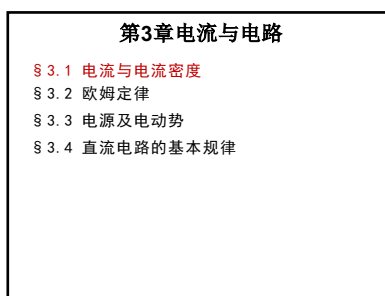




第3章 电流与电路

1



第3章 电流与电路

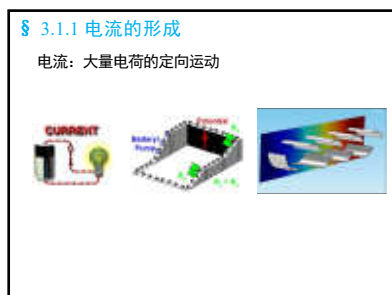
- § 3.1 电流与电流密度
- § 3.2 欧姆定律
- § 3.3 电源及电动势
- § 3.4 直流电路的基本规律

2



§ 3.1 电流与电流密度

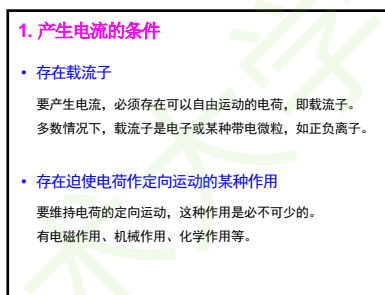
3



§ 3.1.1 电流的形成

电流：大量电荷的定向运动

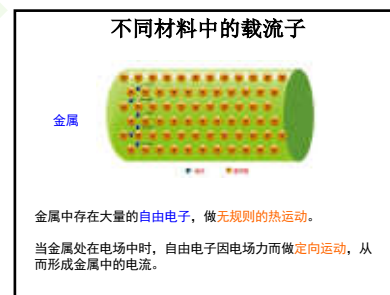
4



1. 产生电流的条件

- 存在载流子
要产生电流，必须存在可以自由运动的电荷，即载流子。多数情况下，载流子是电子或某种带电微粒，如正负离子。
- 存在迫使电荷作定向运动的某种作用
要维持电荷的定向运动，这种作用是必不可少的。有电磁作用、机械作用、化学作用等。

5

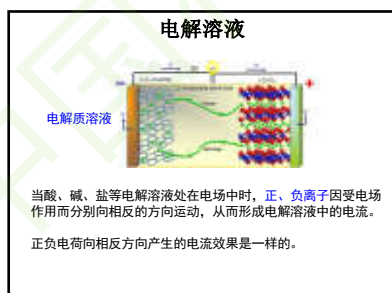


不同材料中的载流子

金属

金属中存在大量的自由电子，做无规则的热运动。
当金属处在电场中时，自由电子因电场力而做定向运动，从而形成金属中的电流。

6

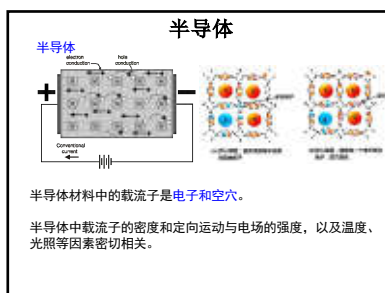


电解质溶液

电解质溶液

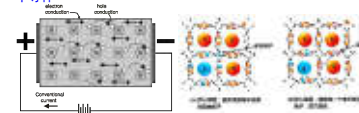
当酸、碱、盐等电解质溶液处在电场中时，正、负离子因受电场作用而分别向相反的方向运动，从而形成电解质溶液中的电流。
正负电荷向相反方向产生的电流效果是一样的。

7



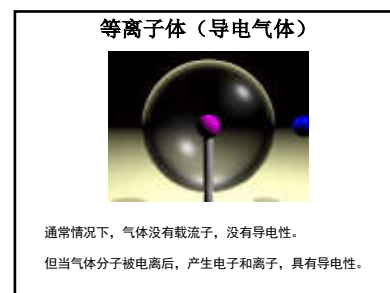
半导体

半导体



半导体材料中的载流子是电子和空穴。
半导体中载流子的密度和定向运动与电场的强度，以及温度、光照等因素密切相关。

8



等离子体（导电气体）

通常情况下，气体没有载流子，没有导电性。
但当气体分子被电离后，产生电子和离子，具有导电性。

9

2. 真空中的电流

热电子发射

真空中没有电子。金属表面的电子无法突破势垒进入真空。

当金属变热时，自由电子热运动加剧，电子动能变大。

电子动能大到一定程度，可以突破金属表面的势垒，进入真空，形成电流。

灯丝为何会发热？

10

阴极射线管 Cathode-Ray Tube

J. J. Thomson (1856-1940)
Nobel in Physics 1906

1897年用阴极射线管发现电子

"In recognition of the great merits of his theoretical and experimental investigations on the conduction of electricity by gases."

11

Cathode-Ray Tube (CRT)

12

隧道电流

当金属之间距离足够近的时候，电子有一定几率贯穿势垒而进入真空，在一定条件下形成微弱的隧道电流。

13

扫描隧道显微镜 单原子操作

14

§ 3.1.2 电流强度与电流密度

1. 电流强度

电流强度：单位时间通过导体某一横截面的电量。

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

单位：库仑/秒；安培；A

毫安：1mA = 10⁻³ A
微安：1μA = 10⁻⁶ A
纳安：1nA = 10⁻⁹ A

15

安全用电

国家规定36V交流电压为安全电压

真正起作用的其实是电流

AC-1: 感觉不到
AC-2: 感知，但没有肌肉反应
AC-3: 可逆的肌肉收缩
AC-4: 发生不可逆的影响
AC-4.1: 5%几率心室颤动
AC-4.2: 5-50%的几率
AC-4.3: 超过50%的几率

16

电流的方向

电子的平均运动速率很大 10⁶ m/s
但无电场时平均速度为0
定向运动产生电流

习惯上定义电流的参考方向为：
带正电的载流子的定向运动方向
带负电的载流子的定向运动反方向

17


2. 电流密度

电流强度只表示导体中某一截面的总电流大小。
电流在导体里有更细致的分布。
不同地方的电流大小和方向都不一样。

铜双绞线里的电流分布

18

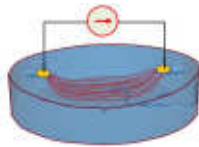
考虑导体中的某一定点P，在该点沿电流方向作一单位矢量 \vec{n}_0 ，并取一面元 ΔS_0 与 \vec{n}_0 垂直，设通过的电流强度为 ΔI ，则定义P处的**电流密度**为：

$$\vec{j} = \frac{\Delta I}{\Delta S_0} \vec{n}_0$$


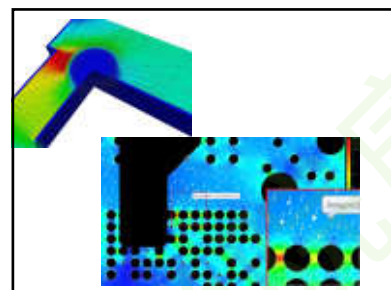
19

电流密度的单位：**安培/米**

电流密度是空间位置的矢量函数，与电场强度类似。
“电流场”，“电流线”



20



21

设 n 为单位体积导体中的自由电子密度， \vec{v} 为电子的定向运动平均速度，则导体中的电流密度为：

$$\vec{j} = \frac{\Delta I}{\Delta S_0} \vec{n}_0 = \frac{dQ}{dt} \vec{n}_0 = - \frac{ne \Delta S_0 dl}{dt} \vec{n}_0 = -ne \vec{v}$$

$$\vec{j} = nq\vec{v}$$

22

【例】估算金属导线中的电子定向运动平均速度。

【解】设电流为 I A，导线横截面为 1 mm^2

则电流密度为：

$$j = \frac{1A}{1\text{mm}^2} = 10^6 \text{ A/m}^2$$

金属中的自由电子密度：

$$n = \frac{N_A \rho}{A} = \frac{6 \times 10^{23} \cdot 9 \times 10^3}{64 \times 10^{-3}} = 10^{29} / \text{m}^3$$

