第2章 静电场中的物质与电场能量

1

物质的电性质

物质导电性能

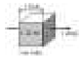
- 各种物质电性质不同
- 早在1729年，英国人格雷发现金属和丝绸的电性质不同
  - 金属能很快把电荷转移到别的地方，但自己不带电
  - 丝绸不能转移电荷，但是可以带电
- 不同物质中，或者同一种物质在不同环境下，电子的状态不一样，导致自由电荷的转移能力差别很大，物质的导电性能迥异。

2

电阻率

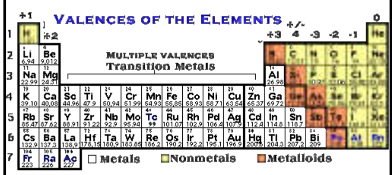
Resistor
Resistivity

电阻： $R=\frac{U}{I}$ 单位：Ω

电阻率： $\rho=\frac{RS}{l}$  单位：Ωm

- 电阻率与物质的性质有关，与尺寸无关。
- 电阻率反映在一定温度压强条件下物质的导电能力，是物质的原子结构决定的属性。
- 根据电阻率，人们把材料分为导体、半导体和绝缘体。

3



4

1. 导体 (Conductor)

- 转移和传导电荷能力很强的材料，或者说电荷很容易在其中移动的物质。
- 电阻率在10^{-8}-10^{-6} Ωm之间
- 常见导体
  - 固体：金属、合金、石墨、人体、地等
  - 液态：电解液等
  - 气态：各种电离气体

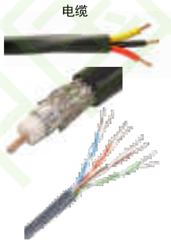
5

2. 绝缘体 (insulator)

- 转移和传导电荷能力很差的材料，或者说电荷在其中很难移动的物质。
- 电阻率在10^{6}-10^{18} Ωm之间
- 常见绝缘体
  - 固体：玻璃、橡胶、塑料、瓷器、云母、纸等
  - 液态：如各种油
  - 气态：未电离的各种气体

6

电缆



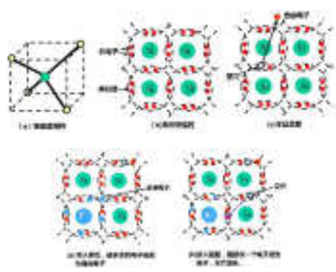
印刷线路板

7

3. 半导体 (Semiconductor)

- 半导体材料的导电性能介于导体与绝缘体之间。
- 电阻率在10^{-6}-10^{6} Ωm之间
- 常见半导体有
  - Si, Ge
  - GaP, InSb, InAs,GaSb,GaAs, GaN, SiC.

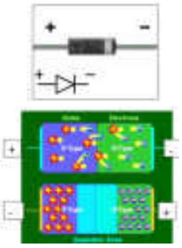
8

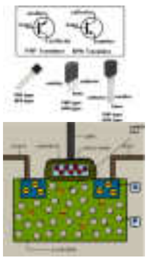


9

二极管

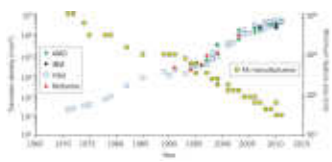
晶体管





10

晶体管的发展



11

4. 超导体 (Superconductor)

- 某些金属或合金的温度降到接近绝对零度时，其电阻突然变为零或接近于零，这种现象称为超导电现象。
- 现代超导重力仪的观测表明，超导态物体的电阻率必定小于10^{-28} Ω m，远远小于正常金属迄今所能达到的最低电阻率10^{-8} Ωm，因此，可以认为超导态的电阻率确实为零。

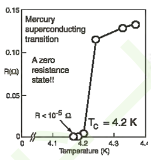
12

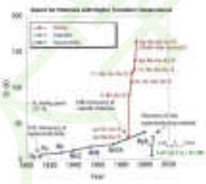
K. Onnes教授(1853-1926年)，荷兰莱登实验室

- 1895：空气被液化81K
- 1898：氢气被液化20K
- 1908：氦气被液化4. 25K
- 1911：发现水银在4. 22～4. 27K电阻消失

- 1913年获诺贝尔物理学奖（60岁）
- 29岁：莱登大学教授
- 30岁：阿姆斯特丹皇家科学院院士
- “绝对零度先生”

13



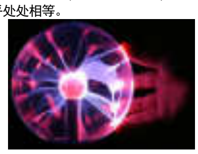


2008年中国科学技术大学物理学院陈仙辉教授发现铁基新超导体。

14

5. 等离子体 (Plasma)

- 等离子体是部分或完全电离的气体，由大量自由电子和正离子以及中性原子、分子组成。
- 物理性质主要由电磁相互作用决定。
- 等离子体在宏观上是近似电中性的，即从宏观上说，所含的正电荷与负电荷几乎处处相等。
- 物质的第四态。



15

第2章 静电场中的物质与电场能量

§ 2. 1 静电场中的导体
§ 2. 2 电容与电容器
§ 2. 3 静电场中的介质
§ 2. 4 静电场的能量

16

§ 2.1 静电场中的导体

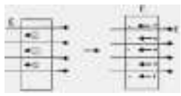
17

§ 2.1.1 静电平衡 Electrostatic equilibrium

将导体放入静电场时

自由电子在电场作用下作定向运动 ➔ 电荷聚集在导体表面

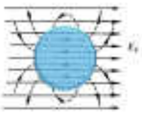
➔ 导体表面电荷产生感应电场，在导体中逐渐抵消原电场



直到导体中电场强度为零

达到**静电平衡**

18

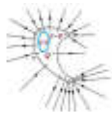


(a) 感应电荷在球内的场强与外场强
在球内的场强大小相等方向相反

19

静电平衡导体的电荷分布

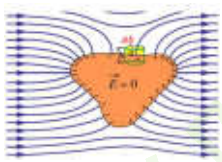
- 导体内部体电荷密度处处为零
- 电荷只分布在导体表面很薄的一层
- 导体表面的电荷分布与曲率半径有关：
  - 尖的地方电荷密度大
  - 平坦的地方电荷密度小



20

静电平衡导体的电场分布

- 导体内部电场处处为零
- 导体表面的电场与表面垂直，场强大小为σ/ε_0

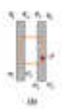


$$\Phi = E\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

21

例2.1：
两块相同大小的导体板平行放置，相距很近，忽略边缘效应。若带电量分别为Q_1和Q_2，求4个导体表面上的电荷。



作如图高斯面:

