

应变、应力和弹性波

郑奇靖

中国科学技术大学，物理系

zqj@ustc.edu.cn

2024 年 3 月 21 日

① 位移场、应力和应变

② 晶体中的弹性波

晶体的连续介质近似

- 处理晶体的**弹性问题**时，我们将忽略晶体的**微观晶格结构**，把晶体当成**连续介质 (continuum)**：显然，只有当弹性波的波长超过 10^{-8} m 时，这种近似是允许的。

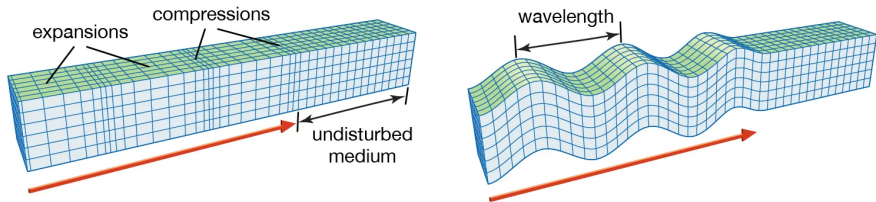


图 - 晶体的连续介质近似：弹性波波长远大于晶格间距。

- 此外，我们只考虑线性弹性形变，即**胡克定律 (Hooke's law)** 适用的区域。

位移场

- ✿ 当弹性体受到扰动之后，弹性体的各个位点 \mathbf{r} 偏离平衡位置，记偏移的量为 $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ，称为**位移场** (*displacement field*)

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \begin{bmatrix} u_x(\mathbf{r}, t) \\ u_y(\mathbf{r}, t) \\ u_z(\mathbf{r}, t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

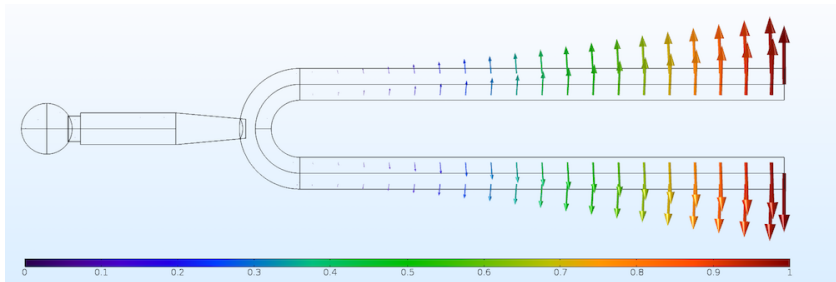


图 - 形变之后的音叉中的位移场。

- ✿ 位移场的**运动方程** (*equation of motion*) 描述了弹性波在弹性体之中的传播。

✿ 考虑原先处于 \mathbf{r} 和 $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ 处的两点，两点的位移为 $\delta\mathbf{u}$ ，发生形变之后，两点位移的变化量为

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \\ &\approx \delta\mathbf{r} \cdot \nabla\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{O}(\delta r^2)\end{aligned}\quad (2)$$

忽略二次项，并写成分量的形式¹

$$\delta u_i = \sum_{j=1}^3 \delta r_j \frac{\partial u_i}{\partial r_j} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3)$$

更进一步，我们把上式右边分解成对称和反对称两部分：

$$\delta u_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right] \delta r_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial u_i}{\partial r_j} - \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right] \delta r_j \quad (4)$$

定义无量纲的二阶对称张量 ε ，其张量元为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right] = \varepsilon_{ji} \quad (5)$$

ε 称为应变张量 (strain tensor)，反映了弹性体中形变的相对大小： $\delta\mathbf{u}/\delta\mathbf{r}$ 。

¹这里数字分别代表：1 \rightarrow x, 2 \rightarrow y, 3 \rightarrow z, 比如 $r_1 = x$, $u_1 = u_x$

✿ 式(5)可以简单写成

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (6)$$

式(5)和(6)建立了位移场 (*displacement field*) 和应变张量 (*strain tensor*) 之间的关系。

✿ 可以证明, 式(4)中反对称项可以写成

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial u_i}{\partial r_j} - \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right] \delta r_j = \frac{1}{2} [(\nabla \times \mathbf{u}) \times \delta \mathbf{r}]_i \quad (7)$$

对应的是旋转位移。

✿ 发生形变之后 \mathbf{r} 和 $\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}$ 之间的间距变成

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{r} + \delta \mathbf{u})^2 &\approx \delta \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{r} + 2\delta \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathcal{O}(\delta \mathbf{u}^2) \\ &= |\delta \mathbf{r}|^2 + 2\delta \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathcal{O}(\delta \mathbf{u}^2) \end{aligned} \quad (8)$$

