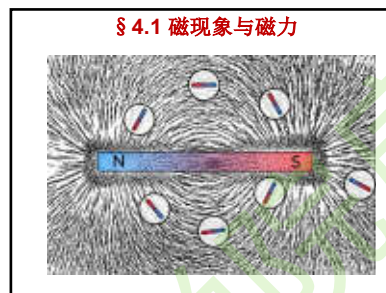


1

**第4章 磁力与磁场**

- § 4.1 磁现象与磁力
- § 4.2 电流的磁场
- § 4.3 静磁场的基本定理
- § 4.4 带电粒子在磁场中的运动
- § 4.5 霍尔效应

2



3

**§ 4.1.1 磁现象研究历史和磁性的起源**

磁现象的研究与应用（即磁学）是一门古老又年轻的学科

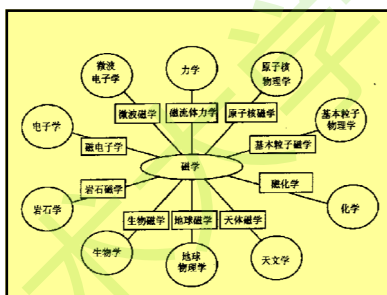
**磁现象的发现与应用历史悠久**

“慈石”，“Love Stone”，“Magnet”  
司南、指南针、五石散... “莫可原其理”  
马里古特命名南北极，吉尔伯特《论磁》

**磁的应用目前越来越广泛，已形成了许多与磁学相关的交叉学科。**

磁现象是一种普遍现象，一切物质都具有磁性。  
任何空间都存在磁场。

4



5

**磁的基本现象**

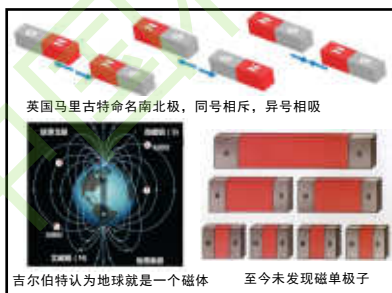
对基本磁现象的认识可以分为三个阶段

早期阶段：认识磁的基本现象（磁铁 ↔ 磁铁）

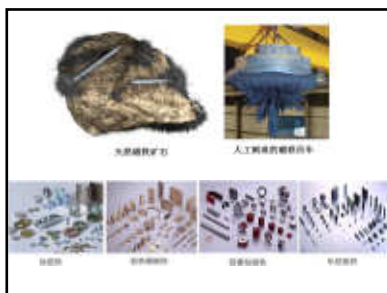
天然磁铁能吸引铁、钴、镍等物质

天然磁铁矿

6



7



8

**电与磁的联系**

**电流磁效应的发现（电流 ↔ 磁铁，电流 ↔ 电流）**

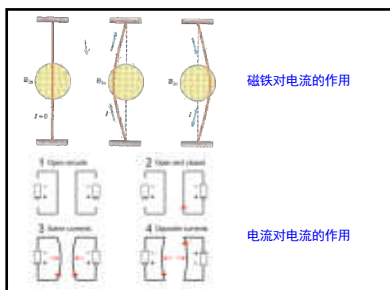
1820年4月，奥斯特发现电流对磁铁的作用。

打破了长期以来电学与磁学彼此独立发展和研究的界限。

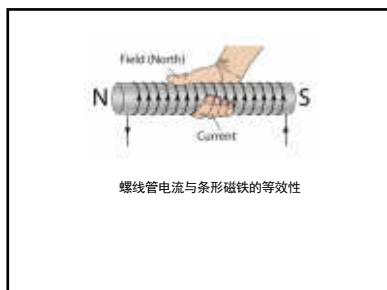
现代电磁学研究的基础

人们开始认识到电与磁有着不可分割的联系。

9



10



11

### 物质磁性的起源

安培的“分子电流假说”

1822年，安培提出了一个假说：组成磁铁的最小单元（磁分子）就是分子的圆形电流。即每个分子形成的圆形电流就相当于一根小磁针。

分子圆形电流呈现规律分布时，显示出宏观磁性。

现代量子理论

电子的轨道磁矩和自旋磁矩是物质磁性的主要来源。

12

### § 4.1.2 安培定律

静电学	稳恒磁场
<ul style="list-style-type: none"> <li>电荷与电荷之间的作用</li> <li>点电荷</li> <li>库仑定律</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>电流与电流之间的作用</li> <li>电流元</li> <li>安培定律</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>点电荷可以近似得到</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>稳恒电流只能存在于闭合回路之中，无法孤立得到</li> </ul>

