第8章 电磁现象的基本规律与电磁波

1

第8章 电磁现象的基本规律与电磁波

2

19世纪中叶的电磁学

- 1785年，库仑定律
- 1799年，伏打电池，产生电流
- 1820年，奥斯特发现电流的磁效应
- 1821年，安培定律，毕奥-萨伐尔定律
- 1826年，欧姆定律
- 1831年，法拉第电磁感应

1840年前后，大部分电磁学实验规律相继发现，剩下的问题是对这些实验规律进行概括和总结，寻求他们之间的联系，建立统一理论。

当时电磁理论存在许多学派，他们均试图建立统一的电磁理论。

3

超距作用

- 库仑、安培等奉行超距作用。
- 另一个原因是拉格朗日、拉普拉斯、泊松等人从引力定律出发发展出数学上简洁而优美的势论。
- 1845年，纽曼和韦伯提出超距作用的电磁理论，韦伯企图用势统一电磁理论。
- 麦克斯韦评价：由纽曼和韦伯发展起来的这种理论极为精巧，…，在电磁科学应用方面取得了重大进展，因此他对我们而言是具有权威性的。
- 纽曼和韦伯的电磁理论的合理部分被麦克斯韦所采用。

4

近距作用

- 对于电磁现象的广泛研究使得法拉第逐渐形成了他特有的"场"的观念。
- 他认为力线是物质的，弥漫在全部空间。
- 电力和磁力不是通过虚拟空间的超距作用，而是通过电力线和磁力线来传递的。
- 法拉第的丰硕实验研究成果以及他的新颖的场的观念为电磁现象的统一理论准备了条件。
- 开尔文评价："在法拉第的许多贡献中，最伟大的贡献就是力线的概念了"。

5

静电势理论和数学理论已经成熟

1789年，拉普拉斯的引力势方程 $\boxed{\nabla^2 U = 0}$

1831年，泊松推广到静电势：泊松方程 $\boxed{\nabla^2 U = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$

1839年，高斯定理

$$\boxed{\oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla\cdot\vec{A})dV}$$

1854年，斯托克斯定理

$$\boxed{\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}}$$

6

麦克斯韦电磁理论

麦克斯韦（James Clerk Maxwell, 1831-1879），英国物理学家、数学家

- 16岁进入爱丁堡大学学习。18岁在爱丁堡皇家学会发表了两篇文章。
- 19岁进入剑桥大学，23岁（1854年）毕业。
- 大量阅读了开尔文、高斯、格林、泊松、斯托克斯、纽曼和韦伯等的论著。

7

- 1855-1856年，他发表了第一篇电磁学论文《论法拉第的力线》。1855年12月份发表第一部分，1856年2月发表第二部分，全文共70页。
- 在这篇论文中，法拉第的力线概念获得了精确的数学表述，并且由此导出了库仑定律和高斯定律。
- 1860年，他带着这篇论文拜访了70岁的法拉第。

Faraday: "I was at first almost frightened when I saw such mathematical force made to bear upon the subject, and then wondered to see that the subject stood it so well."

8

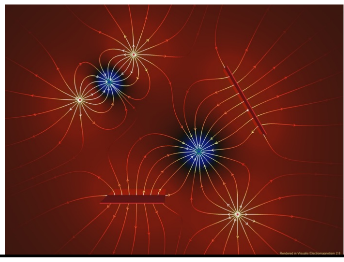
- 但这篇文章还只是限于把法拉第的思想翻译成数学语言，还没有引导到新的结果
- 1861-1862年，他发表了第二篇论文《论物理力线》，分四部分载于《哲学杂志》上
- 发展了法拉第的思想，提出两个大胆的假设：
  - 磁场变化产生涡旋电场
  - 电场变化产生位移电流
- 利用电磁以太模型，导出电磁波的波动方程，两个预言：
  - 电磁波的存在
  - 光的本质：电磁波
- 这篇文章包括了麦克斯韦研究电磁理论的主要结果，即提出了"两个假设"和"两个预言"