✿ 忽略高阶项 $\mathcal{O}(\delta \mathbf{u}^2)$, 则上式表明只有应变张量对间距变化有贡献, 反映了质点之间的拉伸或者压缩。

应变

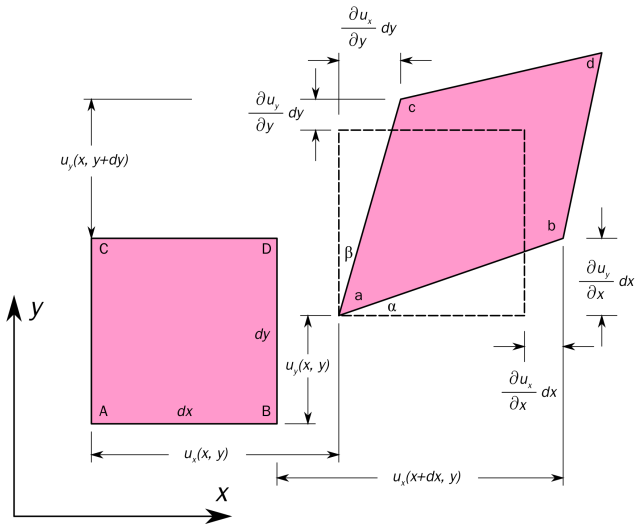


图 - 二维位移场示意图。²

²https://en.wikipedia.org/wiki/Infinitesimal_strain_theory

✿ 考虑应变之前变成分布为 $\delta r_i (i = 1, 2, 3)$ 的体积元

$$\Delta V = \det \begin{bmatrix} \delta r_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta r_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta r_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

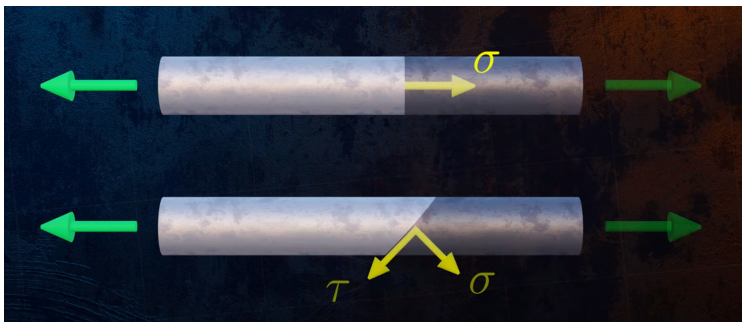
✿ 发生应变之后，体积元的边变成 $\delta r_i + \delta u_i$ ，并且 $\delta u_i = \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial r_j} \delta r_j$

$$\Delta V' = \det \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon_{11} & \frac{\partial u_1}{\partial r_2} & \frac{\partial u_1}{\partial r_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial r_1} & 1 + \varepsilon_{22} & \frac{\partial u_2}{\partial r_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial r_1} & \frac{\partial u_3}{\partial r_2} & 1 + \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta r_1 \\ \delta r_2 \\ \delta r_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

✿ 因此体积变化率，或者说膨胀率 η

$$\eta = \frac{\delta V' - \delta V}{\Delta V} = \det \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{\partial u_1}{\partial r_2} & \frac{\partial u_1}{\partial r_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial r_1} & \varepsilon_{22} & \frac{\partial u_2}{\partial r_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial r_1} & \frac{\partial u_3}{\partial r_2} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \approx \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (11)$$

- 物体由于外因（受力、湿度、温度场变化等）而发生形变时，在物体内部各部分之间产生相互作用的“内力”，单位面积上的“内力”称为应力（stress）。³



- 应力的量纲是 $\left[\frac{\text{力}}{\text{面积}} \right]$ ，单位为 $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$ 。
- “内力”有与选择的面平行的分量，也有与面垂直的分量。

