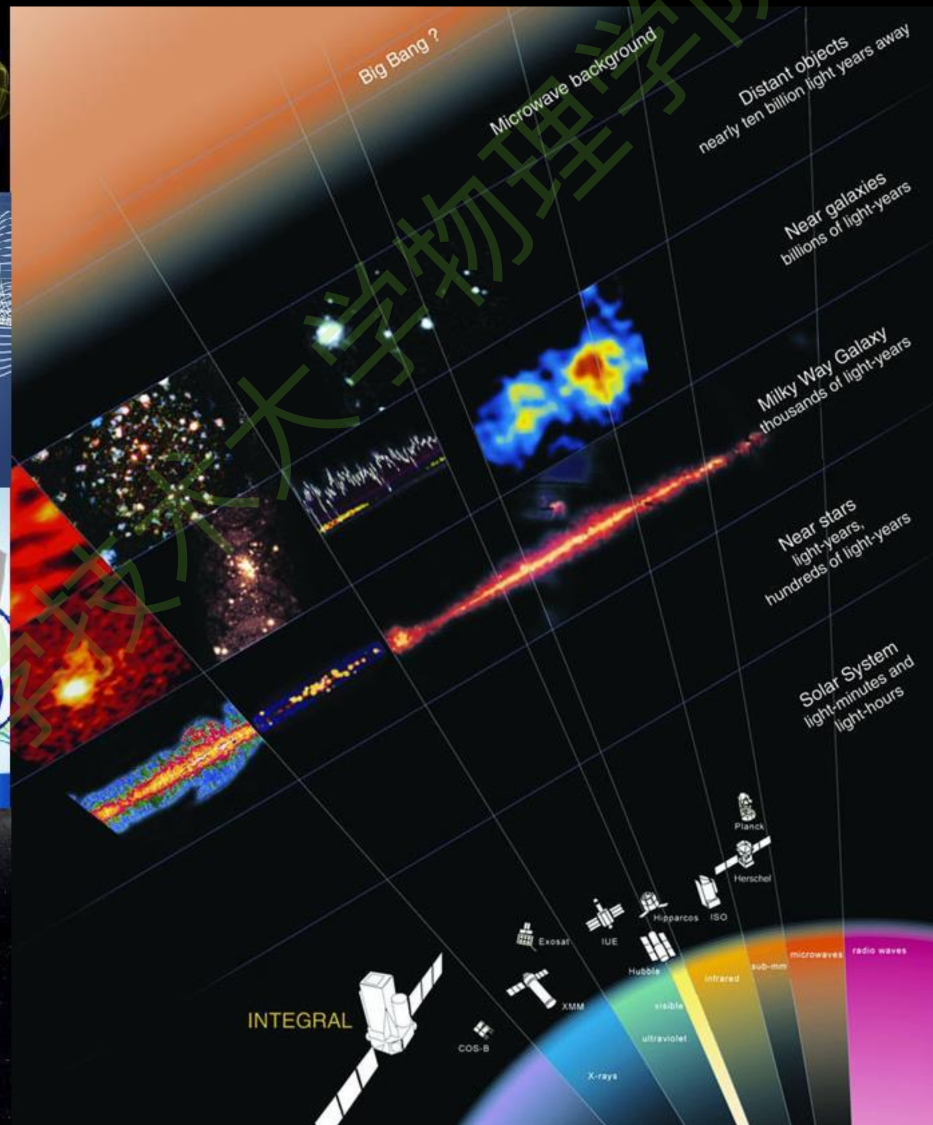
第8章 电磁现象的基本规律与电磁波



第8章 电磁现象的基本规律与电磁波

§ 8.1 静态电场和磁场的基本规律

静电学中的实验规律与理论

静电学中的实验规律是库仑定律

$$\vec{F}=\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

高斯定理

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\iiint_V \rho_0 dV$$

环路定理

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

高斯定理

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV$$

$$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$$

环路定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

由电场与电势的关系 $\boxed{\vec{E} = -\nabla U}$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \varepsilon \vec{E} = -\varepsilon \nabla \cdot \nabla U = -\varepsilon \nabla^2 U = \rho_0}$$