9

- 1865年，麦克斯韦的第三篇论文《电磁场的动力学理论》从几个基本实验事实出发，运用场论的观点，以演绎法建立了系统的电磁理论
  - 20个方程，20个变量
- 1873年出版的《电磁通论》一书是集电磁学大成的划时代著作，全面地总结了19世纪中叶以前对电磁现象的研究成果，建立了完整的电磁理论体系。这是一部可以同牛顿的《自然哲学的数学原理》、达尔文的《物种起源》和赖尔的《地质学原理》相媲美的里程碑式的著作。
- 1879年，一代伟人Maxwell因病在剑桥去世，享年48岁
- 1887年，赫兹证实了电磁波的存在，并测量了电磁波的传播速度，证实了Maxwell电磁理论
- 1894年，赫兹因病去世，享年37岁。呜呼哀哉！

10

§ 8.1 静态电场和磁场的基本规律



11

静电学中的实验规律与理论

静电学中的实验规律是库仑定律

$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{e}_r}{r^2}$ → $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{e}_r}{r^2}$

高斯定理

$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV$

环路定理

$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$

12

高斯定理

$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_0 dV$ $\oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla\cdot\vec{A}) dV$

$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_0$

环路定理

$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ $\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}$

$\nabla\times\vec{E} = 0$

13

由电场与电势的关系 $\vec{E} = -\nabla U$

$\nabla\cdot\vec{D} = \nabla\cdot\varepsilon\vec{E} = -\varepsilon\nabla\cdot\nabla U = -\varepsilon\nabla^2 U = \rho_0$

$\nabla^2 U = -\frac{\rho_0}{\varepsilon} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ 泊松方程

当空间没有电荷时：

$\nabla^2 U = 0$ 拉普拉斯方程

14

边值问题

泊松方程是一个二阶微分方程，需要知道边界条件才能得到确定的解

边值问题：在给定边界条件下，求解泊松方程或者拉普拉斯方程

1. 第一类边值问题：给定条件为整个边界的电势
2. 第二类边值问题：给定条件为整个边界的电势法向导数
3. 第三类边值问题：给定条件为部分边界的电势，另外边界的法向导数

15

唯一性定理

满足泊松方程或者拉普拉斯方程及所给的全部边界条件的电场解是唯一的

要保证U为问题的正确解，当且仅当其满足两个条件：

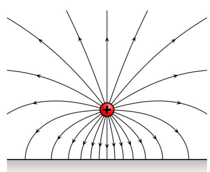
1. 满足泊松方程或者拉普拉斯方程；
2. 满足所给定的边界条件。（三类边值问题给出的情况）

证明略

16

电像法

点电荷放置在地面附近

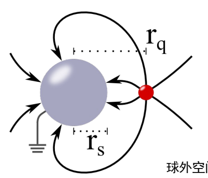


地面以上空间电场分布如何解析描述？

17

电像法

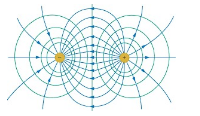
一个点电荷旁边放一个接地的导体球



球外空间电场分布如何求解？

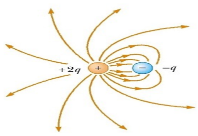
18

电像法



两个异号等量电荷的电场

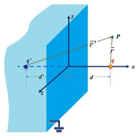
中垂面为零电势等势面



两个异号不等量电荷的电场

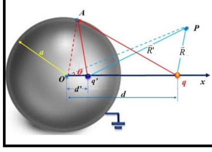
零电势等势面为一球面

19



$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$$

注意：仅对右边空间适用



$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R} + \frac{q'}{R'}\right)$$

$$\begin{cases} d' = \dfrac{a^2}{d} \\ q' = -\dfrac{a}{d}q \end{cases}$$

20

静磁学中的实验规律与理论

静磁学中的实验规律是安培定律

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{r})}{r_{21}^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

高斯定理

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{L_{in}} I_0$$

21

高斯定理

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV$$

环路定理

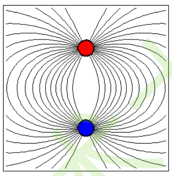
$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{L_{in}} I_0$$

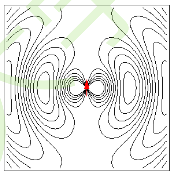
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0$$

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

22

§ 8.2 时变电场和磁场的基本规律

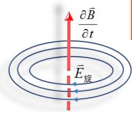




23

时变情况下的电场环路定律

为了解释感生电动势，麦克斯韦大胆地引入了涡旋电场的假设。

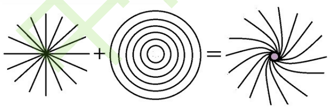


$$\varepsilon = \oint \vec{E}_{旋} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{E}_{旋} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