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

P点电场强度:

$$E = \frac{\sigma_1 + (\sigma_2 + \sigma_3) - \sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_4$$

$$q_1 = q_4 = \frac{\sum q_i}{2} = \frac{Q_1 + Q_2}{2}$$

$$q_2 = Q_1 - q_1 = \frac{Q_1 - Q_2}{2} \quad q_3 = -q_2 = \frac{Q_2 - Q_1}{2}$$

22

§ 2.1.2 静电屏蔽 Electrostatic Shielding

腔外不影响腔内

空腔内无电荷时

- 空腔内场强处处为零
- 空腔外的导体和场源不影响空腔内的物体
- **静电屏蔽**

23

腔内却影响腔外

空腔内有电荷时

- 腔内腔外均有电场
- 内表面总电量与腔内电量大小相等，符号相反
- 外表面总电量与腔内电量相等
- 腔外电场只取决于电荷总量和空腔外表面形状

24

屏蔽腔内电荷 ➔ 将外表面做得无限大 ➔ **接地！**

- 腔外不影响腔内，腔内不影响腔外

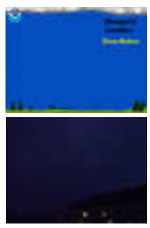
25

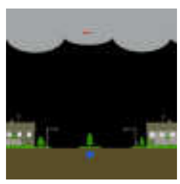
屏蔽室

26

§ 2.1.3 静电的应用

雷电





27

§ 2.1.3 静电的应用

避雷针

28

气体放电灯

IMAX 投影氙气大灯　　汽车氙气大灯

29

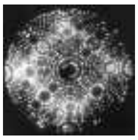
憎水性带电作业屏蔽服又叫等电位均压服，是采用均匀的导体材料和纤维材料制成的服装。其作用是在穿用后，使处于高压电场中的人体外表面各部位形成一个等电位屏蔽面，从而防护人体免受高压电场及电磁波的危害。

30

场致发射显微镜

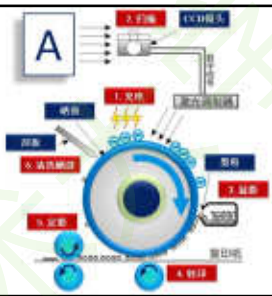
200万倍放大率

第一个看到原子的人



31

静电复印



32

§ 2.2 电容与电容器

33

§ 2.2.1 导体的电容

Capacitor: A device used to store an electric charge.

1. 孤立导体的电容

- 静电平衡孤立导体的表面电荷相对分布由其几何形状唯一确定。
- 如果导体几何形状不变，电场强度与带电量成正比。
- 如果导体几何形状不变，导体的电势与带电量成正比。

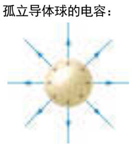
$Q = CU$　　$C = Q/U$

- C 即为孤立导体的电容 (Capacitance)。反映了导体在给定电势下的储存电量的能力。
- 只与导体的几何形状与尺寸有关。与电荷及电势无关。

34

- 电容的单位为法拉(F)；1 F=1 C·V^{-1}

孤立导体球的电容：



$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$C = \frac{q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

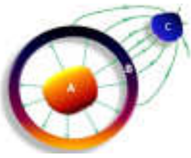
$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ F/m$$

孤立地球的电容：$C = 7 \times 10^{-4}\ F = 0.7\ mF$

毫法(1 mF=10^{-3} F)，微法 (1 μF=10^{-6} F)，
纳法 (1 nF=10^{-9} F)，皮法(1 pF=10^{-12} F)。

35

2. 电容器

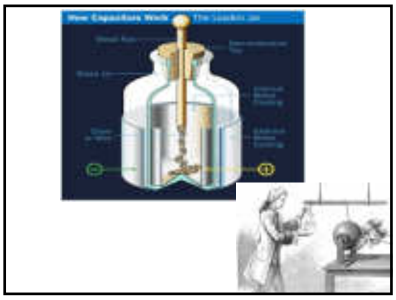


"外"不影响"内"