³<https://www.youtube.com/watch?v=aQf6Q8t1FQE>

鲁珀特之泪

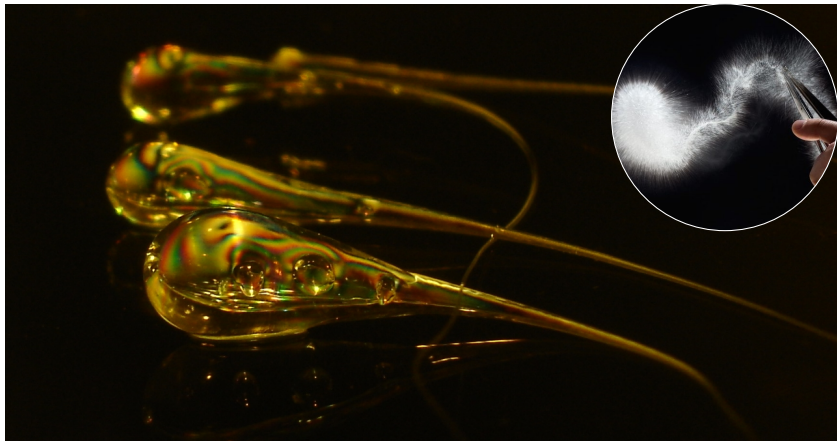


图 - 鲁珀特之泪 (*Prince Rupert's drop*)：将熔融玻璃滴入水中得到的“蝌蚪”状的玻璃泪珠，头部存在大量应力，特别坚硬（真的可以挡子弹），但是只要一捏尾巴就会爆掉。图中彩色条纹是通过光学的方法来显示应力的分布。⁴

⁴<https://phys.org/news/2017-05-scientists-year-old-mystery-prince-rupert.html>

✿ 弹性体中的应力可以用一个二阶张量 $\boldsymbol{\sigma}$ (*Cauchy stress tensor*) 来描述⁵

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (12)$$

任意一个面 ΔS 受到的力

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\Delta S \quad F_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji}n_j\Delta S \quad (13)$$

其中 \mathbf{n} 是该面的法线方向。写成矩阵的形式就是

$$\begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (14)$$

因此，某个体积 V 的弹性体中总的受力

$$\mathbf{F}_{tot} = \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (15)$$

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_stress_tensor

- 应力张量元 σ_{ij} 的下标：第一个表示作用平面的法线方向，第二个下标表示作用力的方向，比如 σ_{12} 表示垂直 x 方向的平面上沿 y 方向的应力。

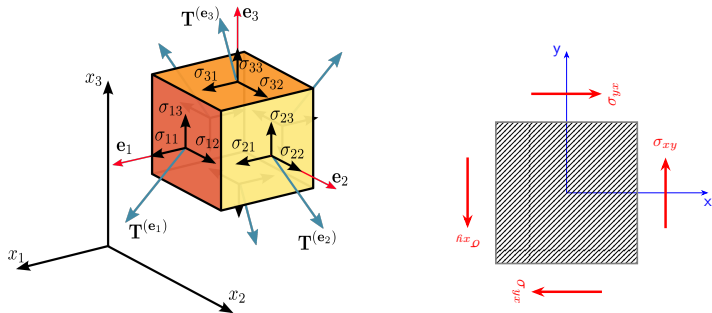


图 - 应力张量分量的示意图。

- 平衡条件要求应力张量是对称的，即

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (16)$$

因此应力张量只有6个独立张量元。

应力—应变曲线

❁ 固体在外力作用下将发生形变：

❁ 如果外力撤去后形变消失，则该形变称为**弹性形变** (elastic deformation)

❁ 如果外力撤去后形变残余，则该形变称为**塑性形变** (plastic deformation)

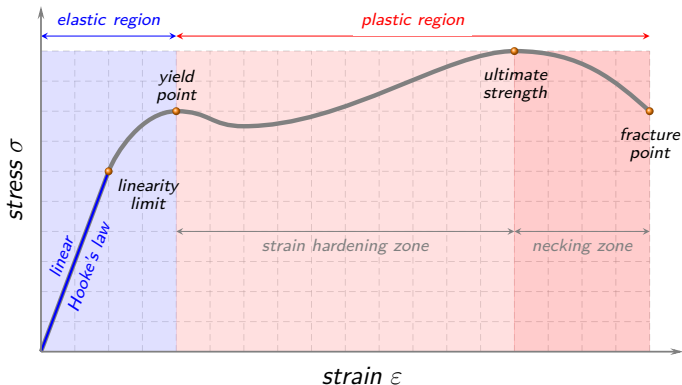
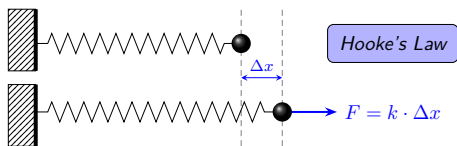


图 - 拉伸测试 (tensile test) 中典型的应力—应变曲线⁶。

⁶<https://www.tec-science.com/material-science/material-testing/tensile-test/>

胡克定律

✿ 胡克定律 (Hooke's law) : $F = k \cdot \Delta x$



✿ 广义胡克定律 (generalized Hooke's law) :

$$\sigma = \mathbf{C} \varepsilon \quad (17)$$

或

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (18)$$

其中 \mathbf{C} 是一个四阶张量, 称为弹性模量张量 (elastic modulus tensor) 或者刚度张量 (stiffness tensor), 有 $3^4 = 81$ 个张量元, 其中只有 21 个独立的张量元。

