第8章 电磁现象的基本规律与电磁波

§8.1 静态电场与磁场的基本规律

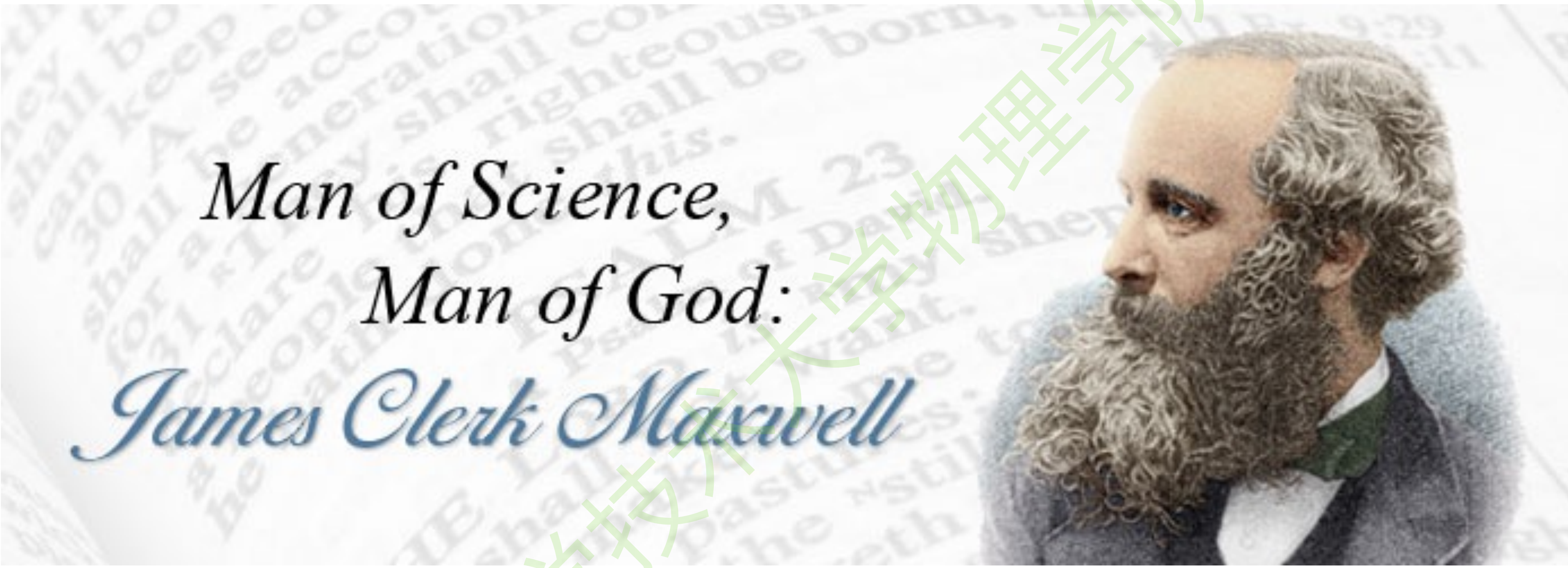
§8.2 时变电场与磁场的基本规律

§8.3 麦克斯韦方程组

§8.4 平面电磁波

§8.5 电磁场能量和能量传播

§ 8.3 麦克斯韦方程组



麦克斯韦方程组

积分形式

$$
\begin{cases}
\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_0 \\
\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \\
\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\
\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_0 + \iint_S \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}
\end{cases}
$$

微分形式

$$
\begin{cases}
\nabla\cdot\vec{D} = \rho_0 \\
\nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\nabla\cdot\vec{B} = 0 \\
\nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0 + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}
\end{cases}
$$

本构方程

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \\ \vec{B} = \mu\vec{H} \\ \vec{j}_0 = \sigma\vec{E} \end{cases}$$

边值关系

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{e0} \\ E_{2t} - E_{1t} = 0 \\ B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2t} - H_{1t} = \vec{i}_0 \end{cases}$$

洛伦兹力

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

§ 8.4 平面电磁波

真空中自由空间的电磁波

$$
\begin{cases}
\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_0 \\
\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \\
\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\
\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_0 + \iint_S \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}
\end{cases}
$$

对自由与无界真空:

$\rho_0 = 0$, $\vec{j}_0 = 0$

$$
\begin{cases}
\nabla\cdot\vec{E} = 0 \\
\nabla\times\vec{E} = -\mu_0\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\
\nabla\cdot\vec{H} = 0 \\
\nabla\times\vec{H} = \varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{cases}
$$

$$
\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right) = -\mu_0\nabla\times\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{H}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}
$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu_0 \nabla \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{H}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

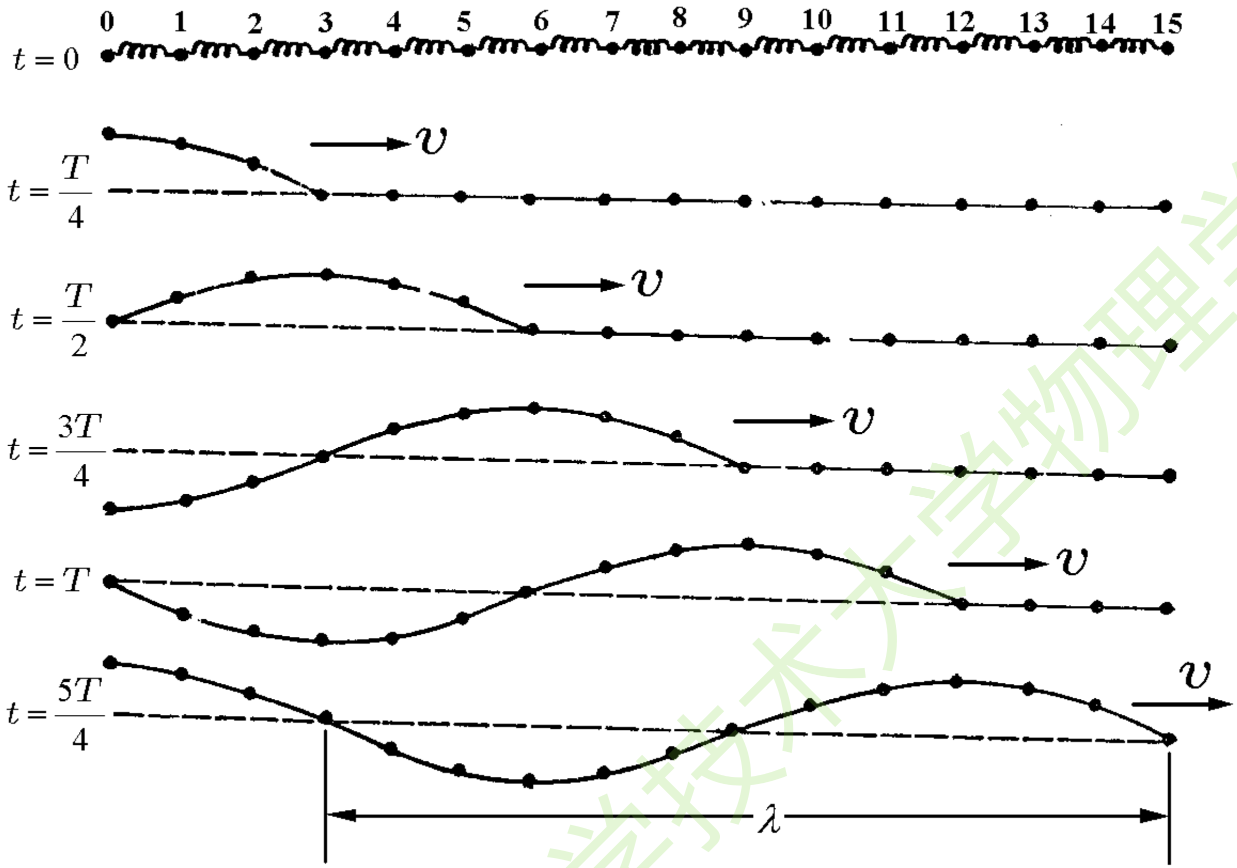
$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