金属中的自由电子定向运动速度：

$$j = env \Rightarrow v = \frac{j}{en} = \frac{10^6}{10^{-19} \cdot 10^{29}} = 10^{-4} \text{ m/s}$$

运动1米需要3小时！

23

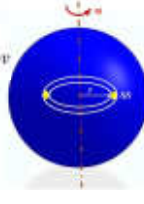
【例3.1】电荷量 Q 均匀分布在半径为 R 的球体内，该球以均匀角速度 ω 绕它的一个直径旋转。求球内离转轴 r 处的电流密度。

【解】

$$j = \frac{dQ}{dt} = \frac{\rho dS dl}{dt dS} = \rho \frac{dl}{dt} = \rho v$$

矢量形式：

$$\vec{j} = \rho_e \vec{v}$$

$$\vec{j} = \frac{3Q}{4\pi R^3} \vec{\omega} \times \vec{r}$$


24

电流密度 \rightarrow 电流强度


求通过某一面积 S 的电流强度

取面积元 ΔS ，其在方向的投影为 ΔS_0 通过的电流为

$$\Delta I = j \Delta S_0 = \vec{j} \cdot \Delta \vec{S}$$

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

电流强度为某一面上电流密度的通量。



25

§ 3.1.2 电流强度与电流密度

1. 电流强度

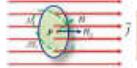
单位时间通过导体任意横截面的电量。

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

2. 电流密度

方向：很小的区域内载流子定向运动的方向
大小：单位时间通过垂直于该方向的单位面积的电流



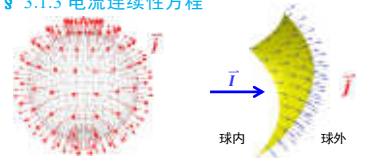
$$\vec{j} = \frac{\Delta I}{\Delta S_0} \vec{n}_0$$

$$\vec{j} = nq\vec{v}$$

$$I = \rho_e \vec{v}$$

26

§ 3.1.3 电流连续性方程



流出球面的总电流：

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

根据电荷守恒定律，流出球面的电荷 Q 等于球内电荷 q 的减少量

$$I = \frac{dQ}{dt} = - \frac{dq}{dt} = - \frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$$

27

电流连续性方程

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$$

积分形式

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

微分形式

类似电场强度高斯定理:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

28

电场线与电流线对比

电场线:

- 电场线起自**正电荷**或者**无限远**
- 电场线终止于**负电荷**或者**无限远**
- 静电场的电场线**不会**形成闭合曲线

电流线:

- 电流线起自**负电荷**变多或者**正电荷**变少的地方
- 电流线终止于**正电荷**变多或者**负电荷**变少的地方
- 电流线可以形成闭合曲线

29

$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$

30

§ 3.1.4 稳恒条件

稳恒电流: 电流密度不随时间变化

稳恒电流要求空间中不存在电荷积聚的地方

正电荷增加, 电场强度增大
阻碍电流流向它, 电流变小

31

稳恒电流要求空间中不存在电荷积聚的地方
电流密度对任意封闭曲面的通量必须等于零

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0$$

电流线只能是无头无尾的封闭曲线

32

稳恒电流 → 稳恒电场

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

电荷的分布不因电流的存在而随时间改变。
它产生的电场也不随时间而变化。
这种电场称为**稳恒电场**, 是一种静态电场。
稳恒电场与静电场有相同的性质。

33

§ 3.2 欧姆定律 (Ohm's Law)

Georg Ohm (1789-1854)

$$V = IR$$

$$J = \frac{V}{R}$$

$$R = \frac{V}{J}$$

34

1780年, 意大利生物解剖学教授伽伐尼(Luigi Galvani)偶尔发现两种不同的金属连接后, 如果同一时间触摸青蛙腿的两处神经, 青蛙腿会发生收缩, 他称这是“生物电”。

1799年, 意大利物理学家伏打(Alexandro Volta)发明了伏打电堆。“金属电”。

1822年, 塞贝克(Thomas Seebeck)发现, 将铜线和铋线连成回路, 并维持两个接头的不同温度, 也可获得微弱而持续的电流。

35


1820年, 丹麦科学家奥斯特(Hans Orsted)发现电流的磁效应

1820年, 德国物理学家与化学家施魏格(John Schweigger)根据电流的磁效应发明了检流计

36

1825年5月，欧姆发表“Preliminary Notice of the Law According to which Metals Conduct Contact Electricity”

$$\Delta I = \frac{I_S - I_W}{I_S} = m \log \left(1 + \frac{l}{a} \right)$$

$$\Delta I = \frac{R_W - R_S}{R_I + R_W}$$



37

1826年2月，欧姆发表“Determination of the Law According to which Metals Conduct Contact Electricity, Together with the Outlines of a Theory of Volta's Apparatus and Schweigger's Multiplier”

$$\Delta I = \frac{a}{b+l} \quad \Delta I = \frac{EMF}{R_I + R_W}$$

$l = 2, 4, 6, 10, 18, 34, 66, 130$ 英寸

改变金属类型， b 变 a 不变
改变温差， a 变 b 不变




38


1826年4月，欧姆发表“Attempt of a Theory of the Electroscopic Phenomena Produced by Galvanic Forces”

$$\Delta I = a \frac{kS}{L} = \frac{a}{L}$$

k : Conducting power
 L : Reduced length \rightarrow Resistance

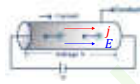


39



"The Galvanic Circuit Investigated Mathematically"
1827

40



电池在正负极间维持恒定电势差 V ，将导体两端与电池两端连接时，电势差产生电场 E 。
导体处在电场 E 中，自由电子在电场作用下定向运动，产生电流 I 。
电池通过化学作用将电荷从导体一端搬运到另外一端，构成闭合电流线。避免电荷堆积，维持稳恒电流。
导体中具有恒定的、非零的电场 E 。
 V 越大， E 越大， I 越大


41

欧姆定律的微观形式

$I \propto V$ (实验规律)

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

其中 σ 为比例系数。
对各向同性线性导体，当电场强度不太大时为常数。
在更加一般的情况下，可写为

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E}) \vec{E}$$


42

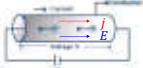
欧姆定律的宏观形式

电势差 $U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = EI$

电流 $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = jS$

$$\frac{U}{I} = \frac{El}{jS} = \frac{El}{\frac{I}{S}} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S} \quad \frac{U}{I} = R = \rho \frac{l}{S}$$

$\sigma = \frac{1}{\rho}$ 称为电导率



43

【例】 导体尺寸如图所示，已知电阻率，求电阻。

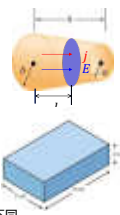
电势差：

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int \rho \vec{j} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int \rho \frac{I}{S_2(r)} dl = I \int \rho \frac{dl}{S_2(r)}$$


$$R = \int \rho \frac{dl}{S_2(r)} = \int \rho \frac{dl}{S_1}$$

dl 为沿着电流方向的长度微元
 S_1 为此微元内垂直于电流方向的面积
对于给定物体，电流方向不同，电阻值不同



44

【例】 在半径为 a, b 的同心球壳导体之间填满电阻率为 ρ 的导电材料，求两球壳之间的电阻。



$$R = \int \rho \frac{dr}{S_1(r)} = \int \rho \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