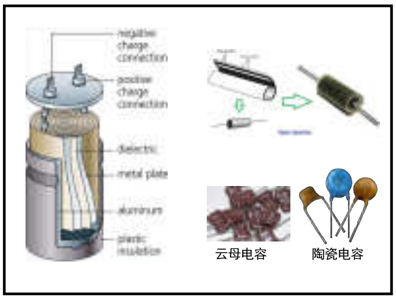
- A与B之间的电势差只与A的电量有关
- B的内表面与A带等量相反电荷

$C = Q/\Delta U$

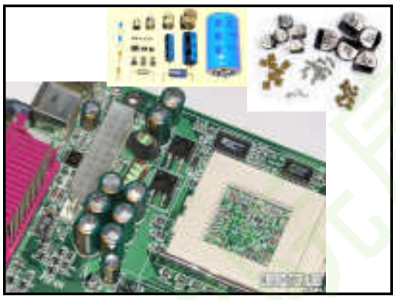
36



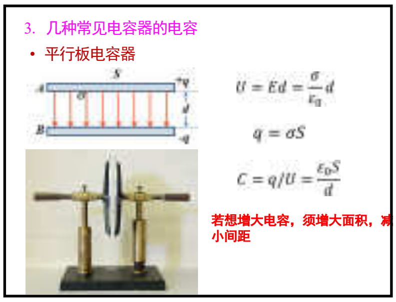
37



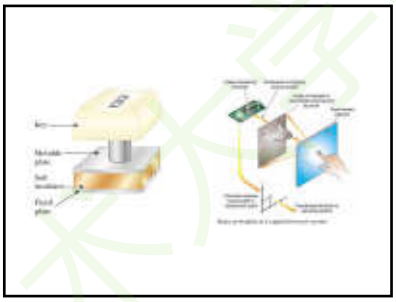
38



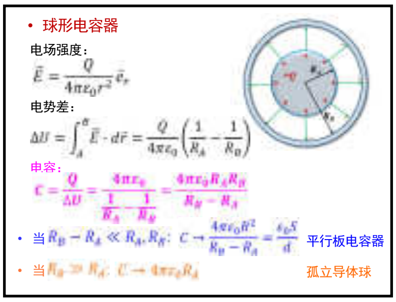
39



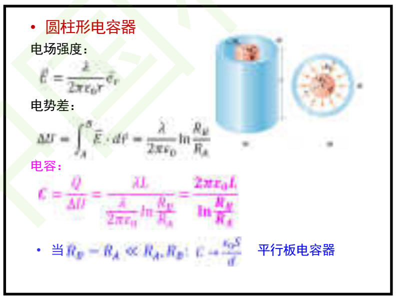
40



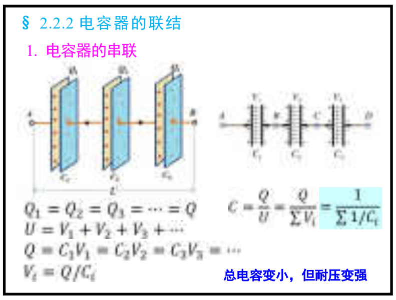
41



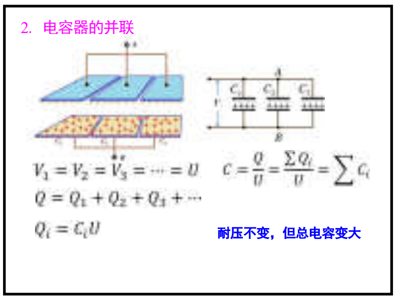
42



43



44



45

【例2.8】求两个相距为d的导体球之间的电容。设两个球的半径分别为a和b，且$d \gg a$，$d \gg b$。

两个球相距很远，忽略静电感应

a球的电势为两个电荷产生电势的代数和叠加：

$$U_a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d}\right)$$

同理可得b球的电势：

$$U_b = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right)$$

46

$$\Delta U = U_a - U_b = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d}\right)$$

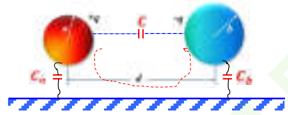
$$C = q/\Delta U = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d}\right)}$$

当$d \to \infty$时：

$$C \to \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 b}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{C_a} + \frac{1}{C_b}}$$

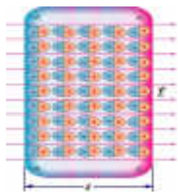
相当于两个孤立导体球电容的串联

47



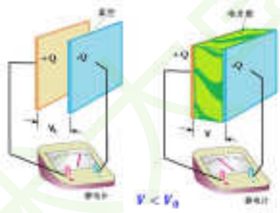
48

§ 2.3 静电场中的介质



49

§ 2.3.1 电介质材料 Dielectric material



$V < V_0$

50

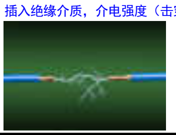
$C = Q/V$

- 插入绝缘介质，电容增大了

$$\frac{C'}{C} = \varepsilon_r$$

ε_r：相对介电常数　Relative Permittivity Dielectric Constant

- 插入绝缘介质，介电强度（击穿强度）也变大

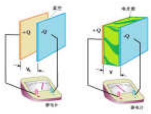


51

电介质	相对介电常数 (ε_r)	介电强度 (kV•mm-1)
干燥空气	1.0006	4.7
蒸馏水	81.0	30
硬纸	5.0	15
玻璃	7.0	15
石英玻璃	4.2	25
云母	6.0	80
聚乙烯	2.3	18
聚四氟乙烯	2.0	35

52

为什么电介质会增加电容？



$Q = Q_0$

$V < V_0$　电势差变小了

$V = Ed$

d没有变化，只能是电场强度E变小了

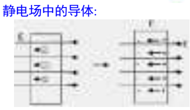
$0 < E < E_0$

为什么电场强度会变小？

53

为什么电场强度会变小？　$Q = Q_0$??

静电场中的导体:



$E = E_0 + E'$

导体中的自由电子在外电场E_0下运动，在表面产生电荷，形成附加电场E'，完全抵消外电场

$E' = -E_0$，$E = 0$

电荷分布发生了改变，导致电场强度的改变　$Q \neq Q_0$

静电场中的电介质:

$0 < E = E_0 + E' < E_0$

54

静电场中的电介质

$0 < E = E_0 + E' < E_0$

1. 电介质必定是绝缘体

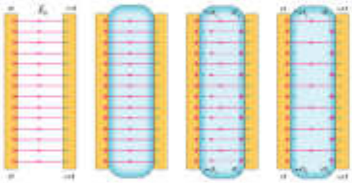
纸张、空气、玻璃、熔融石英、琥珀、云母、聚乙烯等等

2. 电介质的电荷分布被外电场所改变，产生了附加电场，部分抵消外电场。

【电介质与电场相互作用】

55

§ 2.3.2 电介质的极化 Dielectric polarization

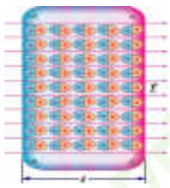


在外电场下，电介质表面出现极化电荷，产生极化电场，部分抵消外电场。这一现象称为电介质的“极化”。

56

附加电场是怎么产生的？

电偶极子！！

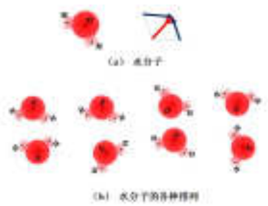


电介质表面出现极化电荷

57

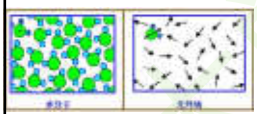
- 极性电介质

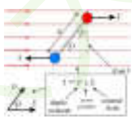
正电荷中心与负电荷中心不重合，分子具有固有电偶极矩



58

取向极化



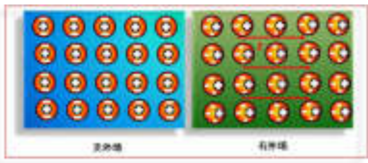


59

- 非极性电介质

正电荷中心与负电荷中心重合，分子没有固有电偶极矩

位移极化



极性电介质也有位移极化，但是比取向极化小一个数量级

60

极化强度 Polarization Vector

如何定量描述定介质极化的强弱？

定义：极化强度为单位体积内分子电偶极矩的矢量和

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V} = n\langle\vec{p}\rangle$$

极化强度反映了电介质极化的大小和方向

如果在电介质中$\vec{P}$处处相同，则电介质为均匀极化

如果电介质内部某点领域的物理特性在所有方向上都相同，及电介质特性与外加电场的方向无关，则为各向同性电介质

61

- 对于各向同性电介质:

极化强度$\vec{P}$必然平行于产生他的外电场$\vec{E}$

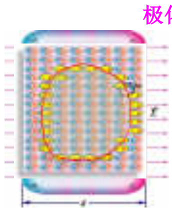
$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V} = n\langle\vec{p}\rangle = \chi\varepsilon_0\vec{E}$$

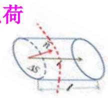
χ为材料的极化率，由电介质的性质决定 Electric susceptibility