同法可得：

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \nabla^2 \vec{E} \\ \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \nabla^2 \vec{H} \end{cases}$$

机械波



波动方程：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 u$$

解：

$$y = Ae^{-i(\omega t - kx)}$$

$$u = u_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

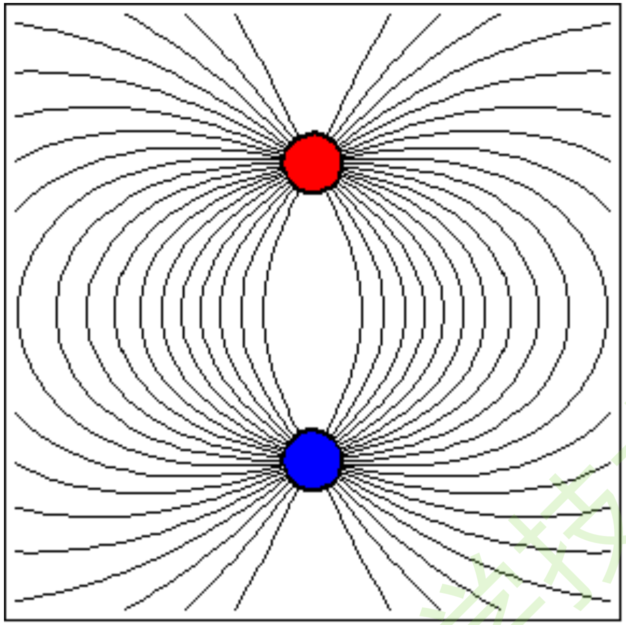
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \nabla^2 \vec{E} \\ \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \nabla^2 \vec{H} \end{cases}$$

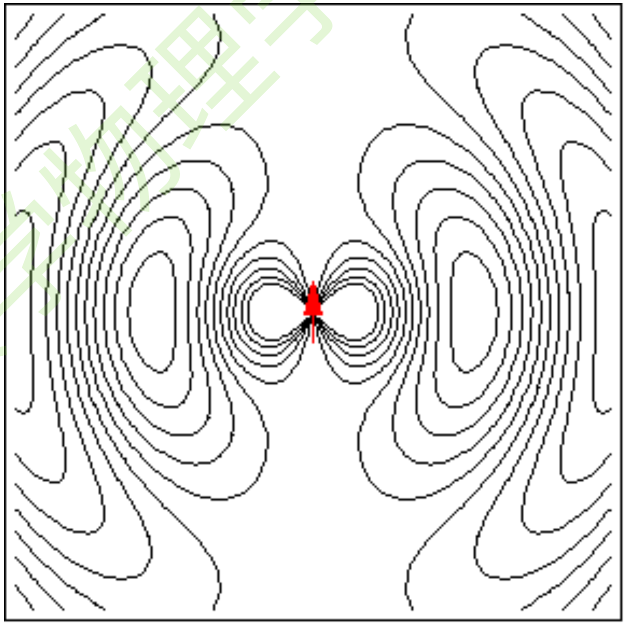
随时间变化的电场和磁场是以波的形式传播的

电磁波：
$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \\ \vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \end{cases}$$

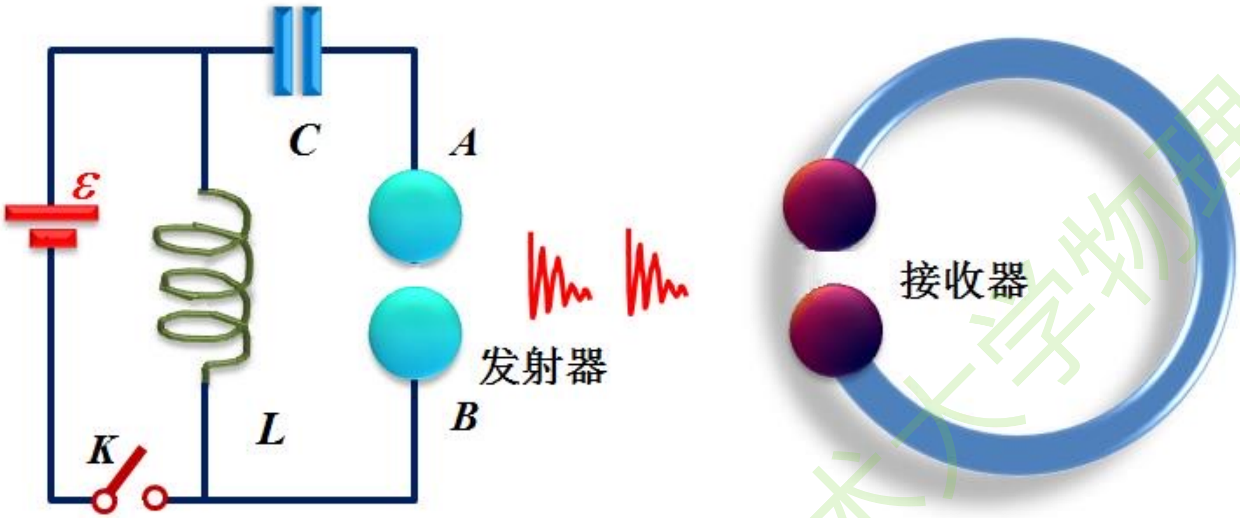
波速：
$$v = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Big/ \frac{\mu_0}{4\pi}} = \sqrt{9\times 10^9 / 1\times 10^{-7}}$$
$$= 3\times 10^8 m/s = c$$

"我们不可避免地推论，光是媒介中起源于电磁现象的横波"





赫兹实验



- 1887年，赫兹发现了电磁波，并测量了电磁波的速度。
- 实验证明电磁波是平面偏振波，电场平行导线，磁场垂直导线。
- 证实了麦克斯韦的电磁理论！

平面电磁波的性质

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\dfrac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2\vec{E}\\[2ex]\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=\dfrac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2\vec{H}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{E}=\vec{E}_0e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\\\vec{H}=\vec{H}_0e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=-i\omega,\nabla=i\vec{k}$$

$$\begin{cases}\left(\omega^2-\dfrac{k^2}{\mu\varepsilon}\right)\vec{E}=0\\[2ex]\left(\omega^2-\dfrac{k^2}{\mu\varepsilon}\right)\vec{H}=0\end{cases}$$