45

电阻率与温度的关系

电阻率随着温度的变化而变化

Material	Temperature Coefficient	Temperature Coefficient
Aluminum	0.0038	0.0038
Copper	0.0039	0.0039
Iron	0.0050	0.0050
Carbon	-0.0050	-0.0050
Germanium	-0.0050	-0.0050
Silicon	-0.0050	-0.0050
Carbon (graphite)	-0.0050	-0.0050
Carbon (diamond)	-0.0050	-0.0050
Carbon (amorphous)	-0.0050	-0.0050
Carbon (pyrolytic)	-0.0050	-0.0050
Carbon (isotropic)	-0.0050	-0.0050
Carbon (anisotropic)	-0.0050	-0.0050
Carbon (graphite)	-0.0050	-0.0050
Carbon (diamond)	-0.0050	-0.0050
Carbon (amorphous)	-0.0050	-0.0050
Carbon (pyrolytic)	-0.0050	-0.0050
Carbon (isotropic)	-0.0050	-0.0050
Carbon (anisotropic)	-0.0050	-0.0050

纯金属的电阻率随温度的变化较有规律 $\rho = \rho_0(1 + \alpha T)$, $\alpha = 0.4\%$

大多数绝缘材料和半导体具有负的电阻温度系数

46

电阻器

尽可能减小温度系数

47

热敏电阻

具有很好的电阻-温度线性

温度反馈电路

电子温度计

48

§ 3.2.2 电流的功与功率

电流通过导体，电场对电荷做功

对电荷为q的载流子，时间间隔dt内，电场对其做功为：

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = Nq \vec{E} \cdot \vec{v} dt$$

电场做功功率为：

$$P = \frac{dA}{dt} = Nq \vec{E} \cdot \vec{v} = nS_1 d\vec{l} \cdot q \vec{E} \cdot \vec{v} = S_1 d\vec{l} \cdot \vec{E} \cdot nq \vec{v}$$

$$= S_1 d\vec{l} \cdot \vec{J} = \vec{E} \cdot d\vec{l} \int S_2 = \vec{E} \cdot d\vec{l} \int \frac{d^2}{R} = I^2 R \quad \text{焦耳定律}$$

电场作的功将转变为其他形式的能量。

实验表明，电流流过欧姆介质时，电能全部以发热的形式释放出来。焦耳热。(仅适用纯电阻情况)

49

电功率密度：单位体积内的电功率

$$P = \frac{dA}{dt} = Nq \vec{E} \cdot \vec{v}$$

$$P = \frac{P}{\Delta V} = \frac{N}{\Delta V} q \vec{E} \cdot \vec{v} = nq \vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{J^2}{\sigma} = I^2 \rho$$

焦耳定律的微观形式

50

§ 3.2.3 不同导体分界面电流的关系

不同导体中的电流密度为 \vec{j}_1 和 \vec{j}_2

根据欧姆定律 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

得到不同导体中的电场强度 $\vec{E}_1 = \rho_1 \vec{j}_1$ $\vec{E}_2 = \rho_2 \vec{j}_2$

根据高斯定理，交界面上有面电荷 $\sigma_e = \epsilon_0 (\vec{E}_{2n} - \vec{E}_{1n}) = \epsilon_0 (\rho_2 \vec{j}_{2n} - \rho_1 \vec{j}_{1n})$

界面上总电荷 $Q_e = \sigma_e S = \epsilon_0 (\rho_2 \vec{j}_{2n} - \rho_1 \vec{j}_{1n}) S = \epsilon_0 (\rho_2 - \rho_1)$

自动调节界面上的电荷来匹配不同电阻率的导体 (电流连续)

51

§ 3.2.4 金属导电的德鲁特模型

1900年，P. K. Drude提出了关于金属导电的微观解释

52

设在t=0时刻电子刚刚与原子实碰撞过，热运动速度为 \vec{v}_0

\vec{v}_0 的方向是随机的，即各向同性。矢量和为0。

在下次碰撞时，电子的速度为

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{q\vec{E}}{m} t$$

不同的自由电子的速度和两次碰撞的时间间隔各不相同，对大量电子求平均，可得平均速度为

$$\langle \vec{v} \rangle = 0 + \frac{q\vec{E}}{m} \langle t \rangle = \frac{q\vec{E}}{m} \tau$$

其中τ为平均自由时间

53

平均定向速度：

$$\vec{u} = \langle \vec{v} \rangle = \frac{q\vec{E}}{m} \tau$$

电流密度：

$$\vec{j} = nq\vec{u} = nq \frac{q\vec{E}}{m} \tau = \frac{nq^2 \tau}{m} \vec{E} = \sigma \vec{E}$$

$$\sigma = \frac{nq^2 \tau}{m}$$

当E不太大时，可近似认为τ与E无关，因此，σ与E无关

欧姆定律

54

平均自由时间与平均热运动速率(v)成反比

$$\tau = \frac{\lambda}{(v)}$$

根据分子运动论:

$$\langle v \rangle \propto \sqrt{T}$$

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m} \propto \frac{1}{\sqrt{T}} \quad \mu \propto \sqrt{T}$$

温度越大, 电阻率越大。
可以定性解释金属电阻率与温度的关系, 但不能定量。

55

§ 3.2.5 半导体的导电机制

56

PN二极管的形成

N型材料中的电子向P型材料扩散, 抵消其中的空穴, 在N型材料靠近界面形成一层负离子。
P型材料中的空穴向N型材料扩散, 抵消其中的自由电子, 在P型材料靠近界面形成一层正离子。
正负离子形成电场, 阻碍进一步扩散。最后达到平衡, 形成一个具有强电场的区域, 称为耗尽层(Depletion Region)。
耗尽层的电势差导致载流子无法穿越。

57

PN二极管导电机制

正向偏置时, 外部电压抵消耗尽层电势差, 耗尽层消失, 导通。
反向偏置时, 耗尽层进一步加大, 无法导电。直到被击穿。

58

§ 3.2.6 导电介质

稳恒电流流过导体, 电流场和稳恒电场的求解

静电场环路定理: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

稳恒电流条件: $\oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$

欧姆定律: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

每种导体均可列出以上一组完备方程

59

稳恒电流的边界条件

- 法线方向: $\oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$
 $j_{2n} = j_{1n}$
 $\frac{j_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$
- 切线方向: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$
 $E_{2t} = E_{1t}$
 $\frac{j_{2t}}{j_{1t}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$

60

折射定理

$$\tan \alpha_1 = \frac{j_{1t}}{j_{1n}}$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{j_{2t}}{j_{2n}}$$

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{j_{1t}}{j_{1n}} \cdot \frac{j_{2n}}{j_{2t}} = \frac{j_{1t}}{j_{2t}} \cdot \frac{\sigma_1 E_{1t}}{\sigma_2 E_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

当1为良导体, 而2为理想电介质时
 $\sigma_1 \gg \sigma_2 \quad \alpha_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
电流线永远平行于被理想电介质包围的导体表面

61

稳恒电流的基本方程

导体中的电学规律: $\oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$
 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

导体中的本构方程: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

导体中的边值关系: $j_{2n} = j_{1n}$
 $E_{2t} = E_{1t}$

62

介质中电学问题的基本方程

介质中的电学规律: $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \rho_{ext} dV$
 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

介质中的本构方程: $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

介质中的边值关系: $D_{2n} = D_{1n}$
 $E_{2t} = E_{1t}$

63

介质中

$$\nabla_{ext} \cdot \vec{D} = \rho_{ext} \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\oint_V \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_{ext} dV$$

$$\vec{E} = -\nabla U$$

$$\vec{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \vec{E}$$

自由电荷 → 电位移矢量 → 电场强度 → 极化强度

电势

总电荷 → 极化电荷

$$\oint_V \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_{ext} dV + \iiint_V \rho' dV = -\oint_V \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

$$\sigma = \epsilon_0(\epsilon_{2n} - \epsilon_{1n}) \quad \sigma' = P_{1n} - P_{2n}$$