χ决定了材料的相对介电常数ε_r

62

极化电荷





$\vec{n}$为面元ΔS的法向方向

圆柱侧面沿极化强度$\vec{P}$

圆柱侧面长度为电偶极子长度

$$l = \vec{p}/q$$

圆柱体以外的电偶极子对体积V的电荷贡献为零

圆柱体以内的每个电偶极子对体积V的电荷贡献为-q

63

圆柱体中净电荷：

$$dq' = n(-q)dV = -nqldS\cos\theta$$
$$= -npdS\cos\theta = -n\vec{p}\cdot d\vec{S} = -\vec{P}\cdot d\vec{S}$$

体积V中总电荷：

$$Q' = -\oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{S} = -\iiint_V (\nabla\cdot\vec{P})dV$$

$$Q' = \iiint_V \rho' dV \qquad \boxed{\rho' = -\nabla\cdot\vec{P}}$$

对于均匀介质，介质内部不存在极化电荷

64

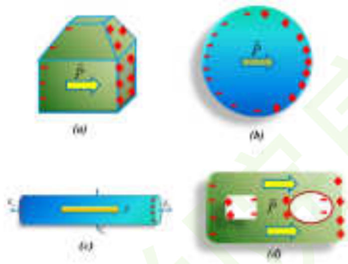
极化电荷只存在介质交界面上

$$Q' = -\oiint \vec{P}\cdot d\vec{S}$$
$$= -(\vec{P}_1\cdot\Delta\vec{S}_1 + \vec{P}_2\cdot\Delta\vec{S}_2 + \delta)$$
$$= -(-\vec{P}_1\cdot\vec{e}_n + \vec{P}_2\cdot\vec{e}_n)\Delta S + \delta$$
$$= -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)\cdot\vec{e}_n\Delta S + \delta \qquad \delta \xrightarrow{h\to 0} 0$$

$$\boxed{\sigma' = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)\cdot\vec{e}_n = P_{1n} - P_{2n}}$$

当电介质2为导体或真空时： $\boxed{\sigma' = P_{1n}}$

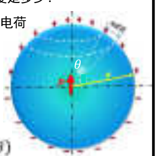
65



66

【例2.3】一个半径为a均匀极化的介质球，其电极化强度为$\vec{P}$，该介质球置于空气中，球心处的电场强度是多少？

【解】球内没有电荷，只有表面有极化电荷



极化电荷密度：

$$\sigma' = P_{1n} = P\cos\theta$$

球心处电场强度：

$$dE' = \frac{\sigma' a^2\sin\theta\, d\theta d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 a^2}(-\cos\theta)$$

$$E' = -\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\sin\theta(\cos\theta)^2 d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = -\frac{P}{3\varepsilon_0}$$

退极化电场　　极化强度→极化电荷分布→退极化电场

67

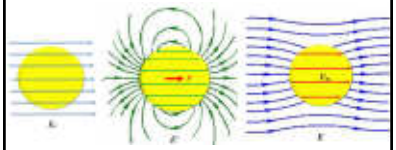
$$\begin{cases}\vec{E}' = \vec{E}'(\vec{P}) \\ \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'\end{cases} \qquad \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'(\vec{P})$$

已知：$\vec{E}_0$

未知：$\vec{P}$，$\vec{E}$，$\vec{E}'$

68

3. 极化强度与电场的关系



外电场$\vec{E}_0$→介质极化$\vec{P}$→极化电荷ρ'→退极化电场$\vec{E}'$→总电场$\vec{E}$

69

极化强度矢量***P***是总电场***E***的函数

- 对于各向同性电介质:

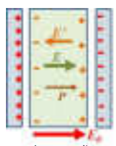
$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$$

方程组：　　　　解：

$$\begin{cases}\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \\ \vec{E}' = \vec{E}'(\vec{P}) \\ \vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{E} = \vec{E}(\vec{E}_0) \\ \vec{E}' = \vec{E}'(\vec{E}_0) \\ \vec{P} = \vec{P}(\vec{E}_0)\end{cases}$$

70

$$\sigma' = \pm P$$
$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{P}{\varepsilon_0}$$
$$\vec{E}' = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} = -\chi\vec{E}$$
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = \vec{E}_0 - \chi\vec{E}$$
$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{1+\chi} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$$



已知E_0, χ, 求E

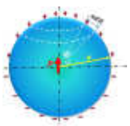
$$C = \varepsilon_r C_0$$

相对介电常数： $\varepsilon_r = 1 + \chi$

介电常数： $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$

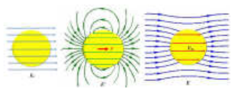
71

$$\begin{cases}\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' \\ \vec{E}' = \vec{E}'(\vec{P}) \\ \vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}\end{cases}$$



$$\vec{E}' = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} = -\frac{\chi}{3}\vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{1+\chi/3}$$



72

$$\begin{cases}\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'\\ \vec{E}'=\vec{E}'(\vec{P})\\ \vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{E}=\vec{E}(\vec{E}_0)\\ \vec{E}'=\vec{E}'(\vec{E}_0)\\ \vec{P}=\vec{P}(\vec{E}_0)\end{cases}$$

退极化电场与极化强度矢量的关系 $\vec{E}'=\vec{E}'(\vec{P})$
取决于电介质几何尺寸与形状

总电场也取决于电介质几何尺寸与形状
还取决于介质的介电常数。

73

§ 2.3.3 电介质的基本电学特性

1. 高斯定理

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho dV \qquad \nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint_S \varepsilon_0\vec{E}\cdot d\vec{S}=\iiint_V \rho dV=\iiint_V \rho_0 dV+\iiint_V \rho' dV$$

$$\iiint_V \rho' dV=-\oiint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}$$

$$\oiint_S(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})\cdot d\vec{S}=\iiint_V \rho_0 dV$$

74

引入辅助矢量

$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$ 称为电位移矢量
Electric displacement vector

$$\boxed{\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\iiint_V \rho_0 dV} \qquad \boxed{\nabla\cdot\vec{D}=\rho_0}$$

$\vec{P}=\chi\varepsilon_0\vec{E}$ $\qquad \vec{D}=(1+\chi)\varepsilon_0\vec{E}=\varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}$

称为电介质的本构方程

$\vec{P}=(\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0\vec{E}$

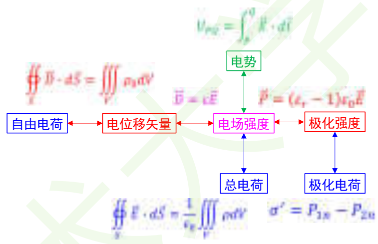
75

高斯定理

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho dV \qquad \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\iiint_V \rho_0 dV$$