$$v=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{c}{n}$$

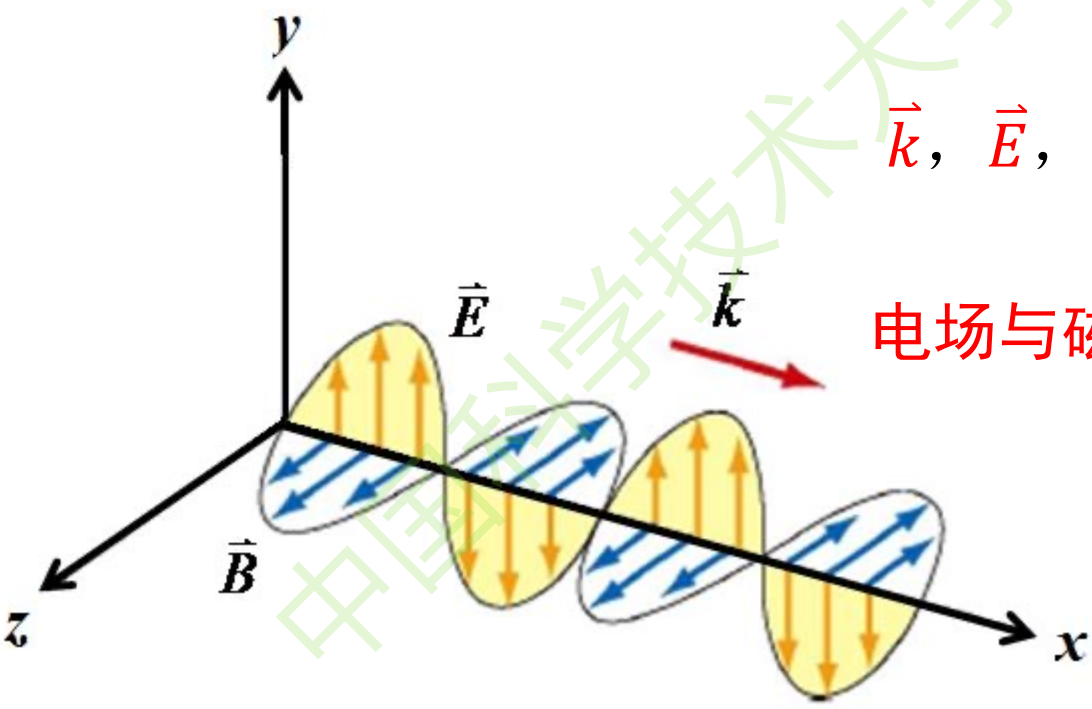
$$n=\frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$$

折射率

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

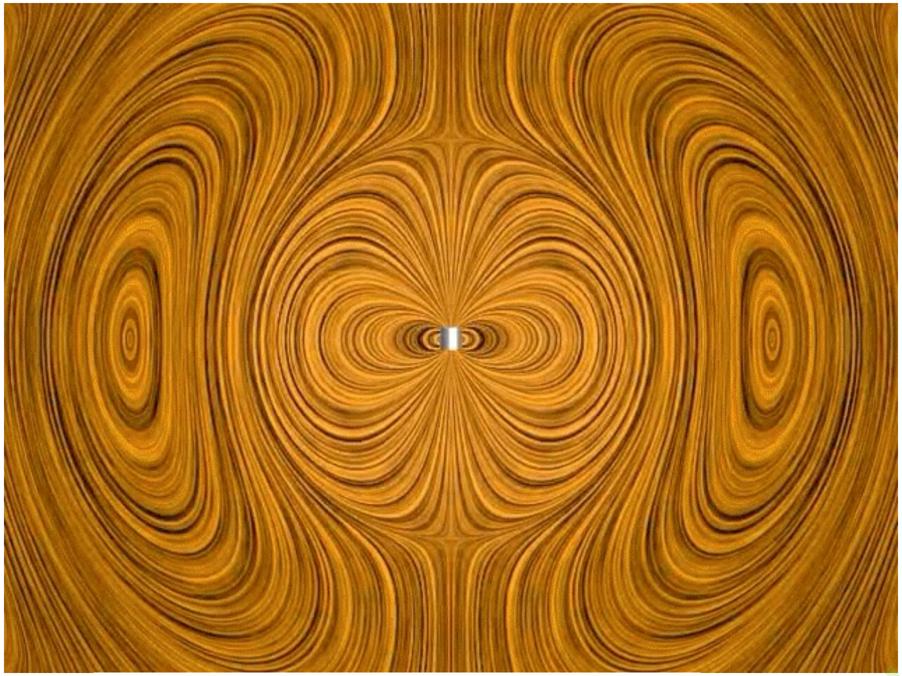
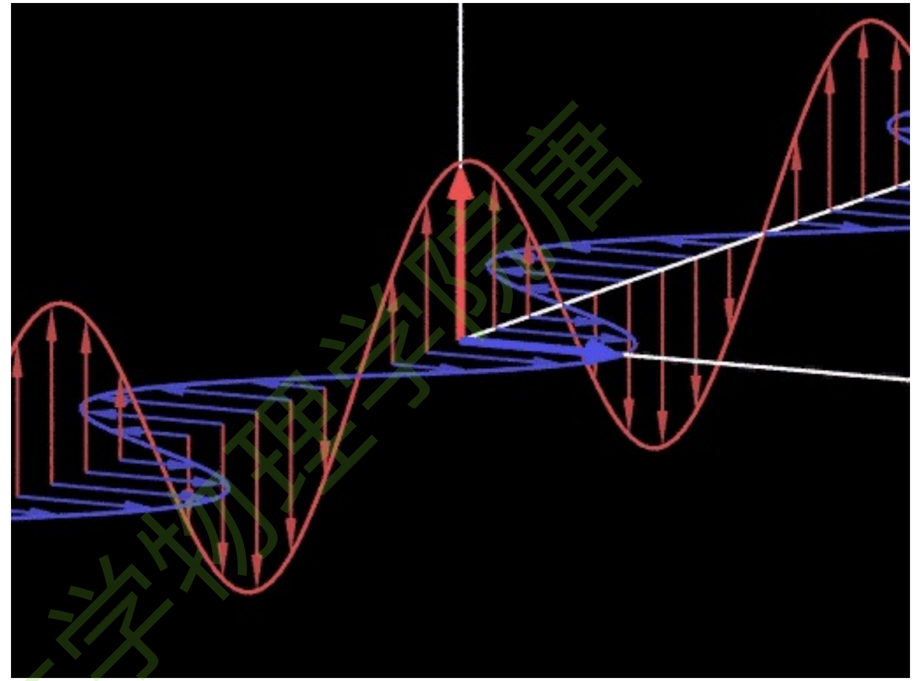
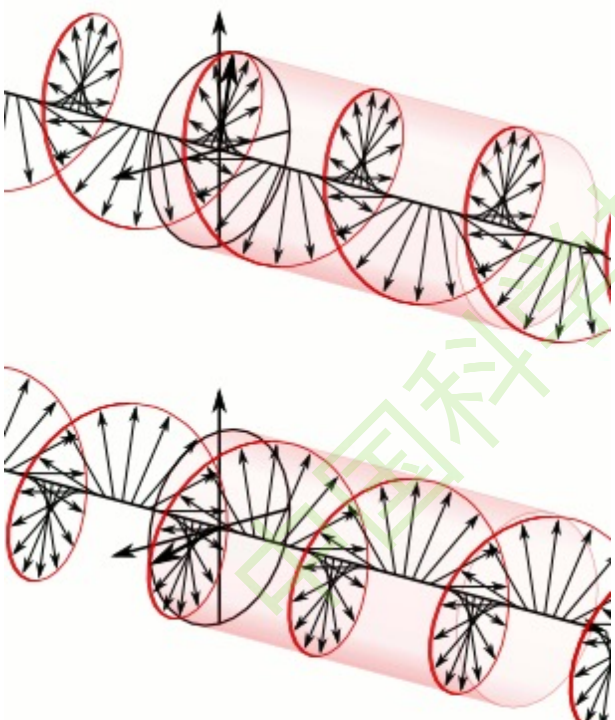
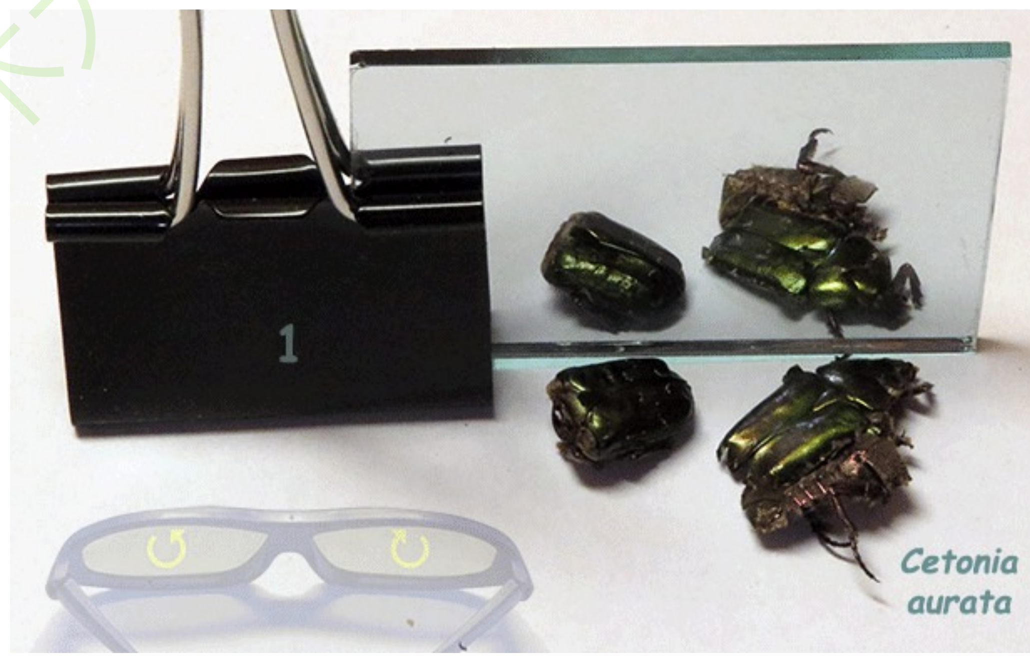
$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega, \nabla = i\vec{k}$$