13

### 安培定律建立历史

- 1820年7月21日，**奥斯特**发表了他著名的实验，即长直电流附近的磁针受力偏转。
- 9月11日，**阿喇果**在法国科学院介绍了这一成果。
- 9月18日，**安培**进行了圆电流对磁针的作用的实验。
- 9月25日，**安培**在法国科学院报告了关于平行载流导线之间的相互作用。
- 10月初，**安培**提出了螺线管与条形磁铁的等效性。
- 10月30日，法国科学家**毕奥**和**萨伐尔**发表了长直导线对磁极的作用力反比于距离的实验结果。在**拉普拉斯**的参与下得到了著名的定律。
- 12月4日，**安培**提出了电流相互作用的公式，即安培定律。
- 1821年1月，**安培**提出了分子电流假说。

14

### 安培的四个示零实验

安培定律并不是直接由实验得到，而是在安培设计的很巧妙的四个示零实验和一个假设的基础上，与相当高超的数学技巧相结合得到的。

安培首先设计了**无定向秤**

在**均匀磁场**（如地磁场）中，它所受的合力与合力矩均为零，处于**随遇平衡**；

在**非均匀磁场**中，它会**发生运动**

15

### 实验一

**实验：**安培将对折的通电导线移近无定向秤

**结果：**无定向秤无任何反应

**结论：**强度相等、方向相反的电流，对别的电流产生的**作用力大小相等、方向相反**

16

### 实验二

**实验：**安培将对折的通电导线中的一根螺线形绕在另一根上，移近无定向秤

**结果：**无定向秤无任何反应

**结论：**一段螺旋线导线的作用与直导线的作用相同

许多电流元的合作用是各个电流元作用的**矢量叠加**

17

### 实验三

**实验：**安培将圆弧形导体架在水银槽上，经水银通电，用各种通电线圈靠近它，改变通电回路。

**结果：**圆弧形导体不动。

**结论：****作用力垂直于电流方向**

18

### 实验四

**实验:**  
安培将三个周长比为1:k:k'的线圈通上电, A、C固定, 电流相等。B可自由活动, 电流任意。

**结果:**  
只有间距比为1:k时, B才不受力。

**结论:**  
距离增大k倍时, 电流长度需增加k'倍。

电流元之间的作用力的大小服从平方反比规律?

19

### 安培定律

两个电流元之间的相互作用力:

$$d\vec{F}_{21} = k \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{e}_{r1})}{r_{12}^2}$$

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$$

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r})$$

20

### 安培定律

数值上也可以写为:

$$d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2 d\vec{l}_1 d\vec{l}_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2}{r_{12}^2}$$

**方向:**

- 在施力电流元与位移构成的平面里
- 与受力电流元垂直

正确性无法用实验来直接检验, 因为无法得到稳恒电流元。

21

### 讨论

电流元之间的相互作用力不一定满足牛顿第三定律

$$d\vec{F}_{21} = k \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{e}_{r1})}{r_{12}^2}$$

22

### 讨论

但两个闭合电流回路的相互作用力满足牛顿第三定律

沿两个闭合回路积分得到的合作用力大小相等、方向相反。

23

### § 4.2 电流的磁场

24

### § 4.2.1 磁感应强度

电流与电流之间的相互作用:

- 电流产生磁场
- 磁场对电流作用

用试探电流元  $I_0 d\vec{l}_0$  来定义磁感应强度  $\vec{B}$

电流所受的力垂直于电流方向

定义电流元所受的力满足:  $d\vec{F}_0 = I_0 d\vec{l}_0 \times \vec{B}$

25

$$d\vec{F}_0 = I_0 d\vec{l}_0 \times \vec{B}$$

$$(dF_0)_{max} = I_0 dl_0 B$$

$$\vec{B} = \frac{(dF_0)_{max}}{I_0 dl_0}$$

磁感应强度的单位为特斯拉(T)  $1 \text{ T} = 1 \text{ NA}^{-1} \text{ m}^{-1}$

有时候也用高斯作为磁感应强度的单位(Gs, G)

$$1 \text{ T} = 10 \text{ kGs}$$

26

### 毕奥-萨伐尔定律 (Biot-Savart Law)

关于电流产生的磁感应强度的定律

磁感应强度的定义:

$$d\vec{F}_0 = I_0 d\vec{l}_0 \times d\vec{B}$$

安培定律:

$$d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_0 d\vec{l}_0 \times (I d\vec{l} \times \vec{r})}{r^3}$$

比较可得电流元产生的磁感应强度:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

27

### 不同电流元产生的磁感应强度

线电流元:  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$

面电流元:  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} dS \times \vec{r}}{r^3}$

体电流元:  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} dV \times \vec{r}}{r^3}$