电场强度由总电荷决定 电位移矢量由自由电荷决定

76



77

【例 2.4 】平行板电容器内充满两层均匀电介质，电容器所加电压为U。求：（1）电容器的电容；（2）介质表面上的极化电荷和总电荷密度。

【解】设极板上自由电荷密度为$\pm\sigma_0$

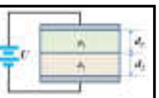
则两种电介质中的电位移矢量为：

$$D_1=D_2=\sigma_0$$

可得电场强度为：

$$E_1=\frac{D_1}{\varepsilon_1}=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_1} \qquad E_2=\frac{D_2}{\varepsilon_2}=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_2} \qquad \boxed{\frac{E_1}{E_2}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

78

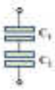


电势差为：

$$U=E_1d_1+E_2d_2=\sigma_0\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)$$

电容为： $C=\frac{Q}{U}=\frac{\sigma_0 S}{\sigma_0\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)}=\frac{\varepsilon_0 S}{\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}}+\frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}\right)}$

两个电容串联：

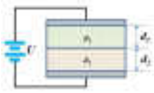


$$C_1=\frac{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0 S}{d_1} \qquad C_2=\frac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0 S}{d_2}$$

$$C=\frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}}=\frac{\varepsilon_0 S}{\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}}+\frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}\right)}$$

79

上极板与电介质1交界面处的电荷：



- 自由电荷密度：

$$\sigma_0=CU/S$$

- 极化电荷密度：

$$\sigma'=-P_1=-(\varepsilon_1-\varepsilon_0)E_1=-(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\frac{\sigma_0}{\varepsilon_1}=-\left(1-\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)\sigma_0$$

- 总电荷密度：

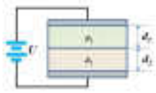
$$\sigma=\varepsilon_0E_1=\frac{\varepsilon_0\sigma_0}{\varepsilon_1}=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_{r1}}$$

$$\sigma=\sigma_0+\sigma'=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_{r1}}$$

总电荷密度小于自由电荷密度

80

下极板与电介质2交界面处的电荷：



- 自由电荷密度：

$$-\sigma_0=-CU/S$$

- 极化电荷密度：

$$\sigma'=P_2=(\varepsilon_2-\varepsilon_0)E_2=(\varepsilon_2-\varepsilon_0)\frac{\sigma_0}{\varepsilon_2}=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_{r2}}\right)\sigma_0$$

- 总电荷密度：

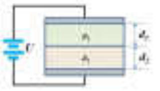
$$\sigma=-\varepsilon_0E_2=-\frac{\varepsilon_0\sigma_0}{\varepsilon_2}=-\frac{\sigma_0}{\varepsilon_{r2}}$$

$$\sigma=-\sigma_0+\sigma'=-\frac{\sigma_0}{\varepsilon_{r2}}$$

上极板总电荷密度不等于下极板

81

电介质1与电介质2交界面处的电荷：



- 自由电荷密度：

$D_2 - D_1 = 0$ $\boxed{D_1 = D_2}$

- 极化电荷密度：

$$\sigma' = -(P_2 - P_1) = -\left[\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r2}}\right)\sigma_0 - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)\sigma_0\right] = \left(\frac{1}{\varepsilon_{r2}} - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)\sigma_0$$

- 总电荷密度：

$$\sigma = \varepsilon_0(E_2 - E_1) = \varepsilon_0\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\sigma_0 = \left(\frac{1}{\varepsilon_{r2}} - \frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)\sigma_0 \neq 0$$

82

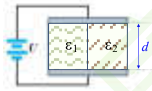
2. 环路定理

$\boxed{\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$ $\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}$

- 外电场具有无旋性
- 极化电荷产生的电场同样具有无旋性
- 总电场仍具有无旋性，满足环路定理

83

【例】平行板电容器内充满俩列均匀电介质，电容器所加电压为U。求：（1）电容器的电容；（2）介质表面上的极化电荷和总电荷密度。



【解】两种电介质中的电场强度为：

$E_1 = E_2 = \dfrac{U}{d}$ $\boxed{E_1 = E_2}$

则两种电介质中的电位移矢量为：

$D_1 = \varepsilon_1 E_1 = \dfrac{\varepsilon_1 U}{d}$

$D_2 = \dfrac{\varepsilon_2 U}{d}$

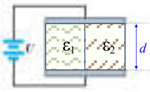
$\boxed{\dfrac{D_1}{D_2} = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$

84

极板与两种电介质交界面上的自由电荷密度：

$\sigma_{01} = D_1 = \dfrac{\varepsilon_1 U}{d}$

$\sigma_{02} = D_2 = \dfrac{\varepsilon_2 U}{d}$

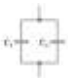


电容为：

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{(\sigma_{01} + \sigma_{02})S/2}{U} = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)S}{2d}$$

两个电容并联：

$$C = C_1 + C_2 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)S}{2d}$$



85

极板与两种电介质交界面上的自由电荷密度：

$\sigma_{01} = D_1 = \dfrac{\varepsilon_1 U}{d}$ $\sigma_{02} = D_2 = \dfrac{\varepsilon_2 U}{d}$

极化电荷密度：

$$\sigma_1' = -P_1 = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)E_1 = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\frac{U}{d}$$

$$\sigma_2' = -P_2 = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)E_2 = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\frac{U}{d}$$

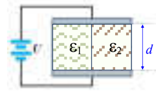
86

总电荷密度：

$\sigma_1 = \sigma_{01} + \sigma_1' = \dfrac{\varepsilon_0 U}{d}$ $\sigma_2 = \sigma_{02} + \sigma_2' = \dfrac{\varepsilon_0 U}{d}$

$\sigma_1 = \varepsilon_0 E_1 = \dfrac{\varepsilon_0 U}{d} = \varepsilon_0 E_2 = \sigma_2$

- 自由电荷密度不同，极化电荷不同
- 总电荷密度相同

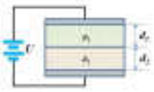


87

电介质交界面的边值关系

- 法线方向

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV$$



$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0}$

一般情况下，电介质表面无自由电荷

$\boxed{D_{2n} = D_{1n}}$

$\boxed{\dfrac{E_{2n}}{E_{1n}} = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \dfrac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}$

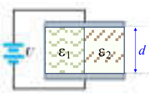
电势连续

88

电介质交界面的边值关系

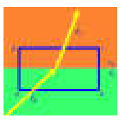
- 切线方向

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$



$\boxed{E_{2t} = E_{1t}}$

$\boxed{\dfrac{D_{2t}}{D_{1t}} = \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}$