$$\begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \ \vec{k} \cdot \vec{H} = 0 \\ \vec{k} \times \vec{E} = \mu\omega\vec{H} \\ \vec{k} \times \vec{H} = -\varepsilon\omega\vec{E} \end{cases}$$



$\vec{k}$，$\vec{E}$，$\vec{H}$构成正交右手螺旋

电场与磁场为相互垂直的横波





1
Cetonia
aurata

$$\vec{k} \times \vec{E} = \mu\omega\vec{H}$$

$$kE = \mu\omega H$$

$$\frac{E}{\mu H} = \frac{\omega}{k} = v = \frac{c}{n}$$

$$\frac{E}{B} = \frac{c}{n}$$

任一点、任一时刻，介质中电场强度与磁感应强度的幅度之比为电磁波的传播速度，即介质中的光速

$$\frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$\varepsilon E^2 = \frac{B^2}{\mu}$$

$$\frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}BH$$

任一点、任一时刻，介质中电场能量密度与磁场能量密度相等

平面电磁波的性质

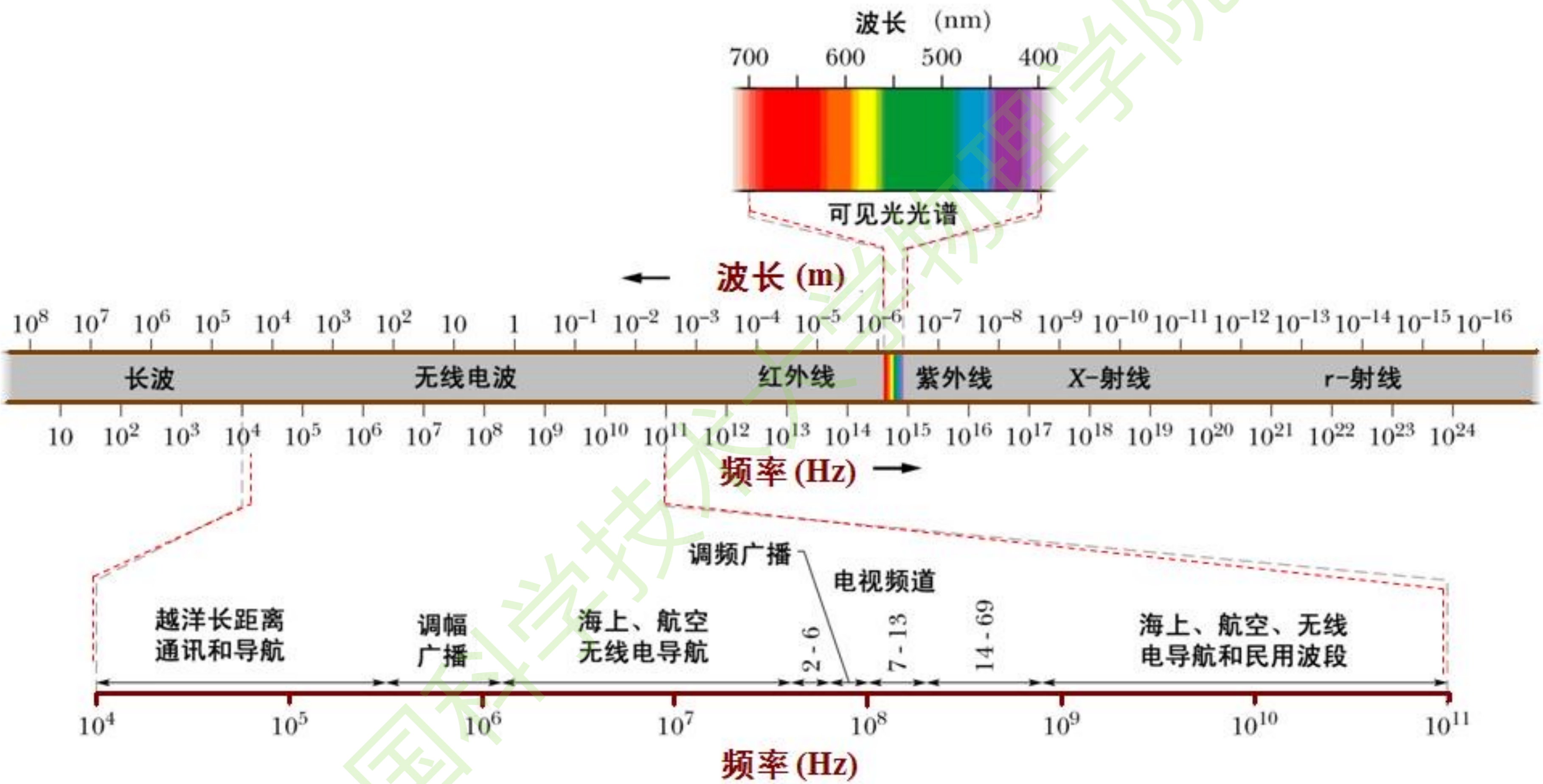
- 电磁波是横波$\vec{k} \perp \vec{E}$，$\vec{k} \perp \vec{H}$