$$\boxed{\nabla^2 U = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

泊松方程

当空间没有电荷时：

$$\boxed{\nabla^2 U = 0}$$

拉普拉斯方程

边值问题

泊松方程是一个二阶微分方程，需要知道边界条件才能得到确定的解

边值问题：在给定边界条件下，求解泊松方程或者拉普拉斯方程

1. 第一类边值问题：给定条件为整个边界的电势

2. 第二类边值问题：给定条件为整个边界的电势法向导数

3. 第三类边值问题：给定条件为部分边界的电势，另外边界的法向导数

唯一性定理

满足泊松方程或者拉普拉斯方程及所给的全部边界条件的电场解是唯一的

要保证U为问题的正确解，当且仅当其满足两个条件：

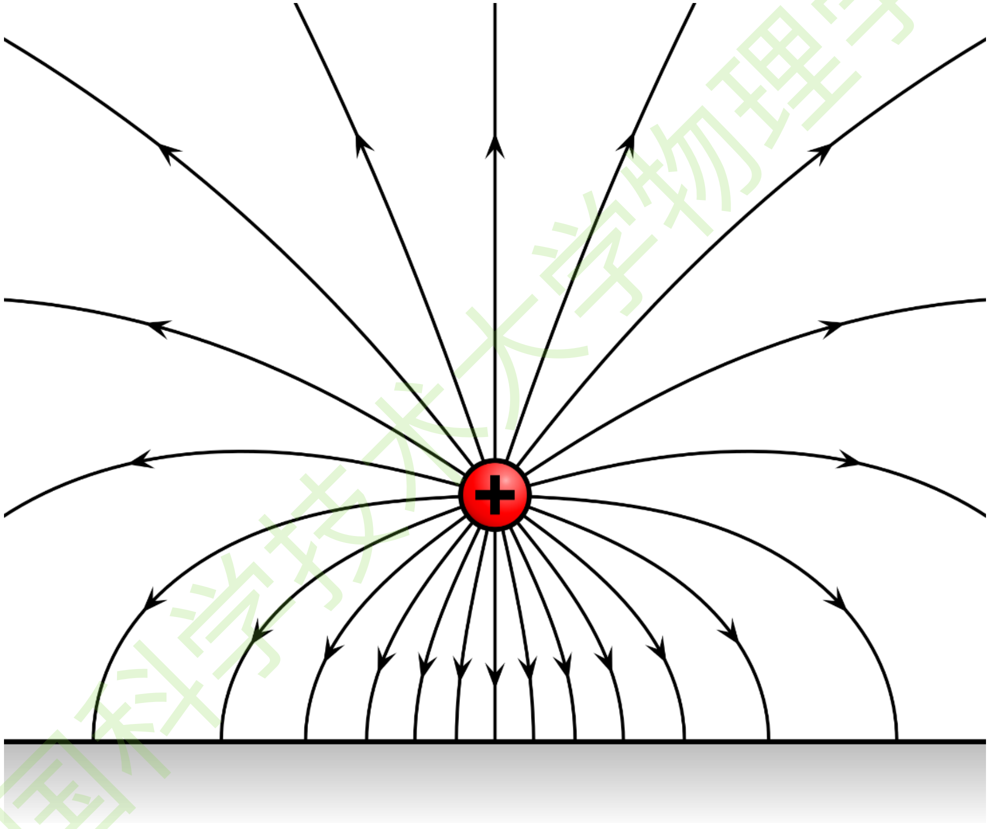
1. 满足泊松方程或者拉普拉斯方程；

2. 满足所给定的边界条件。（三类边值问题给出的情况）

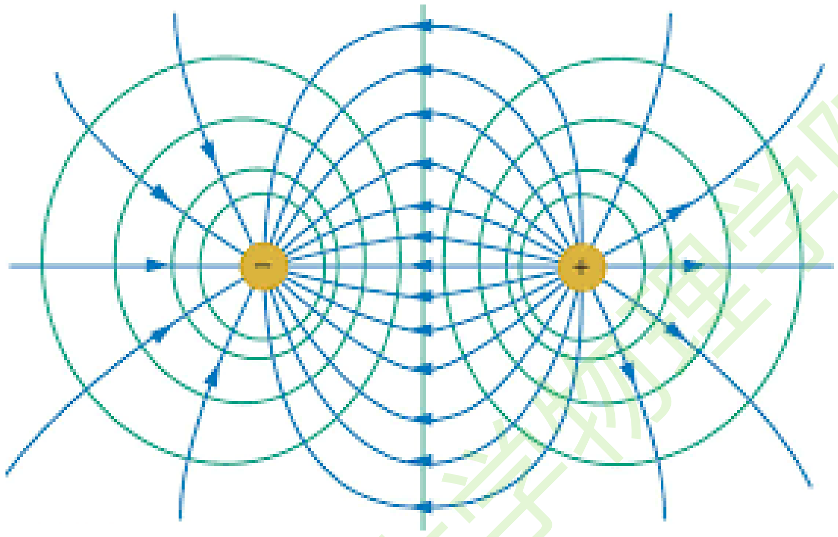
证明略

电像法

点电荷放置在地面附近

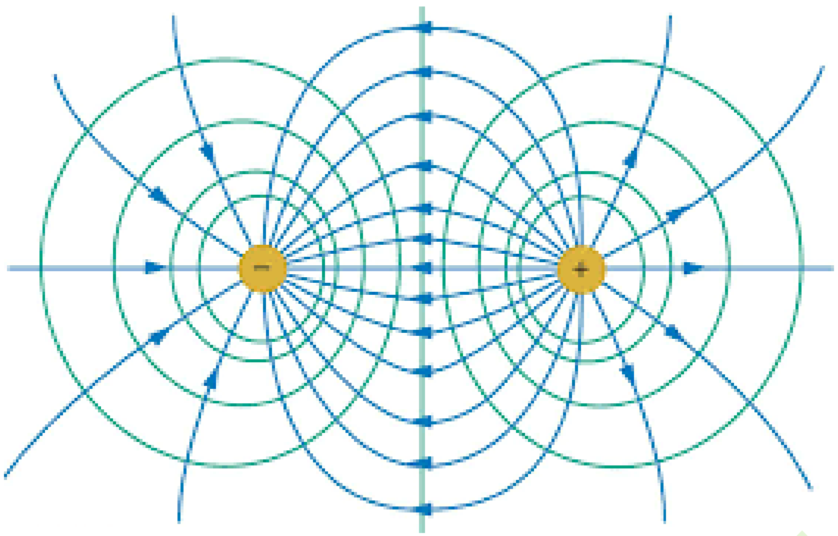
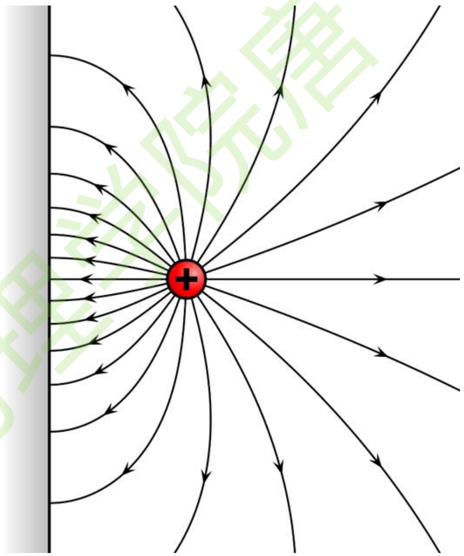


