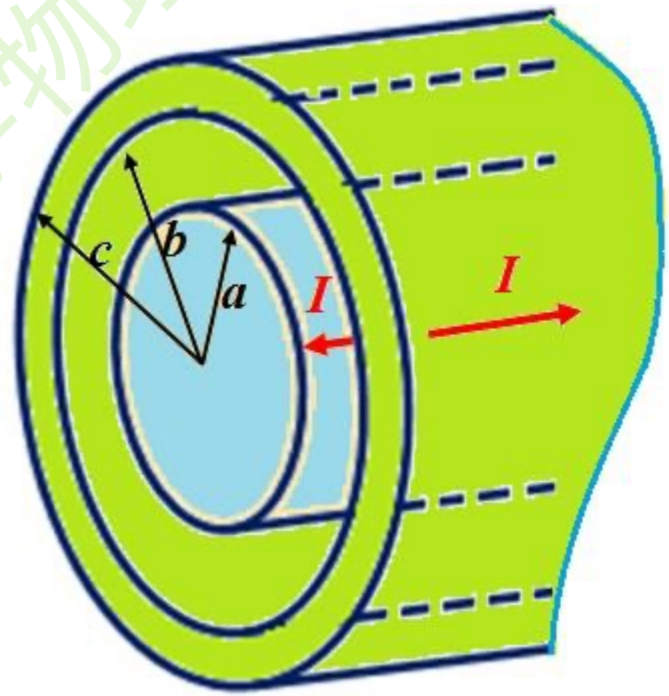
某一空间V中的磁场总能量：

$$\boxed{W_m = \iiint\limits_V w_m dV = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \vec{B}\cdot\vec{H}dV}$$

【例】一同轴电缆，中心是半径为a 的实心导线，外部是内半径为b，外半径为c 的导体圆筒，内外导体之间充满相对磁导率为μ_r 的介质，电流在内外筒等大反向且均匀分布，求

（1）电缆中的磁能分布；

（2）单位长度的电感。



【解】分四个区域进行计算

- $0 \leq r \leq a$

根据安培环路定理

$$\boxed{H_1 2\pi r = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} I}$$

$$\boxed{H_1 = \frac{Ir}{2\pi a^2}} \qquad \boxed{B_1 = \mu_0 H_1}$$

$$w_{m1} = \frac{1}{2}B_1H_1 = \frac{1}{2}\mu_0\left(\frac{Ir}{2\pi a^2}\right)^2 = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4}$$

$$W_{m1} = \int_{r=0}^{a} w_{m1} \cdot 2\pi r l dr = \int_{r=0}^{a} \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4} 2\pi r l dr = \frac{\mu_0 l}{16\pi} I^2$$

- $a \le r \le b$

$$H_2 2\pi r = I \qquad H_2 = \frac{I}{2\pi r} \qquad B_2 = \mu_0 \mu_r H_2$$

$$w_{m2} = \frac{1}{2}B_2H_2 = \frac{1}{2}\mu_0\mu_r\left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2 = \frac{\mu_0\mu_r I^2}{8\pi^2 r^2}$$

$$W_{m2} = \int_{r=a}^{b} \frac{\mu_0\mu_r I^2}{8\pi^2 r^2} \cdot 2\pi r l dr = \frac{\mu_0\mu_r l}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) I^2$$

- $b \le r \le c$

$$\boxed{H_3 2\pi r = I - \frac{\pi(r^2 - b^2)}{\pi(c^2 - b^2)} I = \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} I}$$

$$\boxed{H_3 = \frac{I}{2\pi(c^2 - b^2)}\left(\frac{c^2}{r} - r\right)}$$

$$\boxed{B_3 = \mu_0 H_3}$$

$$\boxed{w_{m3} = \frac{1}{2} B_3 H_3 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 (c^2 - b^2)^2}\left(\frac{c^4}{r^2} - 2c^2 + r^2\right)}$$

$$\boxed{W_{m3} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi(c^2 - b^2)^2}\int_{r=b}^{c}\left(\frac{c^4}{r} - 2c^2 r + r^2\right) dr}$$

- $r > c$ 磁场为0，磁能为0

总磁能

$$\boxed{\begin{aligned} W_m &= W_{m1} + W_{m2} + W_{m3} \\ &= \frac{\mu_0 l}{4\pi} I^2 \left\{ \frac{1}{4} + \mu_r \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right. + \dots \end{aligned}}$$

（2）根据磁能与自感的关系式

$$\boxed{W_m = \frac{1}{2} L I^2} \qquad \boxed{L_0 = \frac{L}{l} = \frac{2W_m}{I^2 l}}$$

高频近似下

$$\boxed{W_m = W_{m2} = \frac{\mu_0 \mu_r l}{4\pi} I^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \qquad \boxed{L_0 = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} I^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

求自感系数的办法

- 利用磁能

$$\boxed{L = \frac{2W_m}{I^2}}$$

这种方法不会出错，适用于解磁场具有对称性的问题。

- 利用磁通

$$\boxed{L = \frac{\Phi}{I}}$$

这种方法适合简单线圈回路，但必须准确求出有效磁通。

- 利用感应电动势

$$\boxed{L = -\mathcal{E} / \frac{dI}{dt}}$$

这种方法常用于实验和工程中测量电感。