- 电场强度与磁场强度相互垂直，且$\vec{k}$，$\vec{E}$，$\vec{H}$构成右手螺旋

- 电场强度与磁场强度的幅度之比为：$\frac{E}{B} = \frac{E_0}{B_0} = \frac{c}{n}$

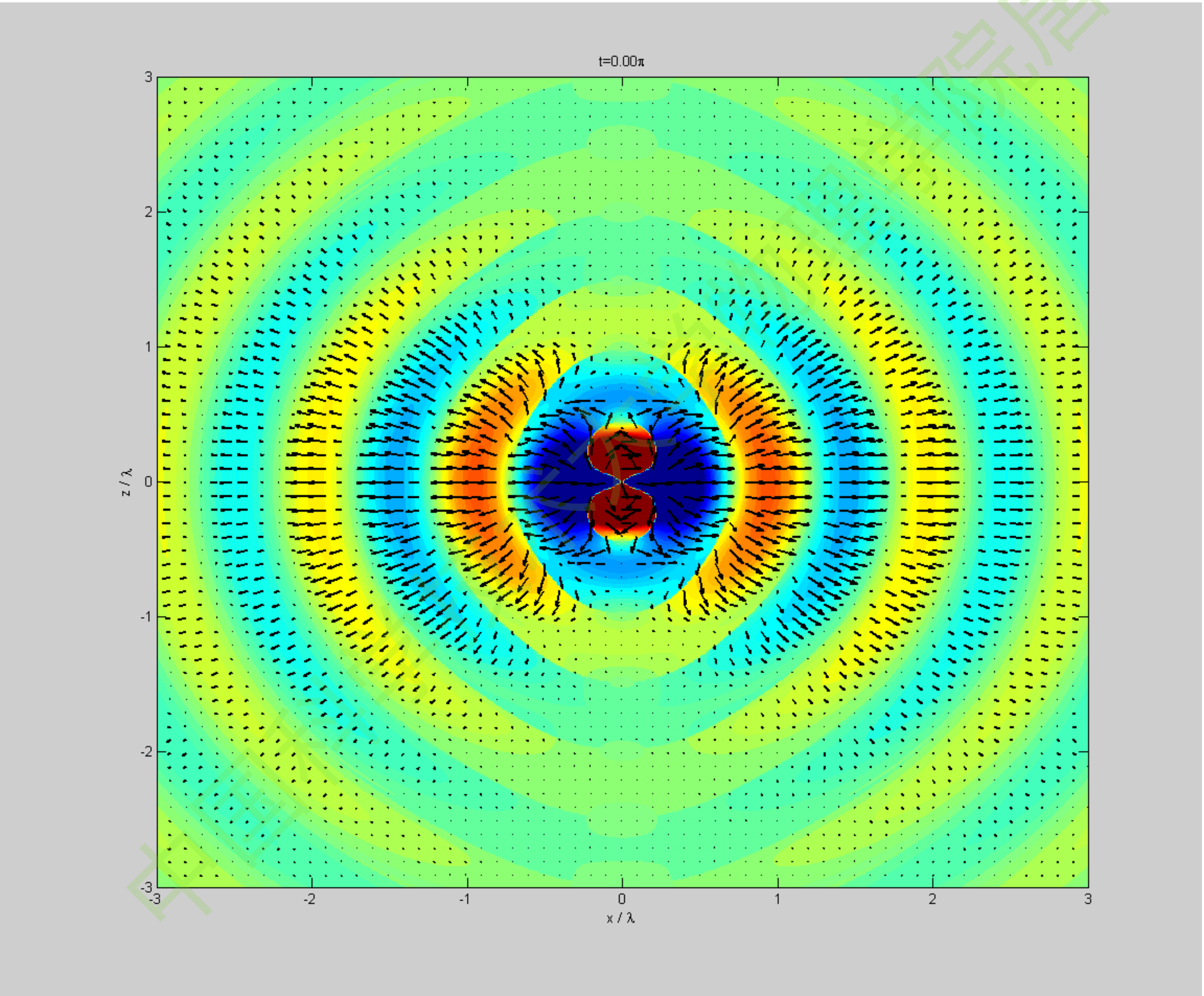
- 传播速度：$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$

电磁波谱



波长 (nm)
700
600
500
400
可见光光谱
波长 (m)
10⁸ 10⁷ 10⁶ 10⁵ 10⁴ 10³ 10² 10 1 10⁻¹ 10⁻² 10⁻³ 10⁻⁴ 10⁻⁵ 10⁻⁶ 10⁻⁷ 10⁻⁸ 10⁻⁹ 10⁻¹⁰ 10⁻¹¹ 10⁻¹² 10⁻¹³ 10⁻¹⁴ 10⁻¹⁵ 10⁻¹⁶
长波
无线电波
红外线
紫外线
X-射线
r-射线
10 10² 10³ 10⁴ 10⁵ 10⁶ 10⁷ 10⁸ 10⁹ 10¹⁰ 10¹¹ 10¹² 10¹³ 10¹⁴ 10¹⁵ 10¹⁶ 10¹⁷ 10¹⁸ 10¹⁹ 10²⁰ 10²¹ 10²² 10²³ 10²⁴
频率 (Hz)
调频广播
电视频道
越洋长距离通讯和导航
调幅广播
海上、航空无线电导航
2-6
7-13
14-69
海上、航空、无线电导航和民用波段
10⁴ 10⁵ 10⁶ 10⁷ 10⁸ 10⁹ 10¹⁰ 10¹¹
频率 (Hz)

§ 8.5 电磁场的能量和能量传输



电磁场的能量

静电场的能量密度：

$$w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

静磁场的能量密度：

$$w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} = \frac{1}{2\mu}B^2$$

电磁场的能量密度：

$$\widetilde{w} = w_e + w_m = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} + \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2$$

电磁场能量的变化

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{2}\vec{E}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2\mu}\vec{B}\cdot\vec{B}\right)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}=\varepsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}+\frac{1}{\mu}\vec{B}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}=\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}-\vec{j}_0\right)-\vec{H}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)$$

$$=\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)-\vec{H}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)-\vec{j}_0\cdot\vec{E}$$

$$=-\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)-\vec{j}_0\cdot\vec{E}$$

定义： $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ 称为波印廷矢量（Poynting Vector）

$$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}=-\nabla\cdot\vec{S}-\vec{j}_0\cdot\vec{E}$$

某一体积V内电磁场能量单位时间损失：

$$-\frac{\partial W}{\partial t}=-\iiint_V\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}dV=\iiint_V(\nabla\cdot\vec{S})dV+\iiint_V(\vec{j}_0\cdot\vec{E})dV$$

$$-\frac{\partial W}{\partial t}=\oiint_A\vec{S}\cdot d\vec{A}+\iiint_V(\vec{j}_0\cdot\vec{E})dV$$

能流密度

对于真空中的电磁场，$\vec{j}_0=0$

$$-\frac{\partial W}{\partial t}=\oint\!\!\!\oint_A \vec{S}\cdot d\vec{A}$$

单位时间电磁场的能量损失等于波印廷矢量的通量

对比电荷守恒定律：

$$-\frac{\partial Q}{\partial t}=\oint\!\!\!\oint_A \vec{j}\cdot d\vec{A}$$

电流密度：单位时间流过单位（垂直）面积的电荷

波印廷矢量：单位时间流过单位（垂直）面积的能量

称为能流密度

当空间中有传导电流时：

$$-\frac{\partial W}{\partial t}=\oiint_A \vec{S}\cdot d\vec{A}+\iiint_V (\vec{j}_0\cdot\vec{E})dV$$

电功率密度：

$$p=\vec{j}_0\cdot\vec{E}$$

电磁场能量不光是有一部分流出了表面，还有一部分通过电场做功消耗掉了。

对纯电阻介质，电场做功转换为焦耳热。

$$p=\frac{j_0^2}{\sigma}$$

对其他情况，电场做功可转换成机械能等。

平面电磁波的能量

$$\tilde{w} = w_e + w_m = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2$$

$$\frac{E}{B} = \frac{\omega}{k} = v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