28

### 叠加原理

$d\vec{F}_0 = I_0 d\vec{l}_0 \times d\vec{B}$

由力的叠加原理可得到磁感应强度的叠加原理

$\vec{F}_0 = I_0 d\vec{l}_0 \times \vec{B}$

$\vec{F}_0 = \int d\vec{F}_0 = \int I_0 d\vec{l}_0 \times d\vec{B} = I_0 d\vec{l}_0 \times \int d\vec{B}$

$\vec{B} = \int d\vec{B}$

29

【例4.1】长直线电流I，求在距离为r<sub>0</sub>处一点P的磁场。

【解】沿电流方向取一电流元dl  
代入毕奥-萨伐尔定律:

$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$

$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \phi}{4\pi r^2}$

$r = \frac{r_0}{\sin \phi}$

$l = -r_0 \cot \phi$

$dl = \frac{r_0 d\phi}{\sin^2 \phi}$

30

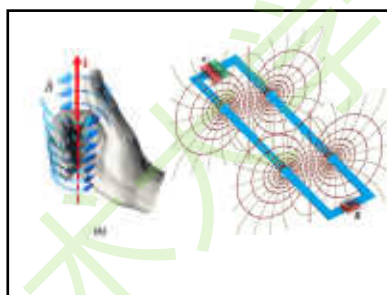
$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \phi}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r_0 d\phi}{(\frac{r_0}{\sin \phi})^2} \sin \phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \sin^2 \phi d\phi$

$B = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin^2 \phi d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \phi_1 - \cos \phi_2)$

对无限长导线:  $\phi_1 = 0, \phi_2 = \pi$

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$

31



32

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$

稳恒电流

静止电荷

33

【例4.2】半径为a的圆电流I，求轴线上距离圆心为x的P点处的磁场。

【解】由对称性可知，只有x分量

$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$

$dB_x = \frac{\mu_0 I dl \cos \theta}{4\pi r^2}$

$B_x = \int dB_x = \int \frac{\mu_0 I dl \cos \theta}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I \cos \theta}{4\pi r^2} \int dl$

$B_x = \frac{\mu_0 I \cos \theta}{4\pi r^2} 2\pi a = \frac{\mu_0 I a \cos \theta}{2 r^2} = \frac{\mu_0 I a^2}{2 r^3}$

34

圆形电流的磁矩  $\vec{\mu} = I\vec{S} = I\pi a^2 \vec{e}_x$

则轴线上  $\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{\mu}}{2\pi x^3}$

圆心处  $\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{\mu}}{2\pi a^3} = \frac{\mu_0 I}{2 a} \vec{e}_x$

无限远处  $\vec{B} \approx \frac{\mu_0 \vec{\mu}}{2\pi x^3}$

35

电偶极子 Electric dipole

磁偶极子 Magnetic dipole

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}]$

$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{\mu} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{\mu}]$

36

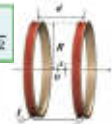
### 亥姆霍兹线圈 (Helmholtz coil)



两个圆形线圈共轴、大小一致；  
电流方向一致；  
线圈距离正好等于线圈半径。

线圈之间的轴线上磁场很均匀。

37

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2 r^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2 (a^2 + x^2)^{3/2}}$$


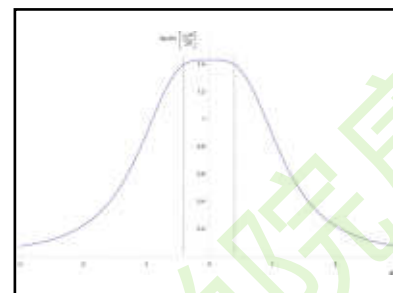
$$B_x = \frac{\mu_0 n^2}{2} \left[ \frac{1}{(R^2 + (\frac{d}{2} + x)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R^2 + (\frac{d}{2} - x)^2)^{3/2}} \right]$$

$\frac{dB_x(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow x = 0$

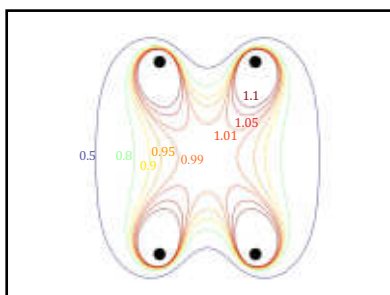
$\frac{d^2 B_x(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow d = R$

$$B_{max} = \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \frac{\mu_0 I N}{R}$$