89

介质中电学问题的基本方程

介质中的电学规律

$\boxed{\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV}$

$\boxed{\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$

介质中的本构方程

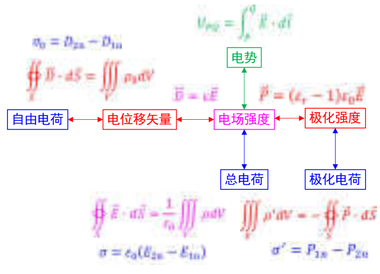
$\boxed{\vec{D} = \varepsilon\vec{E}}$

介质中的边值关系

$\boxed{D_{2n} = D_{1n}}$

$\boxed{E_{2t} = E_{1t}}$

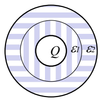
90



91

【例】一导体球与导体球壳同心，半径分别为R_1和R_3，中间充满两层介电常数分别为ε_1和ε_2的电介质，电介质交界面的半径为R_2。现将导体球和球壳分别与电动势为U的电压源相连，求：
（1）空间中的电场分布；（2）空间中的电势分布；
（3）电介质交界面上的极化电荷分布。

【解】：（1）根据高斯定理：



$$D\cdot 4\pi r^2 = Q$$

$$D_1 = D_2 = D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

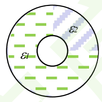
$$E=\begin{cases} 0 & r<R_1 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2} & R_1<r<R_2 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2} & R_2<r<R_3 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R_3 \end{cases}$$

方向沿径向向外

92

【例】一导体球与导体球壳同心，半径分别为R_1和R_2，中间充满两层介电常数分别为ε_1和ε_2的电介质。设导体球带自由电荷Q，求：（1）空间中的电场分布；（2）导体球表面的自由电荷和极化电荷分布。

【解】：（1）根据高斯定理：



$$D\cdot 4\pi r^2 = Q$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$E=\begin{cases} 0 & r<R_1 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2} & R_1<r<R_2, 0<\phi<\dfrac{3\pi}{2}, 0<\theta<\pi \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2} & R_1<r<R_2, \dfrac{3\pi}{2}<\phi<2\pi, 0<\theta<\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R_3 \end{cases}$$

93

【解】：（1）根据高斯定理：

$$D_1\cdot\frac{7}{8}\cdot 4\pi r^2 + D_2\cdot\frac{1}{8}\cdot 4\pi r^2 = Q$$

$$E_1 = E_2 = E \qquad D_1 = \varepsilon_1 E \qquad D_2 = \varepsilon_2 E$$

$$E = \frac{1}{3.5\varepsilon_1 + 0.5\varepsilon_2}\frac{Q}{\pi r^2}$$

$$E=\begin{cases} 0 & r<R_1 \\ \dfrac{1}{3.5\varepsilon_1+0.5\varepsilon_2}\dfrac{Q}{\pi r^2} & R_1<r<R_2 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R_2 \end{cases}$$

94

【练习】平行板电容器内充满如图所示均匀电介质，左右介质水平面积相等，右边两介质厚度相等。电容器所加电压为U。求：（1）电容器中的电场分布；（2）电容器的电容；（3）介质表面上的极化电荷和总电荷密度。

95

§ 2.4 静电场的能量

96

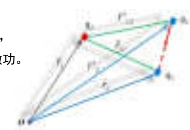
§ 2.4.1 点电荷系统的静电相互作用能

1\. 两个点电荷系统

把q_1和q_2分别从无限远处移至r_1和r_2处。

先把q_1从无限远处移至r_1处，无需做功。

再把q_2从无限远处移至r_2处，
此过程需克服q_1的电场力做功。



97

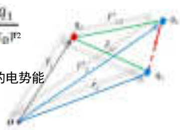
r_1处q_1在r_2处的电势为：

$$U_{12} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

将q_2从无限远移至r_2处，克服q_1的相互作用力做功为：

$$W_{12} = q_2 U_{12} = \frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

也就是q_2在q_1产生的电场中的电势能



98

该过程的顺序也可以反过来，先移动q_2，再移动q_1

r_2处q_2在r_1处的电势为：

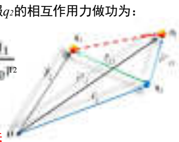
$$U_{21} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}}$$

将q_1从无限远移至r_1处，克服q_2的相互作用力做功为：

$$W_{21} = q_1 U_{21} = \frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

$$\boxed{W_{21} = W_{12}}$$

做功的多少与移动顺序无关



99

相互作用能：建立这种电荷分布所需外界提供的能量

$$W_{互} = W_{21} = q_1 U_{21}$$
$$= W_{12} = q_2 U_{12}$$
$$= \frac{1}{2}(q_1 U_{21} + q_2 U_{12})$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} q_i U_i$$

U_i为q_i以外的电荷在r_i处产生的电势

系统中每个电荷的电势能之和除以2

100

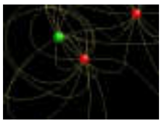
2. N个点电荷系统

将两个点电荷系统的相互作用能推广到N个点电荷系统

$$W_{互} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i U_i$$

U_i为q_i以外的电荷在r_i处产生的电势

$$U_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} U_{ji} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$



$$W_{互} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

101

【例】正负离子交错排列成一维无限长阵列，计算其中一个离子与其他离子的相互作用能。

【解】在一个正离子处，有其他正离子产生的电势为：

$$U_+ = 2\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{4a} + \frac{1}{6a} + \cdots\right)\right]$$

在一个正离子处，有其他负离子产生的电势为：

$$U_- = 2\left[\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{3a} + \frac{1}{5a} + \cdots\right)\right]$$

$$U = U_+ + U_- = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0 a}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right) = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0 a}\ln 2$$

102

$$W_+ = qU = \frac{-q^2}{2\pi\varepsilon_0 a}\ln 2$$

为何没有因子1/2?