64

导体中

$$\nabla_{ext} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{ext}}{\epsilon_0} \quad \vec{E} = -\nabla U$$

$$\oint_V \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

电流强度 → 电流密度 → 电场强度

电势

总电荷

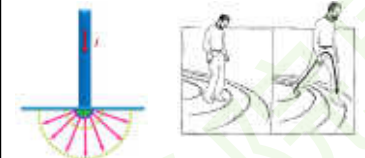
$$\oint_V \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_{ext} dV$$

65

【例】 电线被风吹断，一端触及地面，使得200A的电流由接触点流入大地。设地面水平，土地的电导率为 $10^{-2} (\Omega m)^{-1}$ 。

(1) 当一个人走进输电线接触地点时，两脚间(0.6m)产生跨步电压。求相距接触地点1m和10m处的跨步电压；

(2) 大地中的电荷分布； (3) 接触点上的总电荷。



66

导体中

$$\nabla_{ext} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{ext}}{\epsilon_0} \quad \vec{E} = -\nabla U$$

$$\oint_V \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

电流强度 → 电流密度 → 电场强度

电势

总电荷

$$\oint_V \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_{ext} dV$$

67

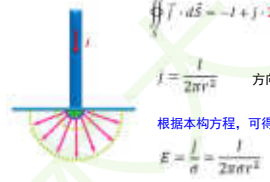
【解】 200A电流全部流入大地

以地面为底，半径为 r 作半球面，根据稳恒条件

$$\oint_V \vec{J} \cdot d\vec{S} = -I + j \cdot 2\pi r^2 = 0$$

$$j = \frac{I}{2\pi r^2} \quad \text{方向如图所示}$$

根据本构方程，可得电场强度

$$E = \frac{j}{\sigma} = \frac{I}{2\pi \sigma r^2}$$


68

进而可得地面上 $r=a$ 与 $r=b$ 之间的电势差

$$U_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{I}{2\pi \sigma r^2} dr = \frac{I}{2\pi \sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{I}{2\pi \sigma} \frac{(b-a)}{ab}$$

取 $a=1m, 10m; b-a=0.6m$ ，得跨步电压分别为

$$\Delta U_{1-10} = \frac{I}{2\pi \sigma} \frac{(b-a)}{ab} = \frac{I}{2\pi \sigma} \frac{0.6}{1+0.6} = 1194 V$$

$$\Delta U_{1-0.6} = \frac{I}{2\pi \sigma} \frac{(b-a)}{ab} = \frac{I}{2\pi \sigma} \frac{0.6}{10(10+0.6)} = 10 V$$

思考：电线上栖息的小鸟安然无恙的根本原因是什么？

69

导体中

$$\nabla_{ext} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{ext}}{\epsilon_0} \quad \vec{E} = -\nabla U$$

$$\oint_V \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

电流强度 → 电流密度 → 电场强度

电势

总电荷

$$\oint_V \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_{ext} dV$$

70

(2) 大地中的电荷分布。

根据高斯定律： $\oint_V \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_{ext} dV$

代入欧姆定律： $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

可得： $Q = \iiint_V \rho_{ext} dV = \epsilon_0 \oint_V \vec{J} \cdot d\vec{S}$

根据稳恒条件，有： $\oint_V \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$

易得： $\rho_{ext} = 0$

流过稳恒电流的均匀导体中，电荷密度恒为零

71

(3) 大地与电线接触点(面)上的电荷分布：

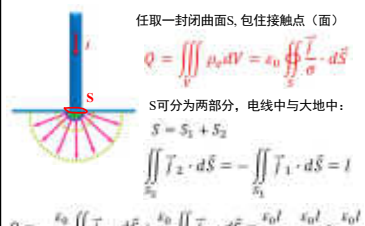
任取一封闭曲面 S ，包住接触点(面)

$$Q = \iiint_V \rho_{ext} dV = \epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

S 可分为两部分，电线中与大地中：

$$S = S_1 + S_2$$

$$\iint_{S_2} \vec{J}_2 \cdot d\vec{S} = -\iint_{S_1} \vec{J}_1 \cdot d\vec{S} = I$$

$$Q = \frac{\epsilon_0}{\sigma_1} \iint_{S_1} \vec{J}_1 \cdot d\vec{S} + \frac{\epsilon_0}{\sigma_2} \iint_{S_2} \vec{J}_2 \cdot d\vec{S} = \frac{\epsilon_0 I}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_0 I}{\sigma_1} = \frac{\epsilon_0 I}{\sigma}$$


72

导电介质

导体介质既具有介质的特性，也具有导电的特性。
既满足稳恒电流的基本方程，也满足介质的基本方程。



73

导电介质

- 稳恒电流和稳恒电场只与导电性质有关，与介电常数无关。
- 总电荷分布由稳恒电场决定，也与介电常数无关。
- 总电荷中极化电荷及自由电荷所占份额与介电常数有关。

74

导电介质的基本方程

导电介质的电学规律

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_V \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_V \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_{\text{自由}} dV$$

导电介质中的本构方程

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

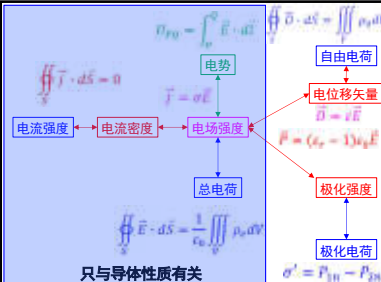
$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

导电介质中的边值关系

$$j_{2n} = j_{1n}$$

$$E_{2t} = E_{1t}$$

75

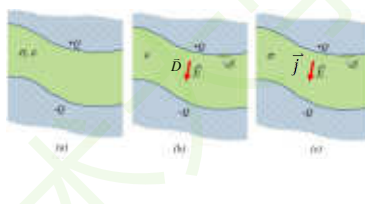


只与导体性质有关

76

电阻与电容的关系

导体之间充满均匀导电介质，既有电阻，也有电容。



77

电阻与电容的关系

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}} = \frac{\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\sigma \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$


$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}}{\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}} = \frac{\epsilon \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

$$RC = \frac{\epsilon}{\sigma} = \rho \epsilon$$

78

【例3.5】一平行板电容器两极板的面积为S，两极间充满两层均匀导电介质，当两极间加电势差为U时，略去边缘效应，求：

- (1) 通过电容器的电流；
- (2) 电流密度；
- (3) 交界面上的面电荷密度；
- (4) 两个极板之间漏电时间常数。



79

【解】

(1) 两层介质的电阻分别为：

$$R_1 = \rho_1 \frac{d_1}{S} = \frac{d_1}{\sigma_1 S} \quad R_2 = \rho_2 \frac{d_2}{S} = \frac{d_2}{\sigma_2 S}$$

两极板间总电阻： $R = R_1 + R_2 = \frac{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}{\sigma_1 \sigma_2 S}$

通过电容器的电流： $I = \frac{U}{R} = \frac{\sigma_1 \sigma_2 S U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$

(2) 电流密度：

$$j = \frac{I}{S} = \frac{\sigma_1 \sigma_2 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

80

(3) 求电荷密度分布，先求电场强度和电位移矢量
由欧姆定律可得：

$$E_1 = \frac{j}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \quad E_2 = \frac{j}{\sigma_2} = \frac{\sigma_1 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

由电介质本构方程可得：

$$D_1 = \epsilon_1 E_1 = \frac{\epsilon_1 \sigma_2 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \quad D_2 = \epsilon_2 E_2 = \frac{\epsilon_2 \sigma_1 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