24

时变情况下的电场基本规律



高斯定理：

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$$

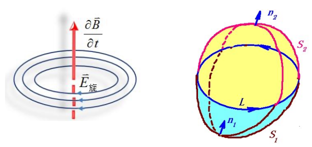
环路定理：

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

25

时变情况下的磁场高斯定理



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S_2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

26

统一以向外方向为正，则

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = +\iint_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S_2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\iint_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oiint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \left(\nabla \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) dV = 0$$

$$\nabla \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{B}) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \text{const}$$

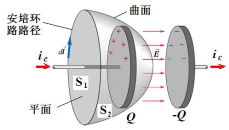
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

27

时变情况下的磁场安培环路定理

静磁场 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S}$

在时变情况下是否仍然成立？



在时变情况下不成立！

28

位移电流

电极板上的自由电荷为 $\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_0$

根据电荷连续性方程，有

$$\oiint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} = -\frac{dq_0}{dt} = \frac{d}{dt}\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = -\oiint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

统一以向右方向为正，则

$$\iint_{S_1} \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

29

定义位移电流

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

则中断的传导电流正好可以用位移电流接上

安培环路定理依然适用

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{j}_0 + \vec{j}_D)\cdot d\vec{S} = \iint_S \left(\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

30

位移电流假设

位移电流假设源于麦克斯韦对稳恒磁场环路定理的深入研究

稳恒条件下，稳恒电流满足：

$$\oiint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} = 0$$

它保证稳恒磁场的唯一性：

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S}$$

无论取什么样的面，只要以L为边界，右边积分唯一确定

31

然而时变情况下稳恒条件不成立

但电荷守恒定律（连续性条件）依然成立。

$$\oiint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} + \frac{dq_0}{dt} = 0$$

$$\oiint_S \vec{j}_0 \cdot d\vec{S} + \oiint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad \oiint_S \left(\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{j}_0 + \vec{j}_D)\cdot d\vec{S}$$

右边积分结果具有唯一性

32

位移电流本质

$$\vec{j}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

时变电场　　极化电流

时变电场、极化电流与传导电流一样能产生磁场。

如果真空中不存在传导电流

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

真空中时变电场产生磁场

33

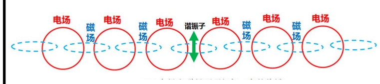
位移电流特点

- 并非自由电荷定向运动产生，不是真正的电流
- 在真空中、介质中等都可以存在
- 不伴随焦耳热
- 与外磁场无安培力的关系

34

电场与磁场相互激发

- 时变电场可以激发磁场
- 时间磁场可以激发电场

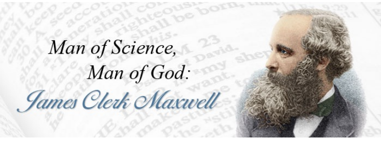


35

第8章 电磁现象的基本规律与电磁波

36

§ 8.3 麦克斯韦方程组



37

麦克斯韦方程组

积分形式

$$\begin{cases} \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_0 \\ \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \\ \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_0 + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \end{cases}$$

微分形式

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D} = \rho_0 \\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ \nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

38

本构方程

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \\ \vec{B} = \mu\vec{H} \\ \vec{j}_0 = \sigma\vec{E} \end{cases}$$

边值关系

$$\begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{e0} \\ E_{2t} - E_{1t} = 0 \\ B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ H_{2t} - H_{1t} = \vec{i}_0 \end{cases}$$

洛伦兹力

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

39

§ 8.4 平面电磁波

40

真空中自由空间的电磁波

$$\begin{cases} \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_0 \\ \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \\ \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_0 + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \end{cases}$$

对自由与无界真空：

$\rho_0 = 0$，$\vec{j}_0 = 0$

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = 0 \\ \nabla\times\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{H} = 0 \\ \nabla\times\vec{H} = \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = -\mu_0\nabla\times\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{H}) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

41

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = -\mu_0\nabla\times\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{H}) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E}$$

$$\nabla^2\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

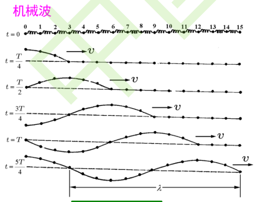
同法可得：

$$\nabla^2\vec{H} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\nabla^2\vec{E} \\ \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\nabla^2\vec{H} \end{cases}$$