地面以上空间电场分布如何解析描述？



两个等量异号电荷的电场

中垂面为零电势等势面

该电场在左半空间：

1、不满足泊松方程

2、满足所有边界条件

➔该电场不是问题的解

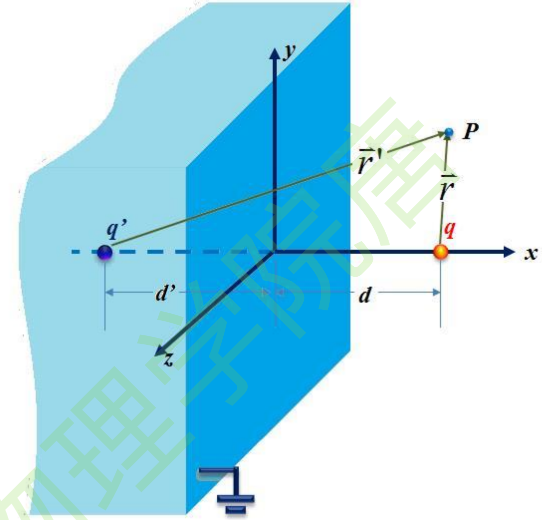
电场强度为0

该电场在右半空间：

1、满足泊松方程

2、满足所有边界条件

➔该电场为问题的唯一解



$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}}\right]$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla U}$$

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{x-d}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{3/2}} - \frac{x+d}{[(x+d)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\right\}$$

$$E_y = \frac{qy}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\right\}$$

$$E_z = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{[(x-d)^2+y^2+z^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+d)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\right\}$$

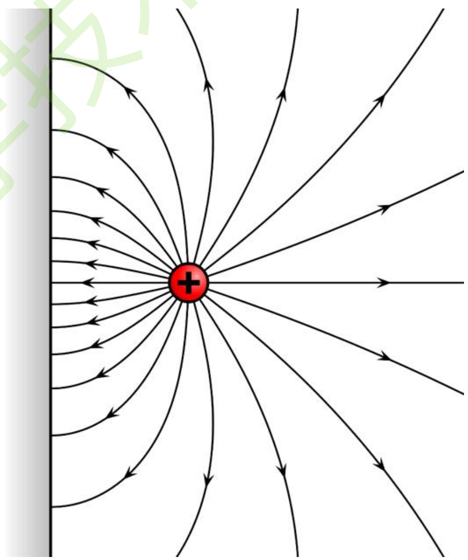
在大地表面　　$x = 0$

$$E_x(0,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-d}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{+d}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]$$

$$= -\frac{qd}{2\pi\varepsilon_0(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$E_y(0,y,z) = \frac{qy}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] = 0$$

$$E_z(0,y,z) = 0$$



大地表面感应电荷面密度：

$$\sigma_i = \varepsilon_0 E_n = \varepsilon_0 E_x = -\frac{qd}{2\pi(d^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{qd}{2\pi(d^2+r_0^2)^{3/2}}$$

大地表面总电荷:

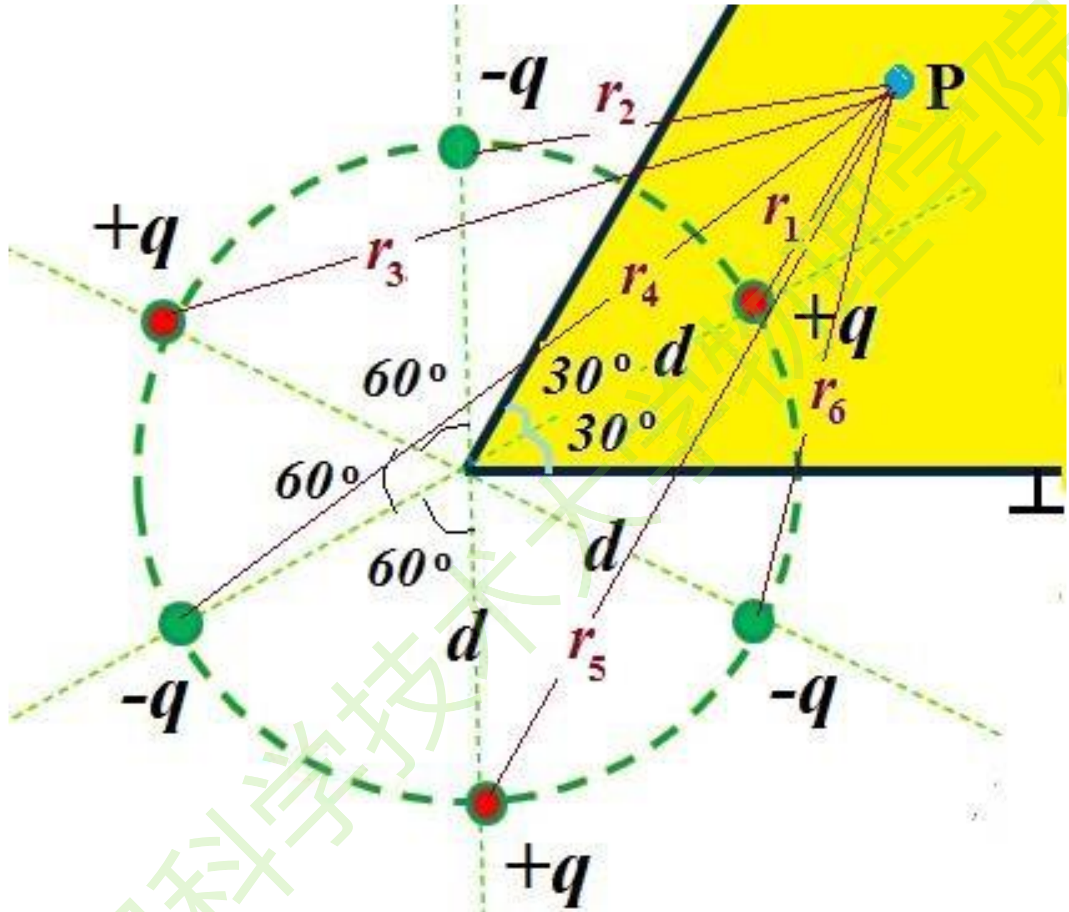
$$q_i = \iint \sigma_i \, dS = -\frac{qd}{2\pi}\int_0^\infty (d^2+r_0^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2\pi r_0 dr_0$$