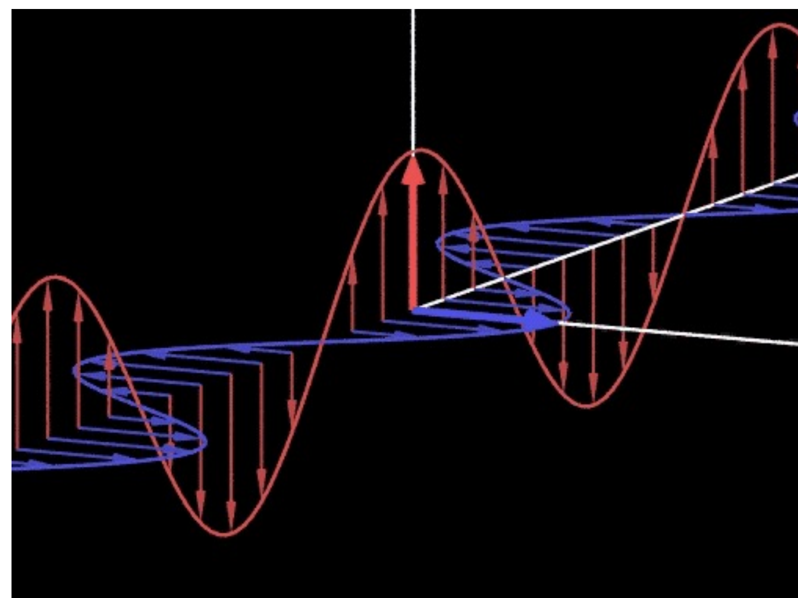
$$w_e = w_m$$

$$\tilde{w} = \varepsilon E^2 = \frac{B^2}{\mu}$$

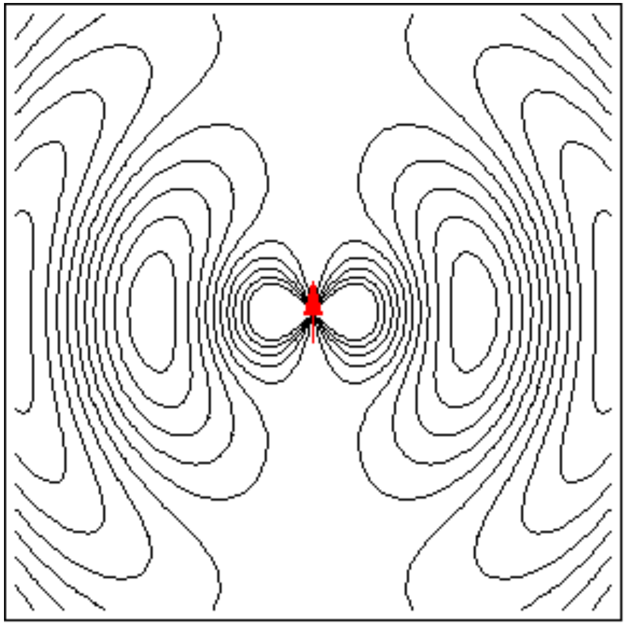
$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ 方向与$\vec{k}$正好相同