42

机械波



波动方程：$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ 解：$y = Ae^{-i(\omega t - kx)}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\nabla^2 u$ $u = u_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$

43

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\nabla^2\vec{E} \\ \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\nabla^2\vec{H} \end{cases}$$

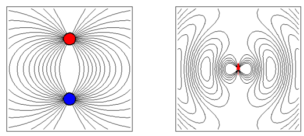
随时间变化的电场和磁场是以波的形式传播的

电磁波：
$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \\ \vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \end{cases}$$

波速：
$$v = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Big/\frac{\mu_0}{4\pi}} = \sqrt{9\times 10^9/1\times 10^{-7}} = 3\times 10^8 m/s = c$$

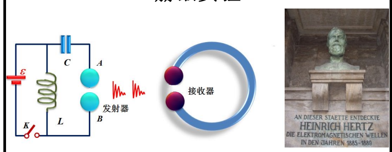
“我们不可避免地推论，光是媒介中起源于电磁现象的横波”

44



45

赫兹实验



- 1887年，赫兹发现了电磁波，并测量了电磁波的速度。
- 实验证明电磁波是平面偏振波，电场平行导线，磁场垂直导线。
- 证实了麦克斯韦的电磁理论！

46

平面电磁波的性质

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\dfrac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2\vec{E}\\ \dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=\dfrac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2\vec{H}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{E}=\vec{E}_0e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\\ \vec{H}=\vec{H}_0e^{-i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}\end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=-i\omega,\nabla=i\vec{k}$$

$$\begin{cases}\left(\omega^2-\dfrac{k^2}{\mu\varepsilon}\right)\vec{E}=0\\ \left(\omega^2-\dfrac{k^2}{\mu\varepsilon}\right)\vec{H}=0\end{cases}$$

$$v=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{c}{n}$$

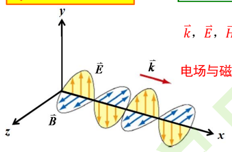
$$n=\frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$$ 折射率

47

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{E}=0\\ \nabla\times\vec{E}=-\mu_0\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{H}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=-i\omega,\nabla=i\vec{k}$$

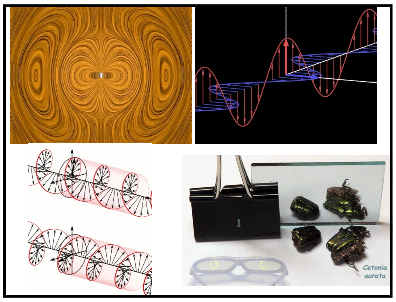
$$\begin{cases}\vec{k}\cdot\vec{E}=0,\ \vec{k}\cdot\vec{H}=0\\ \vec{k}\times\vec{E}=\mu\omega\vec{H}\\ \vec{k}\times\vec{H}=-\varepsilon\omega\vec{E}\end{cases}$$



$\vec{k}$，$\vec{E}$，$\vec{H}$构成正交右手螺旋

电场与磁场为相互垂直的横波

48



49

$$\vec{k}\times\vec{E}=\mu\omega\vec{H}\qquad kE=\mu\omega H$$

$$\frac{E}{\mu H}=\frac{\omega}{k}=v=\frac{c}{n}\qquad \frac{E}{B}=\frac{c}{n}$$

任一点、任一时刻，介质中电场强度与磁感应强度的幅度之比为电磁波的传播速度，即介质中的光速

$$\frac{c}{n}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\qquad \varepsilon E^2=\frac{B^2}{\mu}\qquad \frac{1}{2}ED=\frac{1}{2}BH$$

任一点、任一时刻，介质中电场能量密度与磁场能量密度相等

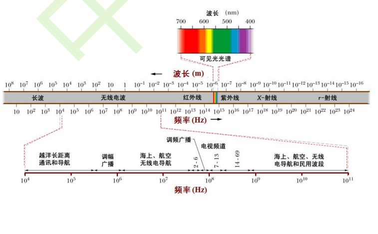
50

电磁波的性质

- 电磁波是横波 $\vec{k}\perp\vec{E}$，$\vec{k}\perp\vec{H}$
- 电场强度与磁场强度相互垂直，且$\vec{k}$，$\vec{E}$，$\vec{H}$右手螺旋
- 电场强度与磁场强度的幅度之比为：$\frac{E}{B}=\frac{E_0}{B_0}=\frac{c}{n}$
- 传播速度：$v=\frac{\omega}{k}=\frac{c}{n}$