81

总电荷密度：

$$\sigma_c = \epsilon_0(E_2 - E_1) = \frac{\epsilon_0(\sigma_1 - \sigma_2)U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

自由电荷密度：

$$\sigma_{c0} = D_2 - D_1 = \frac{(\epsilon_2 \sigma_1 - \epsilon_1 \sigma_2)U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$
 介质交界面可以有自由电荷

极化电荷密度：

$$\sigma'_c = \sigma_c - \sigma_{c0} = \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_2)\sigma_1 - (\epsilon_0 - \epsilon_1)\sigma_2}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} U$$

82

(4) 时间常数

$$\tau = RC \quad R = R_1 + R_2 = \frac{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}{\sigma_1 \sigma_2 S}$$

$$C = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2}} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 S}} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 S}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

$$\tau = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 \sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}{\sigma_1 \sigma_2 \epsilon_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$
 与电容器的面积无关

83

电势

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0$$

自由电荷

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

电位移矢量

$$\vec{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \vec{E}$$

极化强度

$$\sigma' = P_{1n} - P_{2n}$$

极化电荷

$$\sigma' = P_{1n} - P_{2n}$$

总电荷

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho_{c0} dV$$

只与导体性质有关

84

电势

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0$$

自由电荷

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

电位移矢量

$$\vec{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \vec{E}$$

极化强度

$$\sigma' = P_{1n} - P_{2n}$$

极化电荷

$$\sigma' = P_{1n} - P_{2n}$$

总电荷

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho_{c0} dV$$

只与导体性质有关

85

【解II】
 电势差： $U = E_1 d_1 + E_2 d_2$
 由电流密度边界条件，有： $j_1 = j_2 = j$
 代入欧姆定律，有： $\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$
 代入电势差表达式： $U = \left(d_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} d_2\right) E_1 = \frac{\sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_1}{\sigma_2} E_1$
 可得电场强度： $E_1 = \frac{\sigma_2 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$ $E_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} E_1 = \frac{\sigma_1 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$
 电流密度： $j = \sigma_1 E_1 = \frac{\sigma_1 \sigma_2 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$
 电流强度： $I = jS = \frac{\sigma_1 \sigma_2 U S}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$

86

总电荷密度：

$$\sigma_c = \epsilon_0(E_2 - E_1) = \frac{\epsilon_0(\sigma_1 - \sigma_2)U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

自由电荷密度：

$$\sigma_{c0} = D_2 - D_1 = \epsilon_2 E_2 - \epsilon_1 E_1 = \frac{(\epsilon_2 \sigma_1 - \epsilon_1 \sigma_2)U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

极化电荷密度：

$$\sigma'_c = \sigma_c - \sigma_{c0} = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)\sigma_1 - (\epsilon_2 - \epsilon_1)\sigma_2}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} U$$

87

(4) 时间常数

$$\tau = RC \quad R = R_1 + R_2 = \frac{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}{\sigma_1 \sigma_2 S}$$

$$C = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2}} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_2 S}} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 S}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

$$\tau = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 \sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}{\sigma_1 \sigma_2 \epsilon_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$
 与电容器的面积无关

求解静电场或者稳恒电流（电场）的问题，核心是得到电场强度分布

88

§ 3.2.7 欧姆定律的失效问题

欧姆定律： $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

平均定向速度： $\vec{u} = \langle \vec{v} \rangle = \frac{q \vec{E}}{m} \tau$

如果平均自由时间 τ 与电场强度无关，则电流密度与电场强度成线性关系。这种导电介质就是欧姆介质。

而当 τ 与电场强度有关时，欧姆定律失效，线性关系要代之以非线性关系。

89

金属导电的德鲁特模型

(a) $\vec{E} = 0$
 (b) 漂移速度
 (c)

90

(1) 电场很强时

当电场强度 E 很大时, 电子的定向漂移速度大到可以与热运动造成的平均速率可比拟。

电子的平均运动时间不光与温度有关, 还与电场强度有关。

欧姆定律失效。

91

(2) 低气压下的电离气体

平均自由程很长, 即使电场强度不是很大, 电子的定向漂移速度也可以大到与热运动造成的平均速率可比拟。

电子的平均运动时间不光与温度有关, 还与电场强度有关。

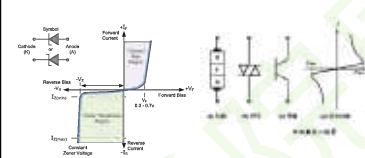
欧姆定律失效。

92

(3) 晶体管、电子管等器件

半导体特殊的导电机制, 导致有特殊的导电特性。

欧姆定律失效。



93

(4) 超导介质

超导介质内部的电流一经激发就能长期维持, 而电场强度却处处为零。不能简单地把超导介质视为电导率为无限大的导体, 因为它的导电规律与通常的导体完全不同, 欧姆定律已不成立。

(5) 其他情况

- 各向异性晶体
- 磁场中的等离子体
- ...

电导率不光不是常数, 还必须用张量。

94

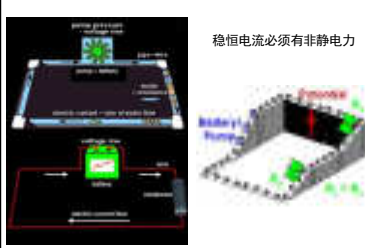
§ 3.3 电源及电动势



95

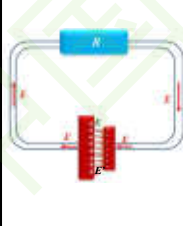
§ 3.3.1 电源与电动势

稳恒电流必须有非静电力



96

电源: 提供非静电力的装置。



通常电源由正负两极。正极电势高, 负极电势低。

电源通过非静电力将负极上的正电荷克服静电力搬运到正极上。维持稳恒电流。

97

非静电力存在时的欧姆定律

外电路

电源内

为定量描述电源提供的非静电力特性, 引入 \vec{K} 和 \mathcal{E}

欧姆定律改写为: $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{K})$

电流是静电力和非静电力共同作用的结果。

98

电动势

通常情况下, 只研究外电路, 常用的物理量不是非静电力 \vec{K} , 而是电源的电动势 \mathcal{E} 。

电动势: 将单位正电荷从负极经电源移到正极时, 非静电力所做的功。

$$\mathcal{E} = \int_{-}^{+} \vec{K} \cdot d\vec{l}$$

$$U = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$


99

电源电动势反映电源中非静电力做功的本领，是电源本身的特性，与外电路的性质以及接通无关。

有些电源无法区分电源内部和外部，非静电力分布于电路各处。定义电动势为非静电力在闭合回路上的线积分：

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{K} \cdot d\vec{l}$$

100

§ 3.3.2 常见的几种稳恒电源

1. 化学电源

101

丹聂耳电池

102

丹聂耳电池的电势分布

放电时 充电时

103

干电池 蓄电池

104

燃料电池

1965年，美国GE公司成功地开发出了燃料电池，这个电池就安装在1965年的载人宇宙飞船双子座5号上，用于供给宇航员饮用水和飞船电能。1969年登上月球的阿波罗11号飞船上的电源也使用了燃料电池作为飞船内电源。