$$= -qd(d^2+r_0^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^\infty = -q$$

大地的受力:

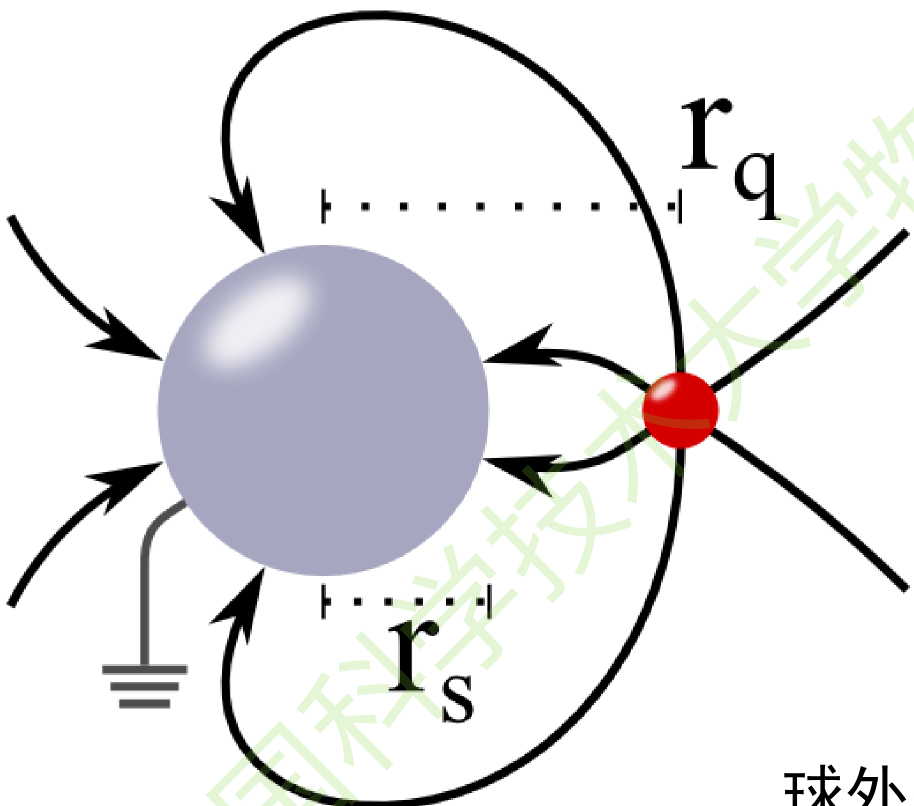
$$F_{earth} = \frac{1}{2}\iint \sigma_i E_n dS = -\frac{q^2 d^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty (d^2+r_0^2)^{-3} r_0 dr_0 = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}$$

$$F_{earth} = -F_q = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2d)^2} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}$$