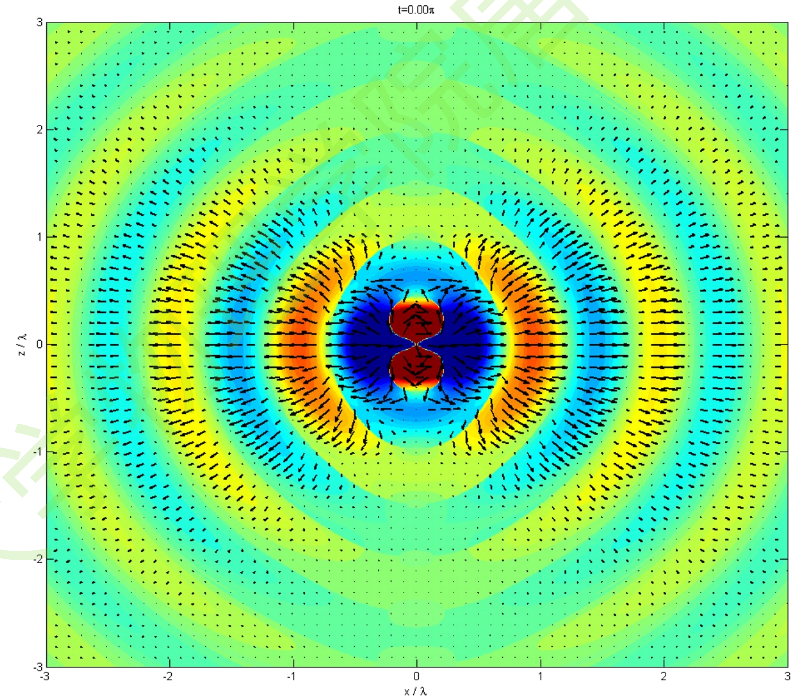
$$S = EH = vBH = \tilde{w}v$$

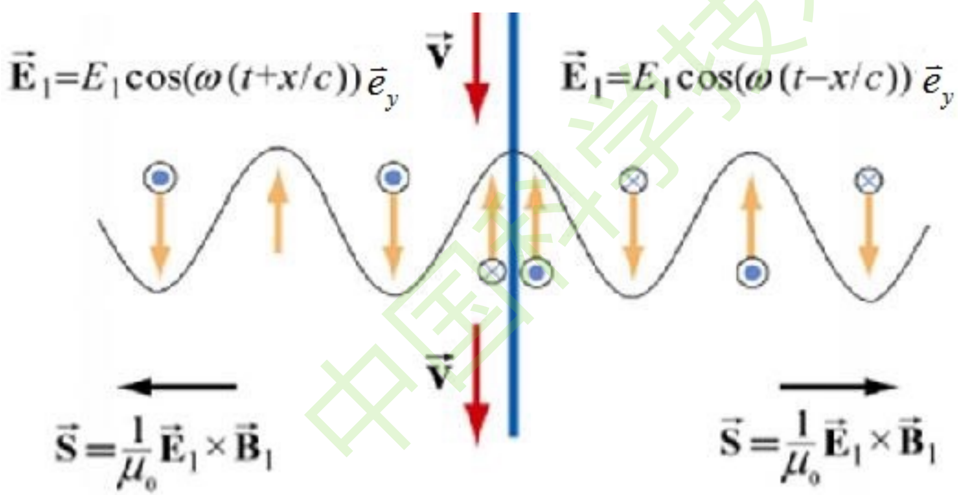
能量沿着波传播的方向流动



电偶极谐振子的能量传输

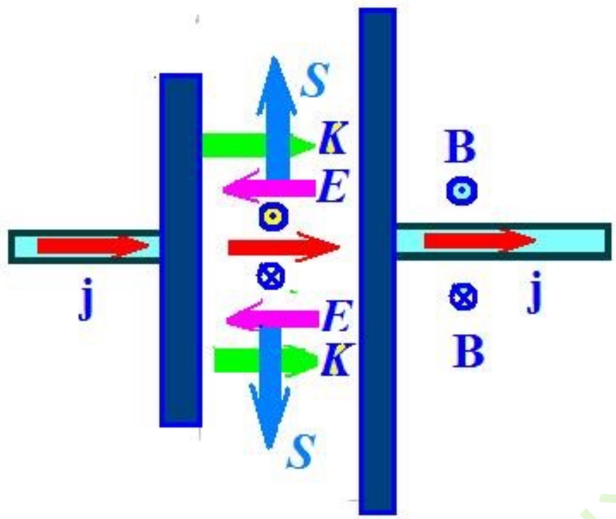




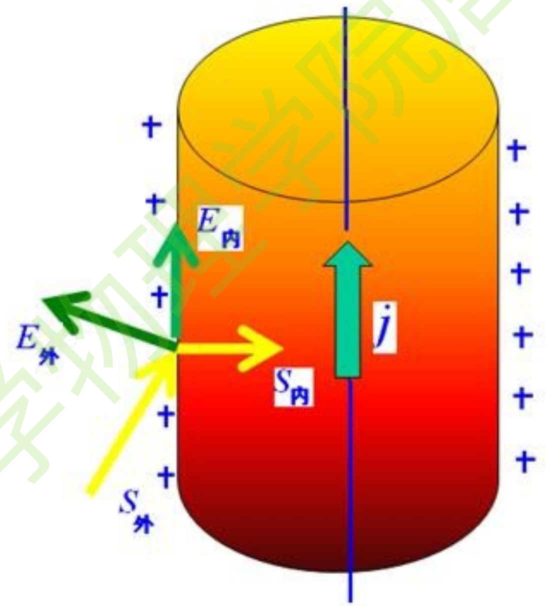


两个相反方向的平面电磁波

电路中的能量流动



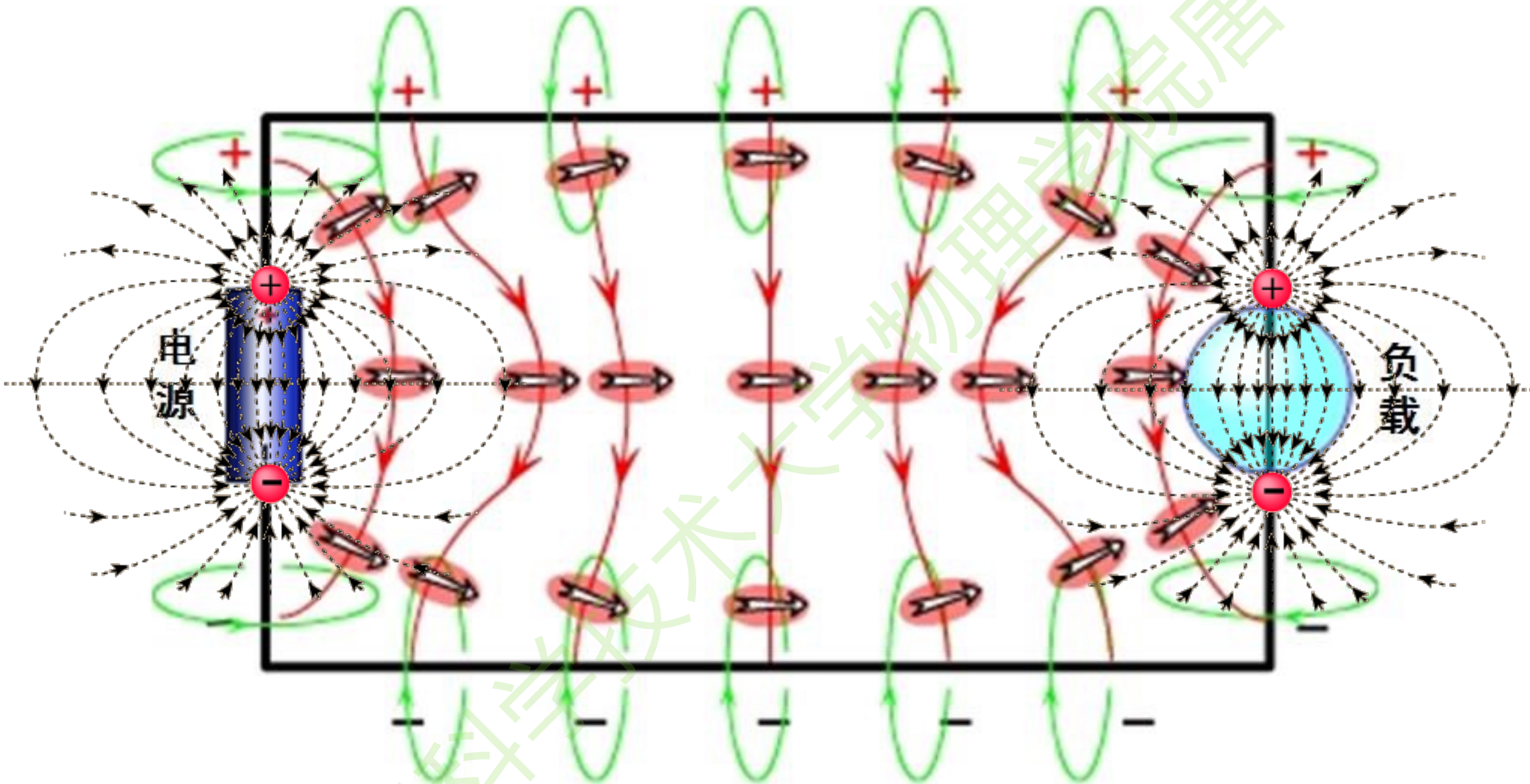
(a) 电源内部



(b) 导线内外部

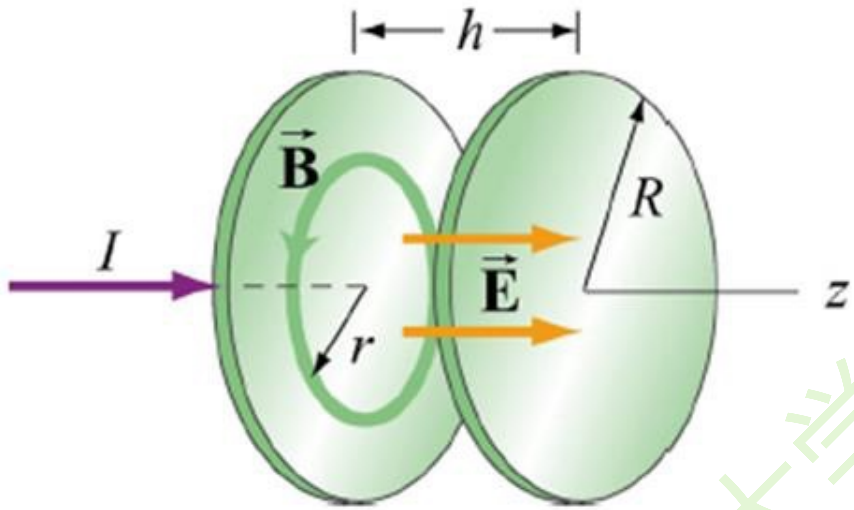
- 非静电力对电磁场做正功
- 电场做负功，焦耳热
- 合力对电磁场做正功
- 能量沿垂直方向流出

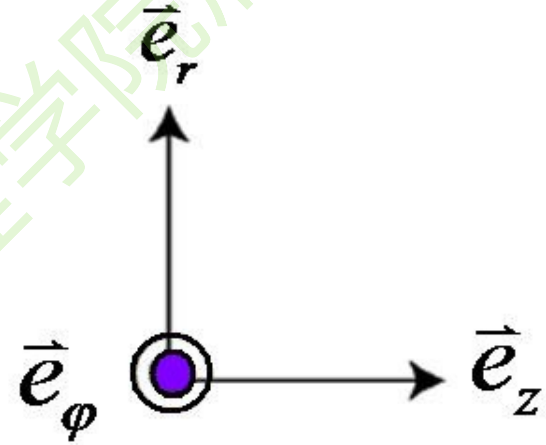
- 在内部，能量垂直流入，转化为焦耳热
- 在外部，能量基本沿导线方向流动，少部分流入（电阻越大，比例越大）