同法可得：

$$W_- = qU = \frac{-q^2}{2\pi\varepsilon_0 a}\ln 2$$

将电荷从无限远移动过来，电场做正功，外力做负功

103

§ 2.4.2 带电体的静电能

1. 单个带电体

$$W_{互} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i U_i \quad \Rightarrow \quad W_e = \frac{1}{2}\iiint_V \rho(\vec r) U_1(\vec r)\, dV$$

U_i为q_i以外的电荷在r_i处产生的电势

$U_1(\vec r)$为电荷元$\rho(\vec r)dV$以外的电荷在$\vec r$处产生的电势

$$U_1(\vec r) = U(\vec r) - U'(\vec r)$$

$U'(\vec r)$为$\rho(\vec r)dV$在自身所在处产生的电势

104

【例】求电荷密度为ρ，体积为dV的导体球（电荷元）的电势U'。

$$U' = \frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 R}\cdot\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$$

$$U' \xrightarrow{R\to 0} 0$$

对电荷元： $U_1(\vec r) = U(\vec r)$

对点电荷： $\rho dV = Q = 常数$

$$U' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \xrightarrow{R\to 0} \infty$$

原因为： $\rho\frac{4\pi R^3}{3} = Q \quad \Rightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} \xrightarrow{R\to 0} \infty$

105

对体电荷：

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_V \rho(\vec r) U_1(\vec r)\, dV = \frac{1}{2}\iiint_V \rho(\vec r) U(\vec r)\, dV$$

类似地，对面电荷：

$$W_e = \frac{1}{2}\iint_S \sigma(\vec r) U(\vec r)\, dS$$

对线电荷：

$$\cancel{W_e = \frac{1}{2}\int_L \lambda(\vec r) U(\vec r)\, dl}$$

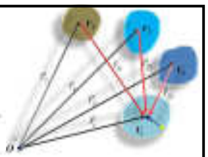
类似于点电荷，电势无限大。

106

2. 多个带电体

将单个带电体推广到多个带电体

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_V \rho(\vec r) U(\vec r)\, dV$$



$$\Rightarrow \quad W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i} \rho(\vec r) U(\vec r)\, dV$$

107

带电体上的总电势可以分为两部分：

$$U(\vec r) = U_i(\vec r) + U^{(i)}(\vec r)$$

$U_i(\vec r)$ 为其他带电体在$\vec r$处产生的电势

$U^{(i)}(\vec r)$ 为第i个带电体在$\vec r$（其自身）处产生的电势

108

$$W_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}\rho(\vec r)U(\vec r)dV=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}\rho(\vec r)[U_i(\vec r)+U^{(i)}(\vec r)]dV$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}\rho(\vec r)U_i(\vec r)dV+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}\rho(\vec r)U^{(i)}(\vec r)dV$$

$$=W_{互}+W_{自}$$

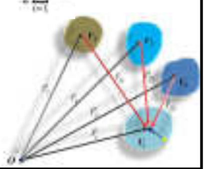
多个带电体的静电能为
每个带电体的自能＋带电体之间的相互作用能

109

计算带电体的自能时，不能将带电体当做点电荷

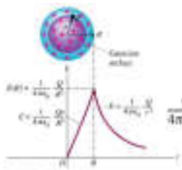
计算带电体的互能时，当带电体相距很远时，可将带电体当做点电荷

$$W_{互}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}\rho(\vec r)U_i(\vec r)dV=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_iU_i$$



110

【例】计算带电量为Q，半径为R的均匀带电球体的自能。



球面的电势为： $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0R}$

球内r处的电势为：

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0R}+\frac{Q\frac{R^2-r^2}{2}}{4\pi\varepsilon_0R^3}=\frac{Q(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0R^3}$$

均匀带电球的自能为：

$$W_{自}=\frac{1}{2}\int_0^R\rho\cdot\frac{Q(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0R^3}\cdot4\pi r^2dr=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0R}=\frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0R}$$

点电荷自能无限大

111

【例】计算带电量为Q，半径为R的导体球的自能。

【解】导体球为等势体，其势为： $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0R}$

其自能为：

$$W_{自}=\frac{1}{2}\iiint_V\rho(\vec r)UdV=\frac{1}{2}U\iiint_V\rho(\vec r)dV=\frac{1}{2}QU$$

$$=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0R}\quad<\quad\frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0R}$$

导体的电荷分布在表面，自能最低

112

【例】电偶极子之间的相互作用能

$\vec p_1$

$\vec p_2$

电偶极子产生的电势与电场

$$U(\vec r)=\frac{\vec p\cdot\vec r}{4\pi\varepsilon_0r^3}\qquad E(\vec r)=\frac{3(\vec p\cdot\vec e_r)\,\vec e_r-\vec p}{4\pi\varepsilon_0r^3}$$

相互作用能

$$W=\frac{1}{2}\{[-q_2U_1(\vec r_{2-})+q_2U_1(\vec r_{2+})]+[-q_1U_2(\vec r_{1-})+q_1U_2(\vec r_{1+})]\}$$

$$-q_2U_1(\vec r_{2-})+q_2U_1(\vec r_{2+})=q_2[U_1(\vec r_{2+})-U_1(\vec r_{2-})]=-q_2(\vec E_1\cdot\vec l)$$

$$=-q_2(\vec l\cdot\vec E_1)=-q_2\vec l\cdot\vec E_1=-\vec p_2\cdot\vec E_1$$

113

$$\vec E_1(\vec r)=\frac{3(\vec p_1\cdot\vec e_{r21})\,\vec e_{r21}-\vec p_1}{4\pi\varepsilon_0r_{21}^3}$$

$$\vec p_2\cdot\vec E_1=-\frac{3(\vec p_1\cdot\vec e_{r21})(\vec p_2\cdot\vec e_{r21})-\vec p_1\cdot\vec p_2}{4\pi\varepsilon_0r_{21}^3}$$

$$\vec p_1\cdot\vec E_2=\vec p_2\cdot\vec E_1$$

$$W=\frac{1}{2}(\vec p_1\cdot\vec E_2+\vec p_2\cdot\vec E_1)$$

$$=-\frac{3(\vec p_1\cdot\vec e_{r21})(\vec p_2\cdot\vec e_{r21})-\vec p_1\cdot\vec p_2}{4\pi\varepsilon_0r_{21}^3}$$

电偶极子间的相互作用能不仅取决于它们之间的相互距离，还取决于$\vec r_{21}$, $\vec p_1$, $\vec p_2$三者间的相互取向

如果把电偶极子看作整体，不是保守力场，不是有心力

114

$$W=-\frac{3(\vec p_1\cdot\vec e_{r21})(\vec p_2\cdot\vec e_{r21})-\vec p_1\cdot\vec p_2}{4\pi\varepsilon_0r_{21}^3}$$

特例1： $\vec p_1$ $\vec p_2$

$\vec p_1\cdot\vec e_{r21}=p_1$ $\quad\vec p_2\cdot\vec e_{r21}=p_2$ $\quad\vec p_1\cdot\vec p_2=p_1p_2$

$$W=-\frac{3p_1p_2-p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0r_{21}^3}=-\frac{p_1p_2}{2\pi\varepsilon_0r_{21}^3}$$

W < 0 两电偶极子相互吸引

115

$$W=-\frac{3(\vec p_1\cdot\vec e_{r21})(\vec p_2\cdot\vec e_{r21})-\vec p_1\cdot\vec p_2}{4\pi\varepsilon_0r_{21}^3}$$