38

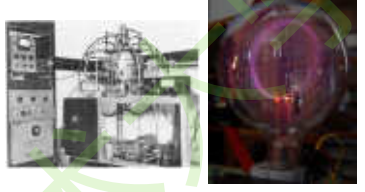


39



40

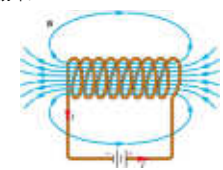
### 亥姆霍兹线圈



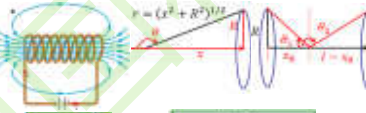
41

### 螺线管 (Solenoid Coils)

【例】绕在圆柱面上的螺旋形线圈叫螺线管。设它的长度为  $l$ ，半径为  $R$ ，单位长度的匝数为  $n$ ，电流强度为  $I$ ，求螺线管轴线上的磁感应强度分布。



42



$$B_x = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$B_x = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[ \frac{x}{R^2 \sqrt{R^2 + x^2}} \right]_{-x_0}^{x_0}$$

$$B_x = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[ \frac{x_0}{R^2 \sqrt{R^2 + x_0^2}} - \frac{-x_0}{R^2 \sqrt{R^2 + x_0^2}} \right]$$

$$B_x = \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{2x_0}{R^2 \sqrt{R^2 + x_0^2}} = \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{2l}{2\sqrt{R^2 + l^2}}$$

$$B_x = \frac{\mu_0 n I l}{\sqrt{R^2 + l^2}}$$

43

$$B_x = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

中心处:  $x_0 = \frac{l}{2}$   $\cos \theta_1 = \frac{l/2}{\sqrt{R^2 + l^2/4}}$   $\cos \theta_2 = -\cos \theta_1$

$$B_{cx} = \frac{\mu_0 n I}{2} 2 \cos \theta_1 = \frac{\mu_0 n I l}{2\sqrt{R^2 + l^2/4}} = \frac{\mu_0 n I l}{\sqrt{4R^2 + l^2}}$$

左端点:  $x_0 = 0$   $\cos \theta_1 = 0$   $\cos \theta_2 = -l/\sqrt{R^2 + l^2}$

$$B_{lx} = -\frac{\mu_0 n I}{2} \cos \theta_2 = \frac{\mu_0 n I l}{2\sqrt{R^2 + l^2}}$$

右端点:  $x_0 = l$   $\cos \theta_1 = l/\sqrt{R^2 + l^2}$   $\cos \theta_2 = 0$

$$B_{rx} = \frac{\mu_0 n I l}{2\sqrt{R^2 + l^2}}$$

44

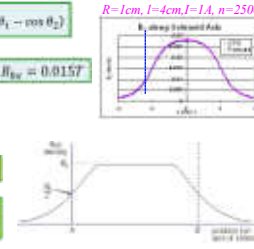
$$B_x = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

$R = 1cm, l = 4cm, I = 1A, n = 25000$

中心处:  $B_{cx} = 0.0287T, B_{lx} = 0.0157T$

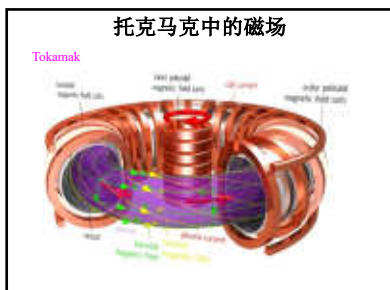
当  $l \gg R$ :

$$B_{cx} = \mu_0 n I$$

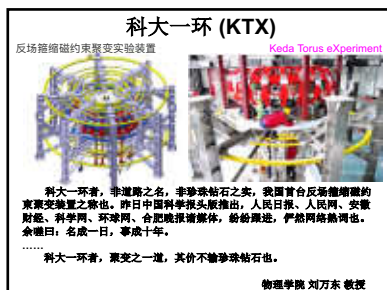
$$B_{lx} = \frac{\mu_0 n I l}{2}$$


45





46



47

### 运动电荷产生的磁场

一束载流子定向运动

$$\vec{j} = nq\vec{v}$$

取一电流元  $\vec{j}dV$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}dV \times \vec{r}}{r^3}$$

电流元中的电荷数  $dN = ndV$

单个运动电荷产生的磁场

$$\vec{B} = \frac{d\vec{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j dV \times \vec{r}}{n dV r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

48

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \vec{v} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{r}}{r^3} = \mu_0\epsilon_0\vec{v} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{r}}{r^3} = \mu_0\epsilon_0\vec{v} \times \vec{E}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \quad \leftarrow \text{相对论下依然成立}$$

相对论下:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qe_r}{r^2} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}$$