105

2. 温差电池

$$\mathcal{E} = (S_B - S_A)(T_2 - T_1)$$

金属的温差系数S小，为0-80 μV/K

106

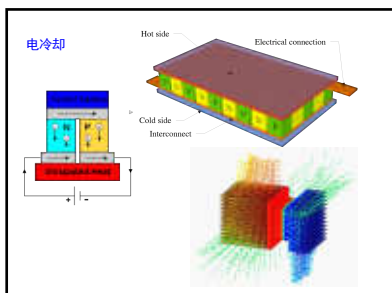
热电偶

107

半导体的温差电效应

半导体的温差系数大，为50-1000 μV/K

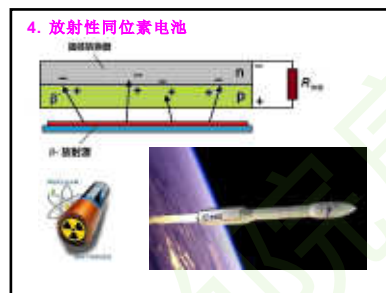
108



109



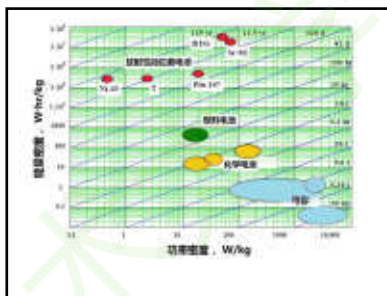
110



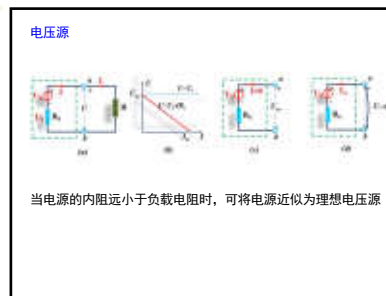
111



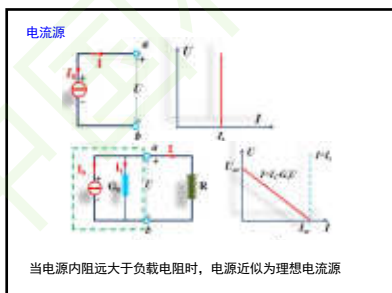
112



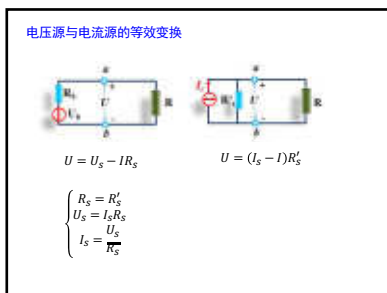
113



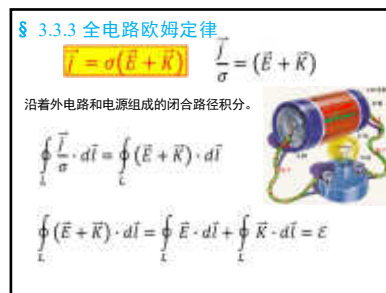
114



115



116



117

$$\oint_L \frac{l}{\sigma} \cdot d\vec{l} = \oint_L \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S_{\perp}} dl = l \oint_L \frac{dl}{S_{\perp}}$$

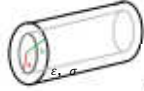
$$= l \left(\int_{\text{外}} \rho \frac{dl}{S_{\perp}} + \int_{\text{内}} \rho \frac{dl}{S_{\perp}} \right) = l(R+r)$$

外电路总电阻: $R = \int_{\text{外}} \rho \frac{dl}{S_{\perp}}$ 电源内总电阻: $r = \int_{\text{内}} \rho \frac{dl}{S_{\perp}}$

$\mathcal{E} = I(R+r)$ 全电路欧姆定律

118

【例】丹聂耳电池由半径为a、b的两个同轴圆筒组成。长度为l，筒间充满介电常数为ε，电导率为σ的硫酸铜溶液。求(1) 电池的内阻；(2) 电池的电容。



【解】(1) 取半径为R的圆筒面


$$r = \int_{\text{内}} \rho \frac{dl}{S_{\perp}} = \int_{a-b}^b \frac{1}{\sigma} \frac{dl}{2\pi Rl} = \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi \sigma l}$$

(2) 由公式

$$rC = \rho \epsilon = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad C = \frac{\epsilon}{\sigma r} = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln \frac{b}{a}}$$

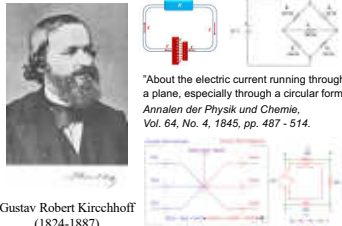
119

§ 3.4 直流电路的基本规律



120

§ 3.4.1 基尔霍夫定律 (Kirchhoff's Law)



Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887)

"About the electric current running through a plane, especially through a circular form" *Annalen der Physik und Chemie*, Vol. 64, No. 4, 1845, pp. 487 - 514.

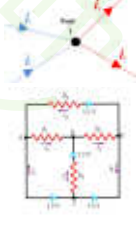
KCL KVL

121

基本概念

节点 (Node): 三条及以上导线相交在一起的点

支路 (Branch): 两个相邻节点之间，由电源和电阻串联而成，且不含其他节点的通路。

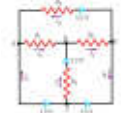


122

回路 (Loop): 起点和终点重合在一个节点的电流回路。

独立回路: 各回路线性无关，不重合

独立回路数目 = 支路数目 - 节点数目 + 1



123

基尔霍夫第一方程


稳恒条件: $\oiint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$

$$\oiint \vec{j}_1 \cdot d\vec{S} + \oiint \vec{j}_2 \cdot d\vec{S} + \dots + \oiint \vec{j}_n \cdot d\vec{S} = 0$$

指向面外为正，指向面内为负

$\sum I_i = 0$ 习惯上，定义流入节点的电流为正，流出为负

Kirchhoff's Current Law (KCL)



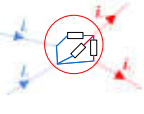
124

广义节点

稳恒条件: $\oiint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$

$$\sum I_i = 0$$

基尔霍夫第一定律对广义节点也成立



125

叠加原理

由于稳恒电场满足叠加原理 $\vec{E} = \sum \vec{E}_i$

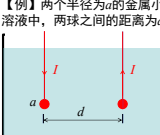
而电流密度与稳恒电场具有线性关系 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

电流密度场也满足叠加原理

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \sigma \sum \vec{E}_i = \sum \sigma \vec{E}_i = \sum \vec{j}_i$$

126

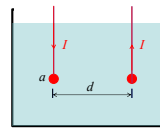
【例】两个半径为 a 的金属小球深深地泡在电导率为 σ 的无限大溶液中，两球之间的距离为 d ($d \gg a$)，求两电极之间的电阻。



【解】
可以认为溶液中的电流场为两部分叠加而成：
1. 左边电极流入 I ，流向无穷远
2. 电流 I 从无穷远自右边电极流出

第一部分电流产生的电流密度为： $\vec{j}_1 = \frac{I}{4\pi r^2} \vec{e}_r$
电场强度为： $\vec{E}_1 = \frac{I}{4\pi\sigma r^2} \vec{e}_r$
两电极间电势差为： $U_1^{AB} = \frac{I}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d-a} \right)$

127




同法可得
第二部分电流造成的AB间电势差为： $U_2^{AB} = \frac{I}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d-a} \right)$

AB间的电势差为
 $U^{AB} = U_1^{AB} + U_2^{AB} = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d-a} \right)$

AB间的电阻为 $R^{AB} = \frac{U^{AB}}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d-a} \right)$

128

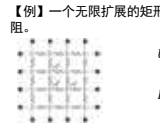
【例】用12个阻值为 r 的电阻组成如下立方体，求两个对角点之间的电阻。



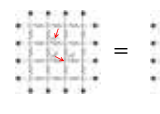
根据KCL和对称性，可知
 $I_1 = \frac{I}{3}$
 $I_2 = \frac{I_1}{2} = \frac{I}{6}$
 $U_{AD} = I_1 r + I_2 r + I_1 r = \frac{5}{6} I r$
 $R_{AD} = \frac{U_{AD}}{I} = \frac{5}{6} r$