特例2： $\vec p_1$ $\vec p_2$

$\vec p_1\cdot\vec p_2=p_1p_2$

$\vec p_1\cdot\vec e_{r21}=\vec p_2\cdot\vec e_{r21}=0$

$$W=\frac{p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0r_{21}^3}$$

W > 0 两电偶极子相互排斥

特例2： $\vec p_1$ $\vec p_2$

$\vec p_1\cdot\vec p_2=-p_1p_2$

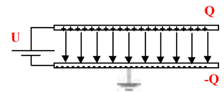
$\vec p_1\cdot\vec e_{r21}=\vec p_2\cdot\vec e_{r21}=0$

$$W=-\frac{p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0r_{21}^3}$$

W < 0 两电偶极子相互吸引

116

§ 2.4.3 电容器的储能



上极板电荷为Q，电势为U

下极板电荷为-Q，电势为0

极板之间电荷为0，电势>0

电容器的静电能为：

$$W_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}\rho(\vec r)U(\vec r)dV=\frac{1}{2}QU=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

117

电容器的储存的能量为：

$$W_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}\rho(\vec{r})U(\vec{r})dV=\frac{1}{2}QU=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

电容器的能量储存在哪里？

- 电极板上？

  极板上有电荷，有电势。

- 极板之间的空间？

  空间中没有电荷。

  但空间中有“场”，“场”是真实存在的。

118

- 没有电荷的地方有没有能量？

  这个可以有！

  例如电磁波

- 没有电场的地方有没有能量？

  这个真没有。

  有电荷必定有电场 ➔ 没有电场，必定也没有电荷。

电容器的能量储存在电场中

119

§ 2.4.4 电场的能量

电容器的储存的能量为：

$$W_e=\frac{1}{2}QU=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

能量储存在电场中，而不是电荷上。

用描述电场的物理量来表征。

$$C=\frac{\varepsilon S}{d}\qquad U=Ed$$

$$W_e=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}(Ed)^2=\frac{1}{2}\varepsilon E^2V=\frac{1}{2}(\vec{D}\cdot\vec{E})V$$

120

电场的能量密度

电场的能量密度：单位体积电场的能量

$$\omega_e=\frac{W_e}{V}=\frac{1}{2}(\vec{D}\cdot\vec{E})$$

尽管此公式由充满各向同性均匀介质的平行板电容器推导而来，但是普遍适用

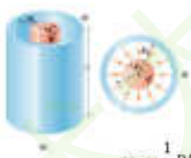
对普遍情况，电场的能量可用能量密度计算得到：

$$W_e=\iiint_V\omega_e dV=\frac{1}{2}\iiint_V\vec{D}\cdot\vec{E}dV$$

121

【例】同轴电缆由半径为R_A的圆柱体和一个半径为R_B的同轴导体圆筒组成，其间充满介电常数为ε的均匀介质。圆柱带电为Q，圆筒带电为-Q，长度均为L。略去边缘效应。求：

（1）电场的能量密度；（2）电场总能量W。(3)证明$W=Q^2/(2C)$



【解】(1) 由高斯定理得

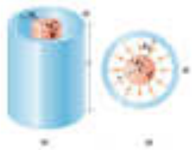
$$E\cdot 2\pi rL=Q/\varepsilon_0$$

$$\cancel{E=\frac{Q}{2\pi rL\varepsilon_0}}$$

$$D=\varepsilon E$$

$$\omega_e=\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\cancel{\frac{\varepsilon Q^2}{8\pi^2r^2L^2\varepsilon_0^2}}$$

122



【解】(1) 由高斯定理得

$$D\cdot 2\pi rL=Q$$

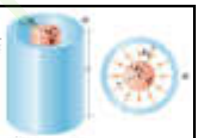
$$D=\frac{Q}{2\pi rL}$$

$$E=\frac{D}{\varepsilon}=\frac{Q}{2\pi rL\varepsilon}$$

$$\omega_e=\frac{1}{2}DE=\frac{D^2}{2\varepsilon}=\frac{Q^2}{8\pi^2r^2L^2\varepsilon}$$

123

$$\omega_e=\frac{1}{2}DE=\frac{D^2}{2\varepsilon}=\frac{Q^2}{8\pi^2r^2L^2\varepsilon}$$



(2) 总能量为：

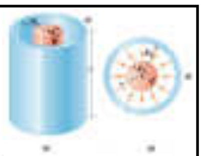
$$W=\int_{R_A}^{R_B}\omega_e\cdot 2\pi rLdr=\int_{R_A}^{R_B}\frac{Q^2}{8\pi^2r^2L^2\varepsilon}\cdot 2\pi rLdr$$

$$=\frac{Q^2}{4\pi L\varepsilon}\ln\frac{R_B}{R_A}$$

124

(3) 电场强度为：

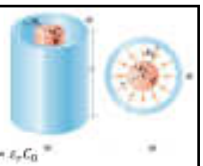
$$E=\frac{D}{\varepsilon}=\frac{Q}{2\pi rL\varepsilon}$$



电势差为：

$$\Delta U=\int_{R_A}^{R_B}Edr=\int_{R_A}^{R_B}\frac{Q}{2\pi rL\varepsilon}dr=\frac{Q}{2\pi L\varepsilon}\ln\frac{R_B}{R_A}$$

125



$$C=\frac{Q}{\Delta U}=\frac{2\pi L\varepsilon}{\ln\frac{R_B}{R_A}}=\frac{2\pi L\varepsilon_0}{\ln\frac{R_B}{R_A}}\varepsilon_r=\varepsilon_rC_0$$

$$W=\frac{Q^2}{4\pi L\varepsilon}\ln\frac{R_B}{R_A}=\frac{Q^2}{2C}$$ 证毕。

虽然电场能量密度表达式是从真空中平行板电容器导出的，

但是对充有介质的圆柱形电容器也成立。

126

能量的概念

静电能、相互作用能、自能、电势能

静电能是整个带电系统的能量。

包含所有带电体的自能和相互作用能。

对于点电荷系统，不存在自能的概念，静电能只能是相互作用能。

电势能是一个带电体在外电场中的能量。反映的是外电场对该带电体的作用能，不涉及外电场本身的能量。

127

练习

平行板电容器面积为S，厚度为d。在其左半区中放入介电常数为ε的电介质。求：

（1）左半区和右半区，哪边的电场强度大；

（2）电容器的电容是多少？

（3）两半区中，电场的能量密度各为多少？

（4）电容器的总储能是多少？

128