49

### 运动电荷产生的磁场

一个电子做匀速圆周运动产生的磁场

圆心处:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev}{a} \vec{e}_x$$

轴线其他地方: 对时间求平均, 垂直于轴线部分抵消

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev}{r^3} \vec{e}_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev}{r^3} \vec{e}_x$$

50

### § 4.2.2 磁场对电流的力与力矩

均匀磁场中的力

线电流:  $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad \vec{F} = \int_L I d\vec{l} \times \vec{B}$

面电流:  $d\vec{F} = \vec{i} dS \times \vec{B} \quad \vec{F} = \iint_S \vec{i} dS \times \vec{B}$

体电流:  $d\vec{F} = \vec{j} dV \times \vec{B} \quad \vec{F} = \iiint_V \vec{j} dV \times \vec{B}$

运动电荷:  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

51

### 均匀磁场中的力矩

线电流:  $\vec{M} = \int_L \vec{r} \times (I d\vec{l} \times \vec{B})$

面电流:  $\vec{M} = \iint_S \vec{r} \times (\vec{i} \times \vec{B}) dS$

体电流:  $\vec{M} = \iiint_V \vec{r} \times (\vec{j} \times \vec{B}) dV$

运动电荷:  $\vec{M} = q\vec{r} \times (\vec{v} \times \vec{B})$

52

【例】求一电流强度为I的载流线圈在均匀磁场B中所受的力与力矩。

【解】由于  $d\vec{l} = d\vec{r}$

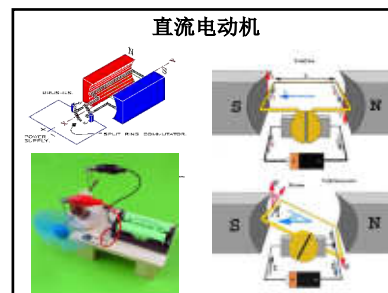
$$\vec{F} = \oint_C I d\vec{l} \times \vec{B} = I \left( \oint_C d\vec{r} \right) \times \vec{B} = 0$$

$$\vec{M} = \oint_C \vec{r} \times (I d\vec{l} \times \vec{B}) = I \left( \frac{1}{2} \oint_C \vec{r} \times d\vec{r} \right) \times \vec{B} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

磁矩:  $\vec{\mu} = I\vec{S}$

闭合线圈在均匀磁场中受力为零, 力矩不为零

53



54

闭合线圈在非均匀磁场中的力与力矩  
梯度力:

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \nabla) \vec{B} = \left( \mu_x \frac{\partial}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{B}$$

$$\vec{M} \approx \vec{\mu} \times \vec{B}$$

55

均匀磁场

非均匀磁场

56

思考

57

§ 4.3 静磁场的基本定理

58

§ 4.3.2 磁场高斯定理

高斯定理: 通过任意闭合曲面的磁通量等于零

$$\Phi = \oint_V \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

物理意义: 反映了磁场的“无源性”, 即孤立磁荷不存在。

磁场线没有源头      电场线有源头

59

证明:

电流元产生的磁场

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin\varphi$$

在以x为轴的圆上, 磁感应强度大小相等, 方向与圆相切。  
磁场线构成一个个呼啦圈(救生圈)

60

呼啦圈在任意一个封闭曲面上都会切出两个面元。

通过这两个面元的磁通量大小相等, 方向相反。

反过来, 一个封闭曲面被任意一个呼啦圈切割产生的面元, 磁通量之和恒为零。

任意一个电流元在任意一个封闭曲面产生的磁通量为零。

根据叠加原理, 任意电流在任意封闭曲面产生的磁通量为零。

61

积分形式      微分形式

$$\Phi = \oint_V \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

对于任意磁场, 磁场强度往往不均匀, 磁感线管截面也不均匀。

$$B_1 S_1 = B_2 S_2$$

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{S_2}{S_1}$$

62

§ 4.3.3 安培环路定理

安培环路定理: 沿任意闭合曲线, 磁感应强度的环量等于穿过该闭合曲线的电流强度的代数和的 $\mu_0$ 倍。

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{lm} I_l$$

物理意义: 反映了磁场的“有旋性”。

磁场有旋      电场无旋

63

### 立体角

对任意曲面, 当参考点在曲面内时

$$\Omega = \oiint_S d\Omega = 4\pi$$

当参考点在曲面外时

$$\Omega = \oiint_S d\Omega = 0$$

64

当一个面与一个点非常近时, 立体角是多少?