129

【例】一个无限扩展的矩形平面电阻网络，求相邻两点间的电阻。



$U_{AB} = \frac{I}{4} r + \frac{I}{4} r = \frac{I}{2} r$
 $R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{r}{2}$

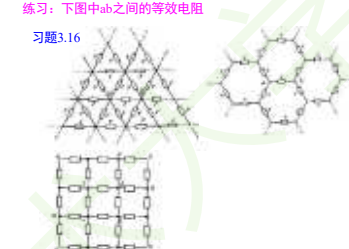


思考：AC间的电阻是多少？

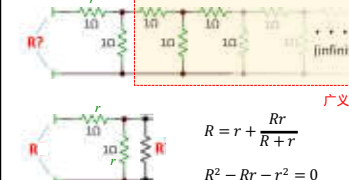
130

练习：下图中ab之间的等效电阻

习题3.16



131

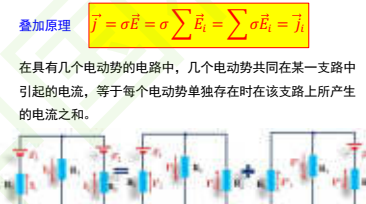


广义节点
 $R = r + \frac{Rr}{R+r}$
 $R^2 - Rr - r^2 = 0$
 $R = \frac{r \pm \sqrt{5}r}{2}$ $R = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} r = 1.618\Omega$

132

叠加原理 $\vec{j} = \sigma \vec{E} = \sigma \sum \vec{E}_i = \sum \sigma \vec{E}_i = \sum \vec{j}_i$

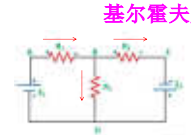
在具有几个电动势的电路中，几个电动势共同在某一支路中引起的电流，等于每个电动势单独存在时在该支路上所产生的电流之和。



注：电源的内电阻要始终包含在相应支路的电阻中

133

基尔霍夫第二方程



$U_D - U_B = -E_1 + I_1 R_1$
 $U_D - U_B = -I_3 R_3$
 $U_D - U_B = E_2 - I_2 R_2$

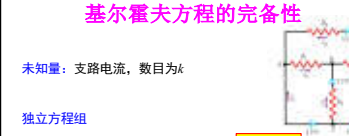
$-E_1 + I_1 R_1 = -I_3 R_3$ $-E_1 + I_1 R_1 + I_3 R_3 = 0$
 $E_2 - I_2 R_2 = -I_3 R_3$ $I_2 R_2 - E_2 - I_3 R_3 = 0$

$\sum \mathcal{E}_i + \sum I_i R_i = 0$ \mathcal{E} 的符号：正端到负极与回路绕行方向一致时取正
 I 的符号：与回路绕行方向一致时取正

Kirchhoff's Voltage Law (KVL)

134

基尔霍夫方程的完备性



未知量：支路电流，数目为 k

独立方程组

KCL方程：节点数减一， $(n-1)$ $\sum I_i = 0$

KVL方程：独立回路数， $(k-n+1)$ $\sum \mathcal{E}_i + \sum I_i R_i = 0$

基尔霍夫方程组是完备的

135

【例3.7】求下图中各支路上的电流。

6个支路
4个节点
3个独立回路

节点A: $I_1 - I_2 - I_5 = 0$
 节点B: $I_3 + I_5 - I_6 = 0$
 节点C: $-I_1 + I_4 + I_6 = 0$

回路1: $I_1(R_1 + R_7 + r_1) + I_5 r_3 + I_6 R_5 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3 = 0$
 回路2: $I_2(R_2 + R_3 + r_2) + I_3 R_4 - I_5 r_3 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 = 0$
 回路3: $-I_3 R_4 + I_4(R_6 + r_4) - I_6 R_5 - \mathcal{E}_4 = 0$

136

节点A: $I_1 - I_2 - I_5 = 0$
 节点B: $I_3 + I_5 - I_6 = 0$
 节点C: $-I_1 + I_4 + I_6 = 0$

回路1: $I_1(R_1 + R_7 + r_1) + I_5 r_3 + I_6 R_5 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3 = 0$
 回路2: $I_2(R_2 + R_3 + r_2) + I_3 R_4 - I_5 r_3 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 = 0$
 回路3: $-I_3 R_4 + I_4(R_6 + r_4) - I_6 R_5 - \mathcal{E}_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ R_1 + R_7 + r_1 & 0 & 0 & 0 & r_3 & R_5 \\ 0 & R_2 + R_3 + r_2 & R_4 & 0 & -r_3 & 0 \\ 0 & 0 & -R_4 & R_6 + r_4 & 0 & -R_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3 \\ -\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 \\ -\mathcal{E}_4 \end{pmatrix}$$

137

基尔霍夫方程求解

1. 支路电流法
支路电流为未知量，利用KCL和KVL列出完备方程组

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 R + I_3 R - \mathcal{E} = 0 \\ 2I_2 R - I_3 R + \mathcal{E} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = \frac{2\mathcal{E}}{5R} \\ I_2 = -\frac{1\mathcal{E}}{5R} \\ I_3 = \frac{3\mathcal{E}}{5R} \end{cases}$$

138

2. 回路电流法

- 设定回路电流为未知量，用KVL列出回路方程
- 未知量与方程数相同，可解出回路电流
- KCL自动被考虑进去了
- 获得回路电流后再计算支路电流

$$\begin{cases} I_1 R + (I_1 - I_2)R - \mathcal{E} = 0 \\ 2I_2 R + (I_2 - I_1)R + \mathcal{E} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = \frac{2\mathcal{E}}{5R} \\ I_2 = -\frac{1\mathcal{E}}{5R} \end{cases}$$

中间支路电流 $I = I_1 - I_2 = \frac{3\mathcal{E}}{5R}$

139

载有稳恒电流的传输线的分析

内导体半径为a，外导体内外半径分别为b和c
 导体电导率为 σ ，介质的电导率为 σ_d
 求电流分布、电势分布和功率

140

理想导体、理想电介质

$\sigma \rightarrow \infty, \sigma_d = 0$

电介质中没有电流损耗，电流都从导体中流过

总电阻 $R = R_L$
 电流 $I = I_s = I_L = \frac{\mathcal{E}}{R}$
 负载消耗的功率 $P_L = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$
 电源的功率 $P_s = P_L = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$

141

非理想导体、理想电介质

$\sigma_d = 0$

电流都从导体中流过，电势逐渐下降

总电阻 $R = R_L + \frac{l}{\sigma S_1} + \frac{l}{\sigma S_2} = R_L + \frac{l}{\sigma \pi a^2} + \frac{l}{\sigma \pi (c^2 - b^2)}$
 电流 $I = I_s = I_L = \frac{\mathcal{E}}{R}$
 导线中电势分布 $U(z) = \mathcal{E} - IR(z) = \frac{R - z}{R} \frac{\sigma \pi a^2 \mathcal{E}}{\sigma \pi a^2}$
 两导体之间的电势差 $U(z) = \frac{R - z}{R} \left(\frac{l}{\sigma \pi a^2} + \frac{l}{\sigma \pi (c^2 - b^2)} \right) \mathcal{E}$

142

负载电阻上的电势差 $V_L = \frac{R_L}{R} \mathcal{E}$ 电压有损耗

负载消耗的功率 $P_L = I^2 R_L = \frac{R_L \mathcal{E}^2}{R^2}$

传输线损耗的功率 $P_c = I^2 R_c = \frac{l}{\sigma \pi a^2} + \frac{l}{\sigma \pi (b^2 - c^2)} \mathcal{E}^2$

对于截面面积为1 mm²，长度为50m的铜线
 $R_c = 1.67 \times 10^{-8} \times \frac{50}{1 \times 10^{-6}} = 0.84 \Omega$
 当 $R_L = 50 \Omega$ 时，电压信号损耗1.6%