-q
P
r_2
+q
r_3
r_1
r_4
+q
60°
30°
d
r_6
30°
60°
d
60°
d
r_5
-q
-q
+q

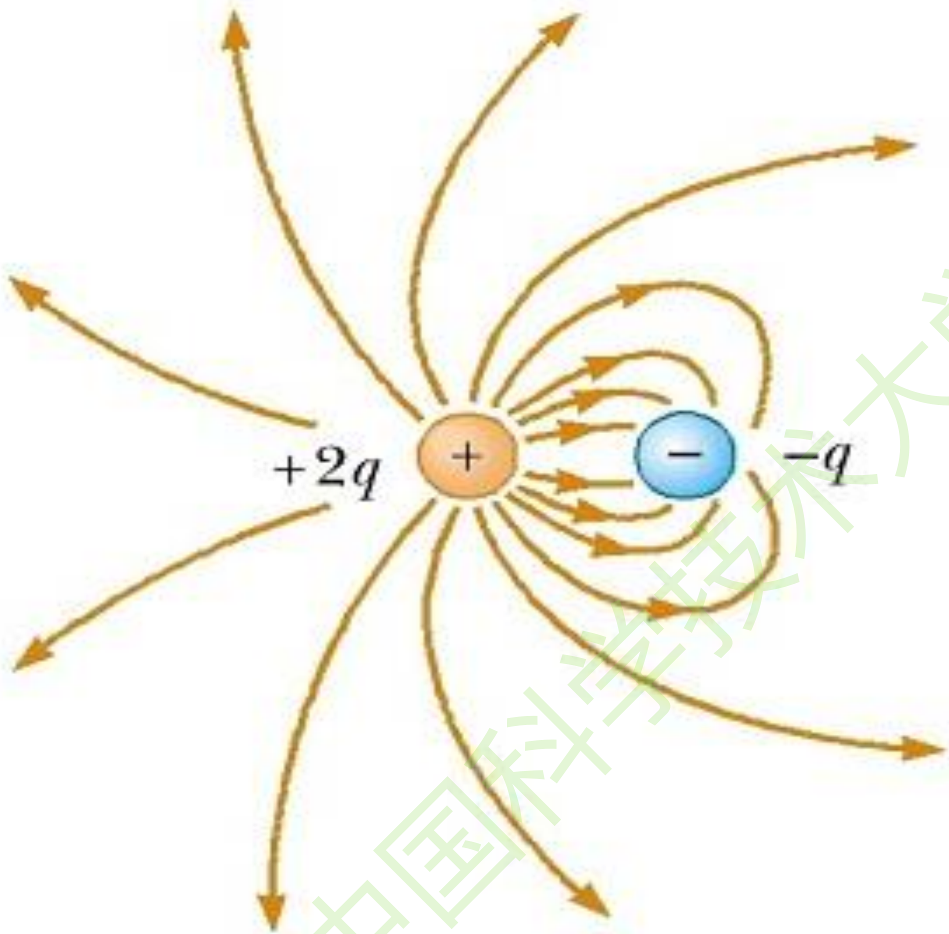
电像法

一个点电荷旁边放一个接地的导体球



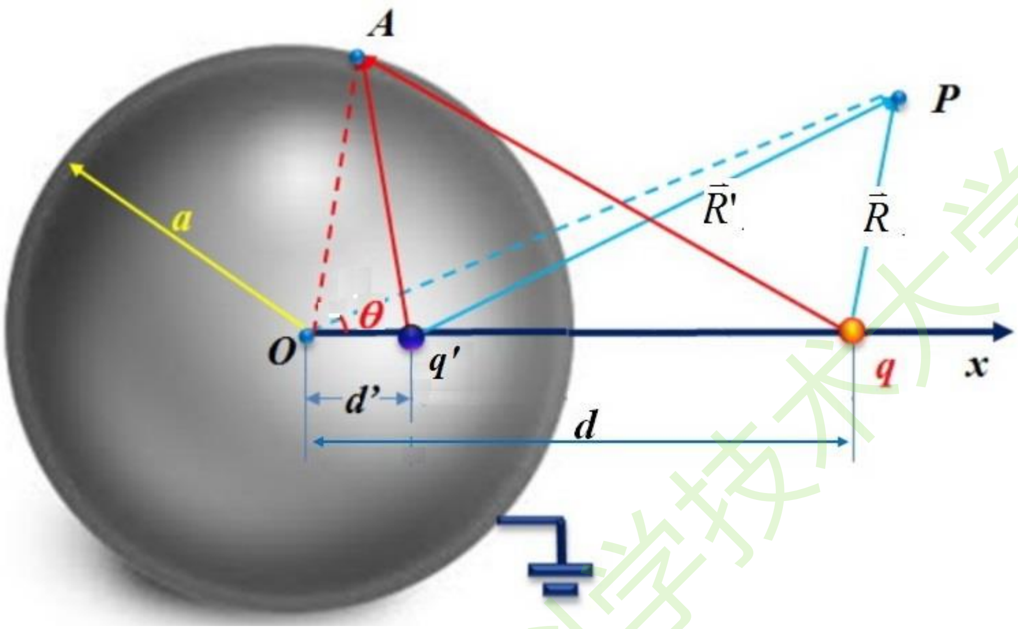
球外空间电场分布如何求解？

电像法



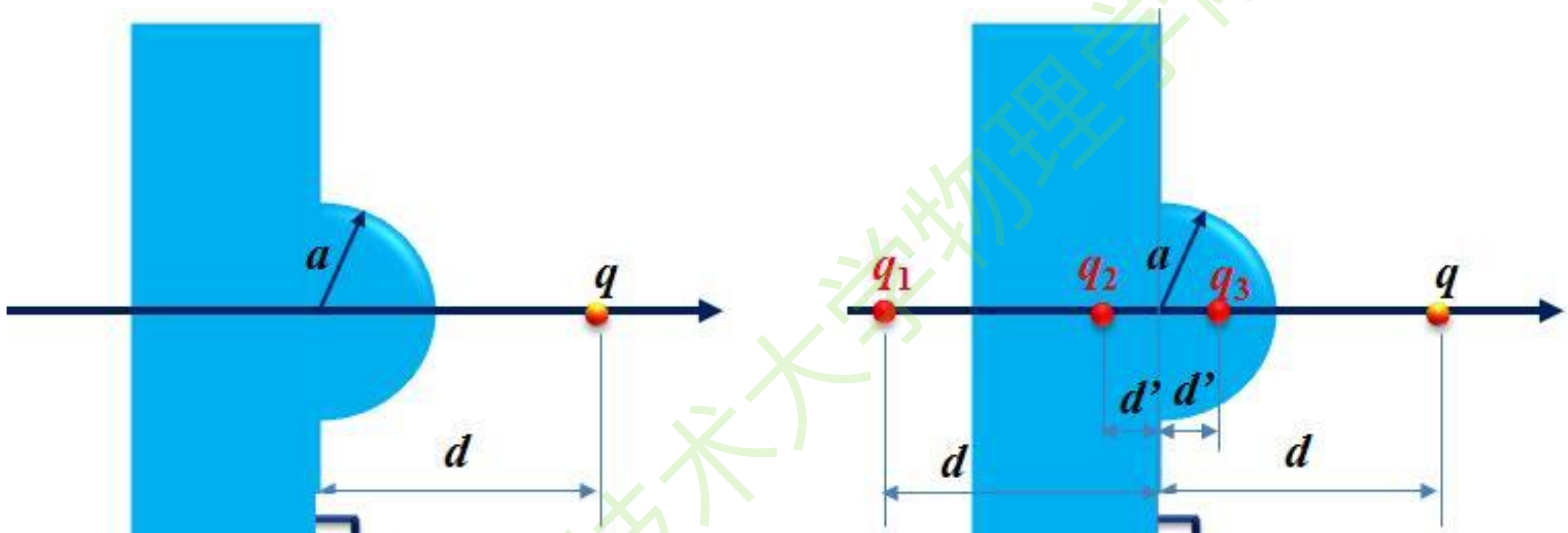
两个异号不等量电荷的电场

零电势等势面为一球面



$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R} + \frac{q'}{R'}\right)$$