当P点从反面接近曲面时, 立体角趋近+2π

当P点从正面接近曲面时, 立体角趋近-2π

当P点从正面变到反面时, 立体角变化4π

65

设电流回路为L, P'为电流元所在处, "源点"

L为积分回路, P为积分元所在处, "场点"

r为源点到场点的位移,  $\vec{r} = -\vec{r}'$

r'为场点到源点的位移

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_L \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times \vec{r}}{4\pi r^3} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l}' \times d\vec{l}}{r^2} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l}' \times (-d\vec{l})}{r^3} \cdot \vec{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l}' \times (-d\vec{l})}{r^3} \cdot \vec{r}$$

66

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{l}' \times (-d\vec{l})}{r^3} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{l}' \times d\vec{l}}{r^3} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{l}' \times d\vec{l}}{r^3} \cdot \vec{r}$$

ω为带状区域对P点所张的立体角  
P点必定在圆柱体外  
定义电流回路右旋方向为正, 则有

$$\omega + \Omega_2 - \Omega_1 = 0 \quad \omega = -(\Omega_2 - \Omega_1) = -d\Omega$$

67

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L d\Omega$$

L<sub>1</sub>: 从A顺着dl方向走到A', 从正边走到反面, 立体角变化4π  
L<sub>2</sub>: 从B'顺着dl方向走到B, 从反面走到正面, 立体角变化-4π  
L<sub>3</sub>: 从C'顺着dl方向走到C, 回到原地, 立体角变化0

68

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L d\Omega = \begin{cases} \mu_0 I & L_1, \text{即}\vec{L} \text{与}\vec{I} \text{同向} \\ -\mu_0 I & L_2, \text{即}\vec{L} \text{与}\vec{I} \text{反向} \\ 0 & L_3, \text{即}\vec{L} \text{与}\vec{I} \text{不连通} \end{cases}$$

$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

对于多个电流回路, 根据磁场的叠加原理可得

$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L_{in}} I_i \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

69

### 电场 vs. 磁场

	电场	磁场
高斯定理	$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$	$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
环路定理	$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$
	$\nabla \times \vec{E} = 0$	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
	有源无旋	无源有旋

70

### 无限长直导线的磁场

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$$

$$B 2\pi r_0 = \mu_0 I$$

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \phi}{4\pi r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$$

71

### 有限尺寸的无限长直导线的磁场

【例4.3】半径为R的直导线, 电流I均匀流过导体截面, 求磁场。

【解】导体外(r > R)与线电流一样

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

导体内(r ≤ R)

$$B 2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I$$

$$B = \mu_0 \frac{r}{2\pi R^2} I$$

72



### 无限大面电流的磁场分布

两侧磁场大小相等, 方向相反

$$2B\Delta L = \mu_0 i \Delta L$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2}$$

匀强磁场

73

### 理想螺线管的磁场分布

由对称性可知管内和管外磁场均平行于螺线管的长轴

由安培环路定理可知管内管外均为匀强磁场

由环形电流在轴线上的磁感应强度易得理想螺线管轴线上

$$B_{r=0} = \mu_0 nI$$

$$B_{\theta} = \mu_0 nI$$

$$B_{\perp} = 0$$

$$B_{\parallel} = B_{\theta} = \mu_0 nI$$

$$B_{\perp} = 0$$

螺线管表面电磁力的压强是多少?

74

事实上, 管外磁场有垂直分量

$$B_{\perp r} = 0$$

$$B_{\perp \theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

75

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

当环比较细时,  $a \approx b = R$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} = \mu_0 nI$$

与无限长直螺线管结果一致

76

### § 4.4 带电粒子在磁场中的运动

77

### § 4.4.1 带电粒子在均匀场中的运动

洛伦兹力

带电粒子在磁场中的受力  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$$

洛伦兹力不对粒子做功, 功率为零, 动能不变, 速率不变。

78

### 带电粒子在均匀磁场中的运动

设磁场的方向为z

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\begin{cases} F_x = m \frac{dv_x}{dt} = qv_y B \\ F_y = m \frac{dv_y}{dt} = -qv_x B \\ F_z = m \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{qB}{m} \frac{dv_y}{dt} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x$$

$$v_x = v_{\perp} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

$$v_y = \frac{m}{qB} \frac{dv_x}{dt} = -v_{\perp} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v_x^2 + v_y^2 = v_{\perp}^2 = v_0^2 - v_z^2$$

$$v_{\perp} = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_z^2}$$

方向作匀速直线运动

横向速率恒定

79

$$\begin{cases} v_x = -v_{\perp} \cos(\omega t + \varphi) \\ v_y = -v_{\perp} \sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \frac{v_{\perp}}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) \\ y = y_0 + \frac{v_{\perp}}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \left(\frac{v_{\perp}}{\omega}\right)^2 = R^2$$

$$R = \frac{v_{\perp}}{\omega} = \frac{mv_{\perp}}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}$$