- 如果没有导线，就没有电流，没有磁场，电磁场能量不流动
- 能量主要通过导线周围的介质传播，导线只是引导方向

电容充电时的能量传输





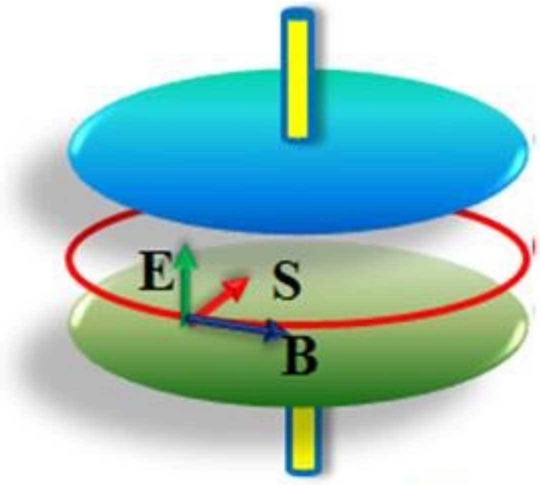
$$\vec{E} = \frac{\sigma_e}{\varepsilon}\vec{e}_z = \frac{Q}{\pi R^2 \varepsilon}\vec{e}_z$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{\pi R^2}\vec{e}_z$$

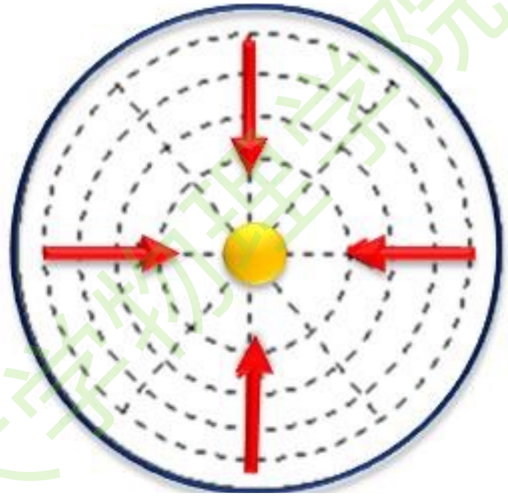
$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = 0 + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\vec{H} = \frac{r}{2}\frac{1}{\pi R^2}\frac{dQ}{dt}\vec{e}_\varphi = \frac{Ir}{2\pi R^2}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{Q}{\pi R^2\varepsilon}\frac{Ir}{2\pi R^2}\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi=-\frac{IQr}{2\pi^2\varepsilon R^4}\vec{e}_r$$



(a)



单位时间从边界流入的能量为 $$P=-S\cdot 2\pi Rh=\frac{IQh}{\pi\varepsilon R^2}$$

电容器总能量： $$W_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2\cdot\pi R^2h=\frac{Q^2h}{2\pi\varepsilon R^2}$$

单位时间能量改变： $$\frac{dW_e}{dt}=\frac{Qh}{\pi\varepsilon R^2}\frac{dQ}{dt}=\frac{IQh}{\pi\varepsilon R^2}=P$$

注意： 忽略了涡旋电场和磁场的能量

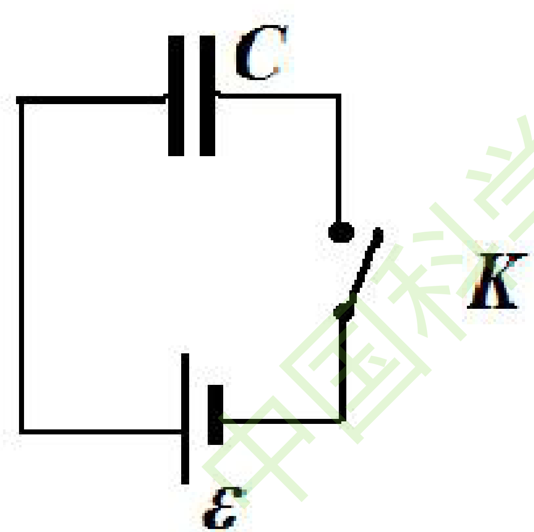
RC电路

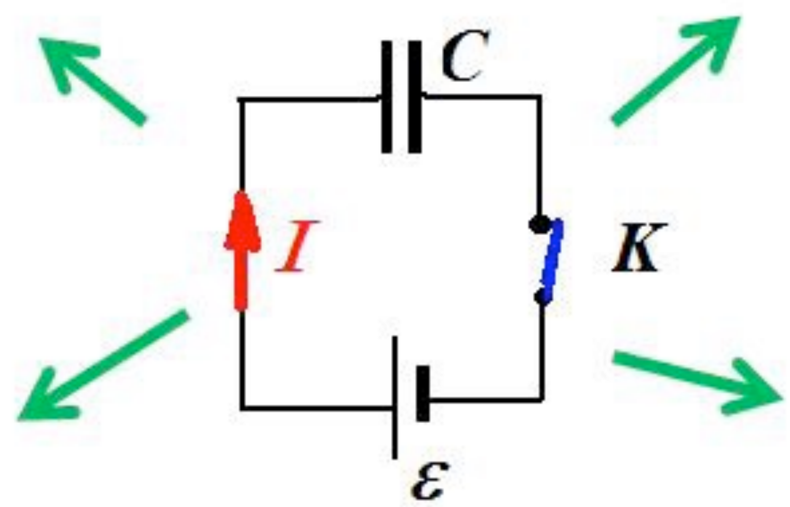
当电源电动势恒定时，电源做功总是一半给电容，一半给电阻

如果电阻为0，电阻不产生焦耳热，另一半能量哪里去了？

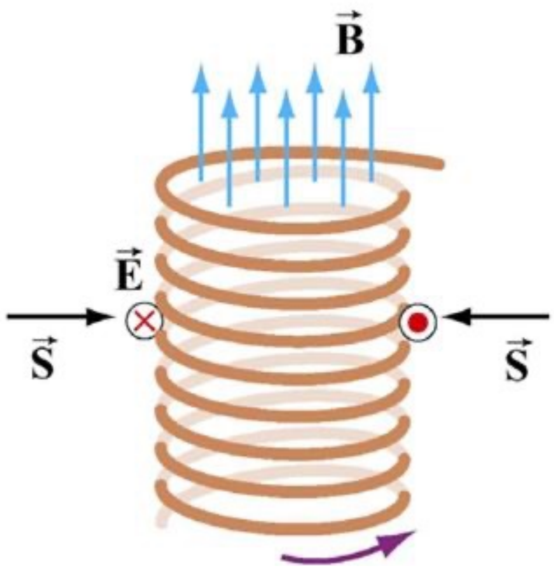
通电瞬间，电流极大，电场变化很大，磁场很大。此时磁场和涡旋电场不能忽略。

能量通过电磁波的形式辐射出去了。（类似电偶极子）





螺线管中的能量传输



$$\vec{B} = \mu n I \vec{e}_z$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{E} = -\frac{r}{2}\mu n \frac{dI}{dt}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = -\frac{r}{2}\mu n \frac{dI}{dt} \cdot nI\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = -\frac{\mu n^2 r I}{2}\frac{dI}{dt}\vec{e}_r$$

单位时间流入侧面的能量：

$$P = -S2\pi Rh = \mu n^2 I \frac{dI}{dt}\pi R^2 h$$

$$\frac{dW_m}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu nI \cdot nI\right)\pi R^2 h = \mu n^2 I \frac{dI}{dt}\pi R^2 h = P$$

电磁波的动量

电磁波具有能量，也具有动量

动量密度：

$$\vec{g} = \frac{\tilde{w}}{c}\vec{e}_S = \frac{\vec{E}\times\vec{H}}{c^2} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

光压：

$$P = \frac{S}{c}(1+r)$$

$$r = \frac{S_{反}}{S_{入}}$$