$$\begin{cases} d' = \dfrac{a^2}{d} \\ q' = -\dfrac{a}{d}q \end{cases}$$



(a) *(b)*

静磁学中的实验规律与理论

静磁学中的实验规律是安培定律

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2 d\vec{l}_2 \times \left(I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r}\right)}{r_{21}^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

高斯定理

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{L_{in}} I_0$$

高斯定理

$$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

$$\oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}=\iiint_V(\nabla\cdot\vec{A})dV$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

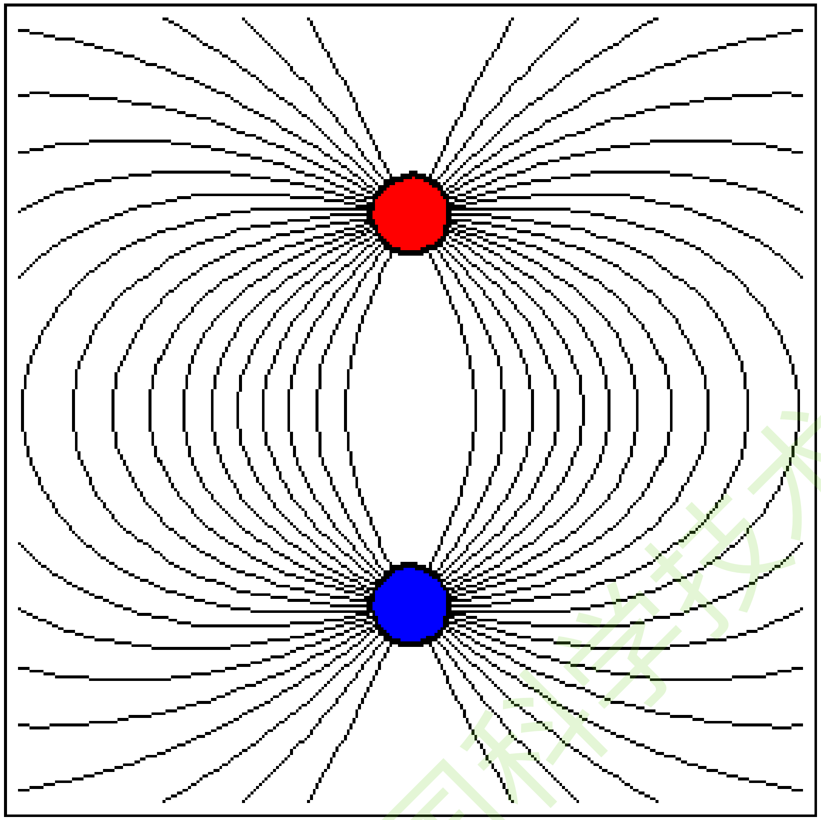
环路定理

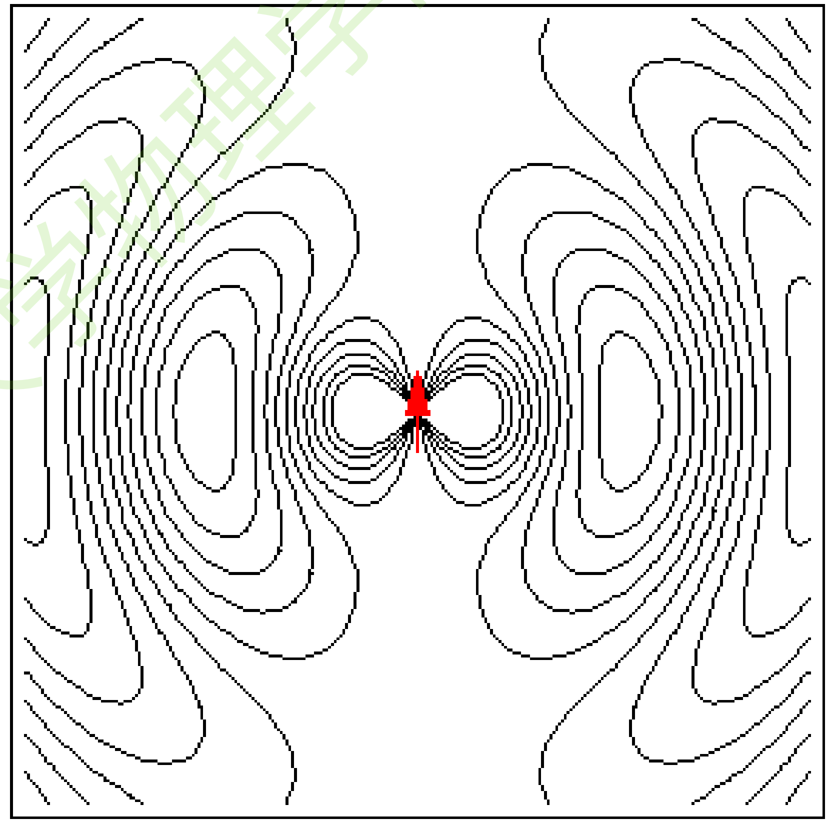
$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum_{L_{in}} I_0$$

$$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l}=\iint_S(\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0$$