在与磁场垂直的平面里做匀速圆周运动

在与磁场平行的方向做匀速直线运动

轨迹为以磁场方向为轴的螺旋运动

周期与粒子速度无关

80

螺旋:  $h = v_z T = \frac{2\pi m v_z}{qB}$

81

### 回旋加速器 (Cyclotron)

Ernest Lawrence (1901-1958)  
1939 Nobel Prize in Physics

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}$$

$$R = \frac{v_{\perp}}{\omega} = \frac{mv_{\perp}}{qB}$$

$$v_{\max} = \frac{qBR}{m}$$

$$E_k = \frac{(qBR)^2}{2m}$$

82

### 带电粒子在均匀电磁场中的运动

$$\begin{cases} v_x = \frac{E}{B} + v_{\perp} \sin(\omega t + \varphi) \\ v_y = v_{\perp} \cos(\omega t + \varphi) \\ v_z = v_{\parallel} \cos \varphi \end{cases}$$

$$v_{\perp} = \sqrt{\left(v_{\perp} \cos \frac{E}{B}\right)^2 + v_{\parallel}^2}$$

匀速圆周运动+匀速直线运动  
匀速直线运动包含两个：  
电漂移速度

83

### § 4.4.2 带电粒子在非均匀磁场中的运动

#### 1. 磁矩守恒

带电粒子在非均匀磁场中运动，当磁场的非均匀尺度远大于带电粒子的回旋半径的时候，粒子的运动依然可以近似看成绕磁感线的螺旋运动。

由于非均匀磁场造成的梯度力做功，粒子沿磁感线方向的速度  $v_{\parallel}$  不再是守恒量。

由于磁场力不做功，动能不变。相应地，粒子垂直于磁感线方向的速度  $v_{\perp}$  不再是守恒量。

可证，粒子运动的回旋磁矩  $\mu$  是守恒量。

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{mv_{\perp}^2}{B}$$

84

设在轴对称、缓慢变化的磁场中  
取圆柱高斯面，根据磁场高斯定理，有

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int \rho_{\text{enc}} dV$$

$$B_r \cdot 2\pi r \Delta z + [B_z(x + \Delta z) - B_z(x)] \pi r^2 = 0$$

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$x$ 方向有梯度必然导致径向有磁场

径向磁场导致的洛伦兹力：  
用梯度力可得到同样结果

$$f_x = qv_{\parallel} B_r = -qv_{\parallel} \frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$f_z = -qv_{\perp} \frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

85

$$f_c = m \frac{dv_{\perp}}{dt} = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

两边同乘  $v_{\perp}$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \right) = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial x} \frac{dx}{dt} = -\mu \frac{dB_z}{dt}$$

其中带电粒子的磁矩：  
 $\mu = qv_{\perp} \frac{r}{2} = \frac{q v_{\perp} m v_{\perp}}{2} = \frac{1}{2} \frac{m v_{\perp}^2}{B}$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 + \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \right) = 0 = \mu \frac{dB_z}{dt}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = 0, \mu = \text{const}$$

缓变磁场中，磁矩守恒

86

### 回旋运动

$$r = \frac{mv_{\perp}}{qB}$$

$$r^2 = \left( \frac{mv_{\perp}}{qB} \right)^2 = \mu \frac{2m}{q^2 B}$$

回旋半径与磁场的平方根成反比  
弱场到强场时，回旋半径变小

$$\mu = B S = B \pi r^2 = \mu \frac{2\pi m}{q} = \text{const}$$

磁通量守恒

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}$$

回旋周期近似守恒

87

### $z$ 向速度 $v_{\parallel}$ 的变化

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{m v_{\perp}^2}{B} = \text{const}$$

弱场到强场时，回旋速度  $v_{\perp}$  变大， $z$ 向速度  $v_{\parallel}$  变小

螺距

$$h = v_{\parallel} T = \frac{2\pi m v_{\parallel}}{qB}$$

弱场到强场时，螺距变小

88

89

### 2. 磁镜与磁聚焦

磁镜：两端强、中间弱的磁场位形的装置。

90

$\mu = \frac{1}{2} \frac{mv_{\perp}^2}{B} = \text{const}$

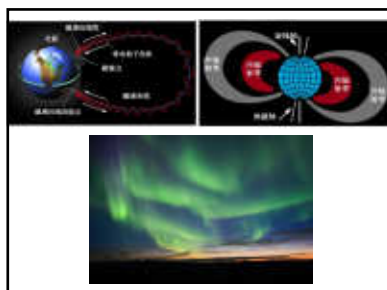
弱场到强场时，回旋速度  $v_{\perp}$  变大，z 向速度  $v_{\parallel}$  变小  
 $v_{\parallel} = 0$  时，粒子不能再往前走，返回，永远无法逃出磁镜