143

理想导体、非理想电介质

$\sigma \rightarrow \infty, \sigma_d \neq 0$

内导体是等势体，外导体也是等势体，两者间电势差恒为 \mathcal{E}
 根据对称性和电流连续性方程，介质中的电流满足如下关系

$$\vec{j}_d(r) = \frac{\alpha \vec{e}_r}{2\pi r} \quad \vec{E}_d(r) = \frac{\alpha \vec{e}_r}{2\pi \sigma_d r}$$

$$V = \int_{r=a}^{r=b} \frac{\alpha}{2\pi \sigma_d r} dr = \frac{\alpha}{2\pi \sigma_d} \ln \frac{b}{a} \mathcal{E} \quad \alpha = \frac{2\pi \sigma_d \mathcal{E}}{\ln \frac{b}{a}}$$

144

$\vec{j}_d = \frac{\sigma_d \vec{E}_r}{r \ln \frac{b}{a}}$
 $I_L = \frac{\varepsilon}{R_L}$
 $I_c(z) = I_L + 2\pi a(1-z)j_d(r=a) = \frac{\varepsilon}{R_L} + \frac{2\pi\sigma_d \varepsilon}{\ln \frac{b}{a}}(1-z)$
 $I_s = I_c(z=0) = \frac{\varepsilon}{R_L} + \frac{2\pi\sigma_d \varepsilon}{\ln \frac{b}{a}}$

145

负载消耗的功率 $P_L = \frac{\varepsilon^2}{R}$
 传输线损耗的功率 $P_d = \varepsilon I_d = \varepsilon \cdot 2\pi a l \cdot \frac{\sigma_d \varepsilon}{a \ln \frac{b}{a}} = \frac{2\pi\sigma_d l}{\ln \frac{b}{a}} \varepsilon^2$
 电源的功率 $P_s = \varepsilon I_s = \varepsilon \cdot \left(\frac{\varepsilon}{R_L} + \frac{2\pi\sigma_d \varepsilon}{\ln \frac{b}{a}} \right)$ **功率有损耗**
 $= \frac{\varepsilon^2}{R} + \frac{2\pi\sigma_d l}{\ln \frac{b}{a}} \varepsilon^2$

146

非理想导体、非理想电介质
 $\sigma < \infty, \sigma \gg \sigma_d, \sigma_d \neq 0$

内外导体不再是等势体
 内导体中电流逐渐减小，电势也逐渐减小
 $I(z+\Delta z) - I(z) + j_d(r)2\pi r \Delta z = 0$
 $j_d(r) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\Delta I}{\Delta z}$
 $E_d(r) = -\frac{1}{2\pi\sigma_d r} \frac{\Delta I}{\Delta z}$

147

$V(z) = \int_{r=a}^{r=b} -\frac{1}{2\pi\sigma_d \Delta z} \Delta I dr = -\frac{1}{2\pi\sigma_d \Delta z} \ln \frac{b}{a} \Delta I$
 $\Delta I = -\frac{2\pi\sigma_d}{\ln \frac{b}{a}} V \Delta z = G' V \Delta z \quad G' \equiv \frac{2\pi\sigma_d}{\ln \frac{b}{a}}$
 $\frac{dI}{dz} = -G' V$

148

$V(z+\Delta z) - V(z) = -I(z)\Delta z \left(\frac{1}{\sigma S_1} + \frac{1}{\sigma S_a} \right)$
 $\frac{dV}{dz} = -R' I \quad R' = \frac{1}{\sigma S_1} + \frac{1}{\sigma S_a} = \frac{1}{\pi\sigma} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$

149

$\frac{dI}{dz} = -G' V \quad \frac{dV}{dz} = -R' I$
 $\frac{d^2 I}{dz^2} = G' R' I \quad \frac{d^2 V}{dz^2} = G' R' V$
 $I(z) = I(0)e^{-\sqrt{G'R'}z} \quad V(z) = V(0)e^{-\sqrt{G'R'}z}$
 $G' \equiv \frac{2\pi\sigma_d}{\ln \frac{b}{a}} \quad R' = \frac{1}{\sigma S_1} + \frac{1}{\sigma S_a} = \frac{1}{\pi\sigma} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$
 $\sqrt{G'R'} \equiv \frac{2\sigma_d}{\sigma \ln \frac{b}{a}} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$

150

$I(z) = I(0)e^{-\sqrt{G'R'}z} \quad V(z) = V(0)e^{-\sqrt{G'R'}z}$
 $V(0) = \varepsilon$
 $V(z) = \varepsilon e^{-\sqrt{G'R'}z} \quad V(l) = \varepsilon e^{-\sqrt{G'R'}l}$
 $I(l) = \frac{V(l)}{R_L} = \frac{\varepsilon}{R_L} e^{-\sqrt{G'R'}l} = I(0)e^{-\sqrt{G'R'}l}$
 $I(0) = \frac{\varepsilon}{R_L} \quad I(z) = \frac{\varepsilon}{R_L} e^{-\sqrt{G'R'}z}$

151

电源输出功率: $P_s = V(0)I(0) = \frac{\varepsilon^2}{R}$
 负载功率: $P_L = V(l)I(l) = \frac{\varepsilon^2}{R} e^{-2\sqrt{G'R'}l}$
 传输线损耗功率:
 $P_c + P_d = P_s - P_L = \frac{\varepsilon^2}{R} (1 - e^{-2\sqrt{G'R'}l})$
 $\sqrt{G'R'} \equiv \frac{2\sigma_d}{\sigma \ln \frac{b}{a}} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$
 实际情况下，还需要考虑电源的内阻（输入信号的输入阻抗）

152

§ 3.3.4 电容的充电和放电
 电容两个电极板之间为绝缘介质
 但是充放电时两个电极板电荷变化量相同
 从电容器外部来看，电流跳过电容器之后续上了
 电容器上有压降，与电极板上电荷量q有关
 $IR + \frac{q}{C} = \varepsilon$

153

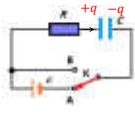
$$IR + \frac{q}{C} = \mathcal{E}$$

$$q = \int Idt \quad I = \frac{dq}{dt}$$

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}$$

$$R \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C} + \mathcal{E} \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} + \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{q - C\mathcal{E}}{RC}$$

$$\frac{d(q - C\mathcal{E})}{dt} = -\frac{q - C\mathcal{E}}{RC} \quad q - C\mathcal{E} = ae^{-\frac{t}{RC}}$$

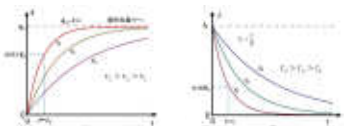
$$q(t) = C\mathcal{E} + ae^{-\frac{t}{RC}}$$


154

$$q(t) = C\mathcal{E} + ae^{-\frac{t}{RC}}$$

初始条件 $q(t=0) = 0$

$$q(t) = C\mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad \tau = RC$$

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$


155

电容器充电的能量

$$W_C = \int_0^{\infty} U_C(t)I(t)dt = \int_0^{\infty} \frac{q(t)}{C}I(t)dt$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{E}^2}{R} (1 - e^{-t/\tau})e^{-t/\tau} dt = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$$

电阻消耗的能量

$$W_R = \int_0^{\infty} I^2(t)Rdt = \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-2t/\tau} dt = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$$

电源提供的电能

$$W_S = \int_0^{\infty} \mathcal{E} \cdot I(t)dt = \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-t/\tau} dt = C\mathcal{E}^2$$

156

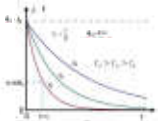
电容放电

$$IR + \frac{q}{C} = 0$$

$$q(t) = ae^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q(t=0) = C\mathcal{E}$$

$$q(t) = C\mathcal{E}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I(t) = -\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$


157