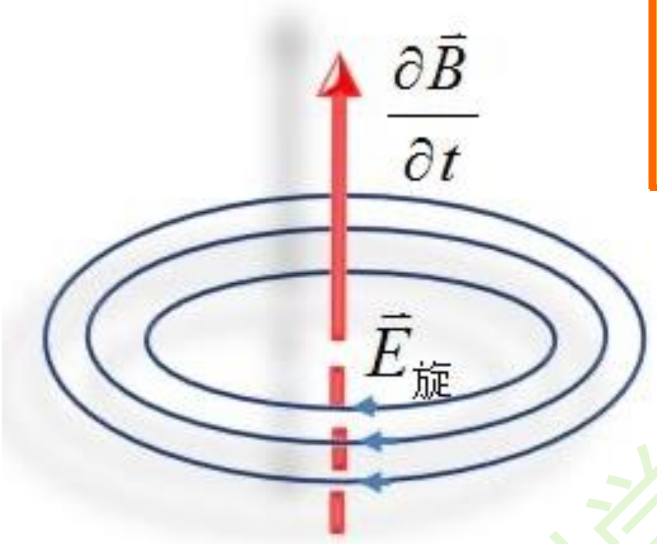
§ 8.2 时变电场和磁场的基本规律





时变情况下的电场环路定律

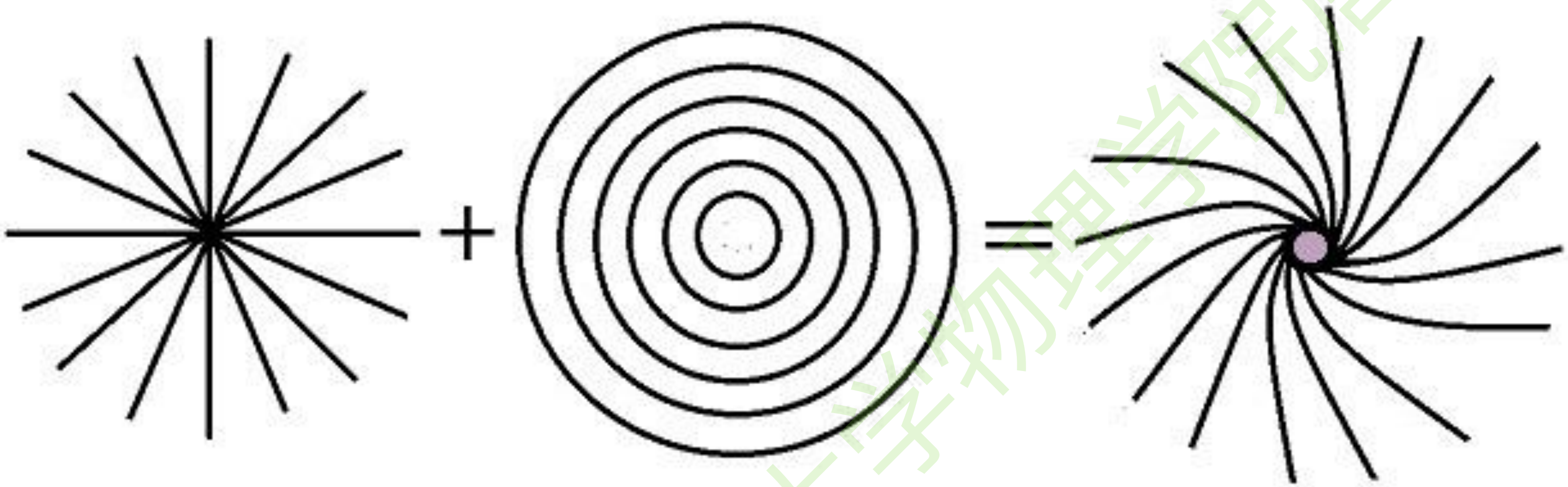
为了解释感生电动势，麦克斯韦大胆地引入了涡旋电场的假设。



$$\varepsilon = \oint \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{E}_{旋} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

时变情况下的电场基本规律



高斯定理：

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_0$$

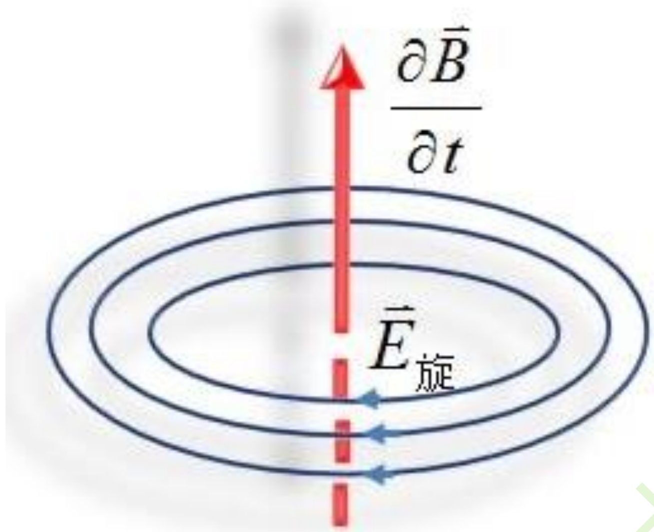
$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_0$$