设粒子在磁镜最弱处运动速度与磁场夹角为  $\theta$ ，设到达磁场最强处恰好  $v_{\parallel} = 0$ ，根据磁矩守恒，有

$$\frac{1}{2} \frac{mv_{\perp}^2}{B} = \frac{1}{2} \frac{mv_{\perp}^2 \sin^2 \theta}{B_0} = \frac{1}{2} \frac{mv_{\parallel}^2}{B_0}$$

$\sin^2 \theta_{\text{cut}} = \frac{B_0}{B_{\text{ref}}} = \frac{1}{R_{\text{ref}}}$   $\theta > \theta_{\text{cut}}$  粒子被约束在磁镜里  
 $\theta < \theta_{\text{cut}}$  粒子穿过磁镜而损失

91



92

**磁聚焦**

The diagram shows a particle beam being focused by a magnetic field. A central part shows a particle's path being reflected and focused back to a point.

加上磁场后，小角度内发射的粒子在经过一个周期后回到同一点，达到聚焦目的。

93

**§ 4.5 霍尔效应**

The diagram shows a rectangular semiconductor sample with current flowing through it in a magnetic field. It illustrates the deflection of charge carriers and the resulting Hall voltage across the width of the sample.

94

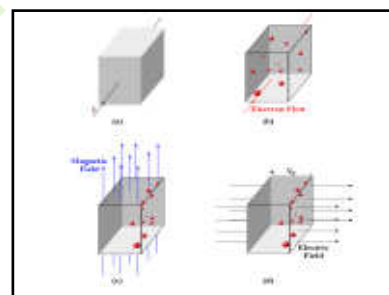
霍尔效应是磁电效应的一种。这一现象是霍尔与1879年在研究金属的导电机制时发现。

电流流过处在磁场中的金属时，在垂直于电流和磁场方向上，金属导体出现电势差。

但当时电子还没有被发现，人们无法解释霍尔现象。金属的霍尔效应也很弱，没有得到应用。

后来发现半导体也有霍尔效应，而且比金属强得多。随着半导体技术的发展，霍尔效应得到广泛的应用。

95



96

电子流过处在磁场中的半导体时，会因受到洛伦兹力而偏转

$$\vec{F}_L = -e\vec{v} \times \vec{B} = e v \vec{B} \vec{e}_y$$

载流子堆积在半导体一侧，会形成电场，给载流子施加电场力。

$$\vec{F}_e = -e\vec{E}_y = -e \frac{V_H}{b} \vec{e}_y$$

电场力抵消洛伦兹力，最终达到平衡。载流子不再偏转，电势差不在变化。

$$e v \vec{B} = e \frac{V_H}{b} \vec{e}_y$$

$$V_H = v \vec{B} b$$

97

$$I = JS = nev - bd$$

$$v = \frac{I}{nebd}$$

$$V_H = v \vec{B} b = \frac{IB}{nebd} = R_H \frac{IB}{d} = K_H IB$$

Material	$R_H$ (cm <sup>3</sup> /C)	$K_H$ (mV/A)
Ge	$10^{-2}$	0.001
Si	$10^{-3}$	$10^{-3}$
Al	$10^{-10}$	$10^{-10}$

霍尔系数。与载流子密度有关，表征材料产生霍尔效应的本领。

$$K_H = \frac{R_H}{d}$$

霍尔元件的灵敏度。表征元件产生霍尔效应的本领。灵敏度越大，产生的电势差越大。

98

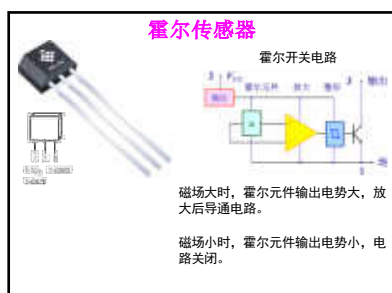
**霍尔效应的应用**

可测载流子的浓度。

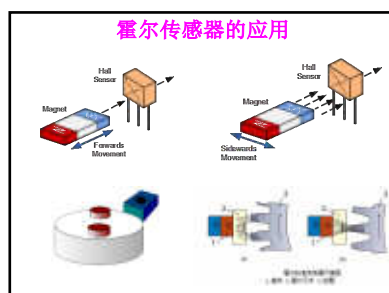
可测载流子带正电荷还是负电荷。即判断半导体是P型还是N型。

可测磁感应强度。是磁场测量的常用方法。

99



100



101

中国科学技术大学物理学院唐