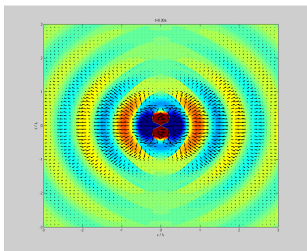
51

电磁波谱



52

§ 8.5 电磁场的能量和能量传输



53

电磁场的能量

静电场的能量密度：

$$w_e=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

静磁场的能量密度：

$$w_m=\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}=\frac{1}{2\mu}B^2$$

电磁场的能量密度：

$$\tilde{w}=w_e+w_m=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2+\frac{1}{2\mu}B^2$$

54

电磁场能量的变化

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{2}\vec{E}\cdot\vec{E}+\frac{1}{2\mu}\vec{B}\cdot\vec{B}\right)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}=\varepsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}+\frac{1}{\mu}\vec{B}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_0+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}&=\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H}-\vec{j}_0)-\vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{E})\\&=\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H})-\vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{E})-\vec{j}_0\cdot\vec{E}\\&=-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})-\vec{j}_0\cdot\vec{E}\end{aligned}$$

55

定义：$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ 称为波印廷矢量（Poynting Vector）

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}=-\nabla\cdot\vec{S}-\vec{j}_0\cdot\vec{E}$$

某一体积V内电磁场能量单位时间损失：

$$-\frac{\partial W}{\partial t}=-\iiint_V\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}dV=\iiint_V(\nabla\cdot\vec{S})dV+\iiint_V(\vec{j}_0\cdot\vec{E})dV$$

$$-\frac{\partial W}{\partial t}=\oiint_A\vec{S}\cdot d\vec{A}+\iiint_V(\vec{j}_0\cdot\vec{E})dV$$

56

能流密度

对于真空中的电磁场，$\vec{j}_0=0$

$$-\frac{\partial W}{\partial t}=\iint_A\vec{S}\cdot d\vec{A}$$

单位时间电磁场的能量损失等于波印廷矢量的通量

对比电荷守恒定律：$-\frac{\partial Q}{\partial t}=\oiint_A\vec{j}\cdot d\vec{A}$

电流密度：单位时间流过单位（垂直）面积的电荷

波印廷矢量：单位时间流过单位（垂直）面积的能量

称为能流密度

57

当空间中有传导电流时：

$$-\frac{\partial W}{\partial t}=\iint_A\vec{S}\cdot d\vec{A}+\iiint_V(\vec{j}_0\cdot\vec{E})dV$$

由公式3.22（P122），电功率密度：$p=\vec{j}_0\cdot\vec{E}$

电磁场能量不光是有一部分流出了表面，还有一部分通过电场做功消耗掉了。

对纯电阻介质，电场做功转换为焦耳热。 $p=\frac{j_0^2}{\sigma}$

对其他情况，电场做功可转换成机械能等。

58

平面电磁波的能量

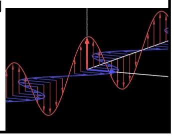
$$\tilde{w}=w_e+w_m=\frac{1}{2}\varepsilon E^2+\frac{1}{2\mu}B^2 \qquad \frac{E}{B}=\frac{\omega}{k}=v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$w_e=w_m \qquad \tilde{w}=\varepsilon E^2=\frac{B^2}{\mu}$$