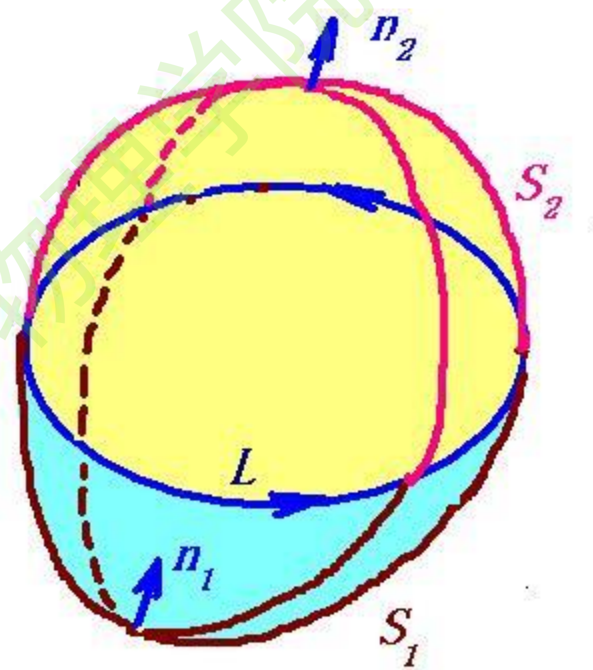
环路定理：

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

时变情况下的磁场高斯定理





$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = -\iint_{S_2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

统一以向外方向为正，则

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = +\iint_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = -\iint_{S_2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\iint_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \oiint_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oiint_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \iiint_{V} \left(\nabla\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) dV = 0$$

$$\nabla\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{B}\right) = 0 \qquad \nabla\cdot\vec{B} = \text{const}$$

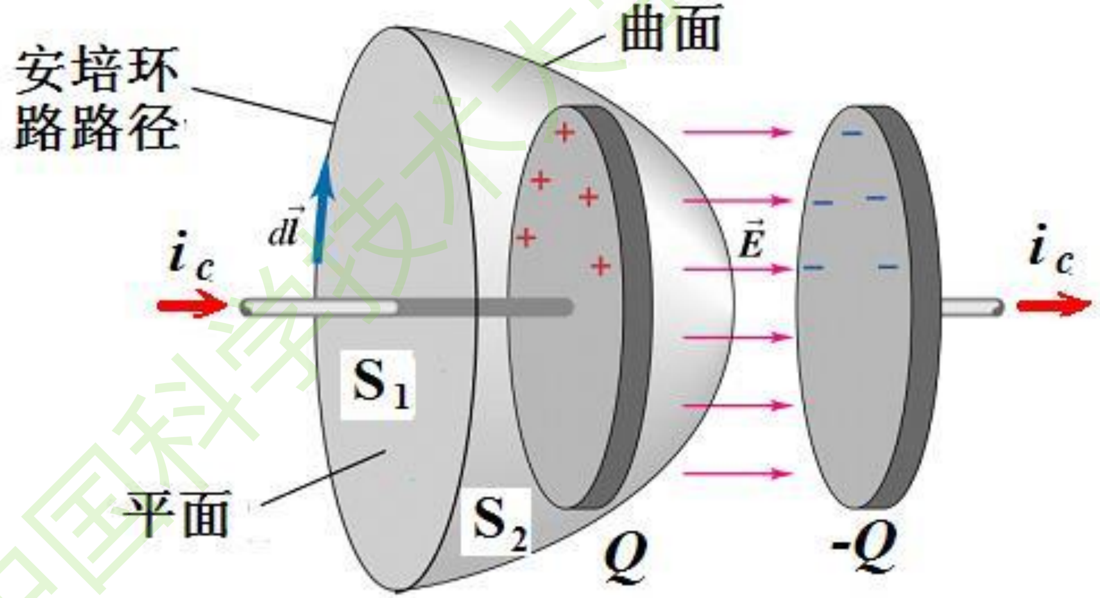
$$\boxed{\nabla\cdot\vec{B} = 0}$$

时变情况下的磁场安培环路定理

静磁场

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S}$$

在时变情况下是否仍然成立？



在时变情况下不成立！

位移电流

电极板上的自由电荷为

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

根据电荷连续性方程，有

$$\oiint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} = -\frac{dq_0}{dt} = \frac{d}{dt}\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = -\oiint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

统一以向右方向为正，则

$$\iint_{S_1} \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

定义位移电流

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

则中断的传导电流正好可以用位移电流接上

安培环路定理依然适用

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{j}_0 + \vec{j}_D) \cdot d\vec{S} = \iint_S \left(\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

位移电流假设

位移电流假设源于麦克斯韦对稳恒磁场环路定理的深入研究

稳恒条件下，稳恒电流满足：

$$\oiint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} = 0$$

它保证稳恒磁场的唯一性：

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S}$$

无论取什么样的面，只要以L为边界，右边积分唯一确定

然而时变情况下稳恒条件不成立

但电荷守恒定律（连续性条件）依然成立。

$$\oiint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} + \frac{dq_0}{dt} = 0$$

$$\oiint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} + \oiint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oiint_S \left(\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{j}_0 + \vec{j}_D) \cdot d\vec{S}$$

右边积分结果具有唯一性

位移电流本质

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

时变电场

极化电流

时变电场、极化电流与传导电流一样能产生磁场。

如果真空中不存在传导电流

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

真空中时变电场产生磁场

位移电流特点

- 并非自由电荷定向运动产生，不是真正的电流
- 在真空中、介质中等都可以存在
- 不伴随焦耳热
- 与外磁场无安培力的关系

电场与磁场相互激发

- 时变电场可以激发磁场
- 时间磁场可以激发电场

作业

- 8.4
- 8.7
- 8.12
- 8.13