$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$ 方向与$\vec{k}$正好相同

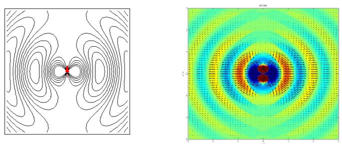
$S=EH=vBH=\tilde{w}v$

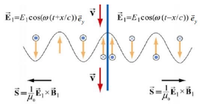
能量沿着波传播的方向流动



59

电偶极谐振子的能量传输

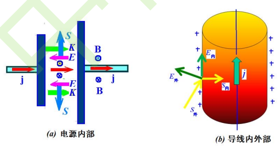




两个相反方向的平面电磁波

60

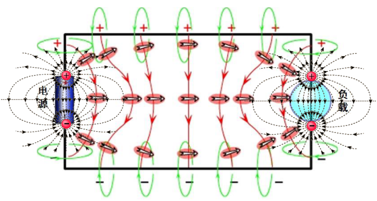
电路中的能量流动



- 非静电力对电磁场做正功
- 电场做负功，焦耳热
- 合力对电磁场做正功
- 能量沿垂直方向流出

- 在内部，能量垂直流入，转化为焦耳热
- 在外部，能量基本沿导线方向流动，少部分流入（电阻越大，比例越大）

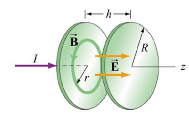
61

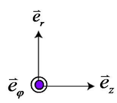


- 如果没有导线，就没有电流，没有磁场，电磁场能量不流动
- 能量主要通过导线周围的介质传播，导线只是引导方向

62

电容充电时的能量传输



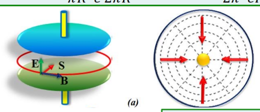


$$\vec{E}=\frac{\sigma_e}{\varepsilon}\vec{e}_z=\frac{Q}{\pi R^2\varepsilon}\vec{e}_z \qquad \vec{D}=\frac{Q}{\pi R^2}\vec{e}_z$$

$$\oint_L\vec{H}\cdot d\vec{l}=0+\iint_S\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad \vec{H}=\frac{r}{2}\frac{1}{\pi R^2}\frac{dQ}{dt}\vec{e}_\varphi=\frac{Ir}{2\pi R^2}\vec{e}_\varphi$$

63

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{Q}{\pi R^2\varepsilon}\frac{Ir}{2\pi R^2}\vec{e}_z\times\vec{e}_\varphi=-\frac{IQr}{2\pi^2\varepsilon R^4}\vec{e}_r$$



单位时间从边界流入的能量为 $P=-S\cdot 2\pi Rh=\frac{IQh}{\pi\varepsilon R^2}$

电容器总能量 $W_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2\cdot\pi R^2h=\frac{Q^2h}{2\pi\varepsilon R^2}$

单位时间能量改变： $\frac{dW_e}{dt}=\frac{Qh}{\pi\varepsilon R^2}\frac{dQ}{dt}=\frac{IQh}{\pi\varepsilon R^2}=P$

注意：忽略了涡旋电场和磁场的能量

64

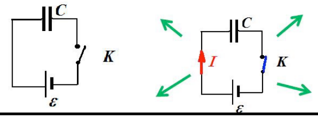
书上149页，RC电路

当电源电动势恒定时，电源做功总是一半给电容，一半给电阻

如果电阻为0，电阻不产生焦耳热，另一半能量哪里去了？

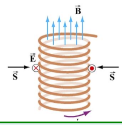
通电瞬间，电流极大，电场变化很大，磁场很大。此时磁场和涡旋电场不能忽略。

能量通过电磁波的形式辐射出去了。（类似电偶极子）



65

螺线管中的能量传输



$$\vec{B}=\mu nI\vec{e}_z$$

$$\oint_L\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\iint_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\vec{E}=-\frac{r}{2}\mu n\frac{dI}{dt}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=-\frac{r}{2}\mu n\frac{dI}{dt}\cdot nI\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_z=-\frac{\mu n^2rI}{2}\frac{dI}{dt}\vec{e}_r$$

单位时间流入侧面的能量： $P=-S2\pi Rh=\mu n^2I\frac{dI}{dt}\pi R^2h$

$$\frac{dW_m}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mu nI\cdot nI\right)\pi R^2h=\mu n^2I\frac{dI}{dt}\pi R^2h=P$$

66

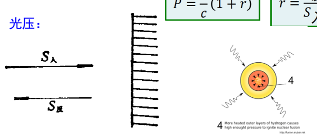
电磁波的动量

电磁波具有能量，也具有动量

动量密度： $\vec{g}=\frac{\tilde{w}}{c}\vec{e}_S=\frac{\vec{E}\times\vec{H}}{c^2}=\frac{\vec{S}}{c^2}$

$P=\frac{S}{c}(1+r)$ $r=\frac{S_{反}}{S_{入}}$

光压：



67