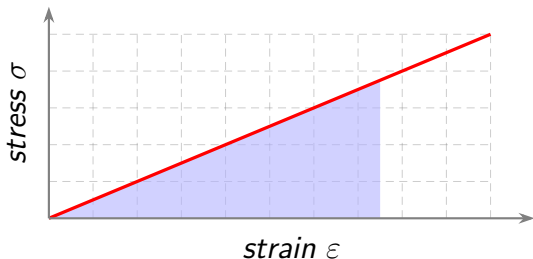
☞ 由于应变无量纲, 因此弹性张量的量纲与应力相同, 也是 $\left[\frac{\text{力}}{\text{面积}} \right]$, 即压强的量纲。

弹性能密度

- 根据胡克定律，弹簧的弹性能 (elastic energy) 或者应变能 (strain energy) 为

$$U = \int_0^{\Delta x} kx dx = \frac{1}{2} k \Delta x^2 \quad (19)$$

- 连续介质单位体积的弹性能，即**弹性能密度 (elastic energy density)** 是应力—应变曲线包围的面积，



$$\psi = \int \sigma d\varepsilon$$
$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

- 连续介质的弹性能密度与应力、应变之间的关系为

$$\psi = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (20)$$

弹性模量张量的对称性

✿ 弹性模量张量的张量元满足对称性：

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \Rightarrow \quad C_{ijkl} = C_{jikl} \quad \Rightarrow \quad 81 \rightarrow 6 \times 3 \times 3 = 54 \quad (21)$$

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} \quad \Rightarrow \quad C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad \Rightarrow \quad 54 \rightarrow 6 \times 6 = 36 \quad (22)$$

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad \Rightarrow \quad 36 \rightarrow 6 \times (6 + 1)/2 = 21 \quad (23)$$



✿ 式(21)可以由应力张量的对称性要求得到：

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

✿ 根据广义胡克定律：

$$\sigma_{12} = \sum_{kl} C_{12kl} \varepsilon_{kl}$$

$$\sigma_{21} = \sum_{kl} C_{21kl} \varepsilon_{kl}$$

✿ 我们可以得到

$$\sum_{kl} [C_{12kl} - C_{21kl}] \varepsilon_{kl} = 0$$

$$\Rightarrow C_{12kl} = C_{21kl}$$

✿ 同理，根据应变张量的对称性要求，

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}$$

我们可以证明式(22)。

✿ 式(23)由弹性能密度偏导与顺序无关得到

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{jk}} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ &= C_{klij} \end{aligned}$$

✿ 因此，式(18)可以该写为：

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (24)$$

式(24)的写法也称为 **Voigt 记号**，且蓝色矩阵是一个**对称矩阵**。其中中 ε 列矩阵后三个中的系数 2 是因为

$$\sigma_{23} = \sum_{k,l} C_{23kl} \varepsilon_{kl} = \dots + C_{2323} \varepsilon_{23} + C_{2332} \varepsilon_{32} + \dots$$

☞ 为简便，通常对上式中的下标做简化： $C_{ijkl} \rightarrow C_{mn}$ ，对应关系如下

$$11 \rightarrow 1, \quad 22 \rightarrow 2, \quad 33 \rightarrow 3, \quad 23 \rightarrow 4, \quad 31 \rightarrow 5, \quad 12 \rightarrow 6$$

- ❁ **杨氏模量 (Young's modulus)**：定义为线性弹性形变区域，材料受到**拉伸/压缩 (tensile/compression)** 线应变的时候，应力 (σ) 和应变 (ε) 的比值。⁷

$$E = \frac{\text{tensile stress}}{\text{tensile strain}} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F_{\perp}/A}{\Delta L/L_0} = \frac{F_{\perp} L_0}{A \Delta L} \quad (25)$$

压缩形变时 $\varepsilon < 0$ ，上式取绝对值。

- ❁ 杨氏模量的单位是 N/m^2 ，也即**压强**的量纲。一般各种材料的杨氏模量数值十分巨大，所以常用 GPa 作为单位。
- ❁ 材料的杨氏模量越大表明材料的**硬度 (stiffness)** 越大：比如金刚石 ($1050\text{--}1210 \text{ GPa}$)、石墨烯 (1050 GPa)、黄铜 (106 GPa)、金子 (77.2 GPa) ...
- ❁ **杨氏模量的大小直接反映了晶体中原子间相互作用的强弱!**⁸

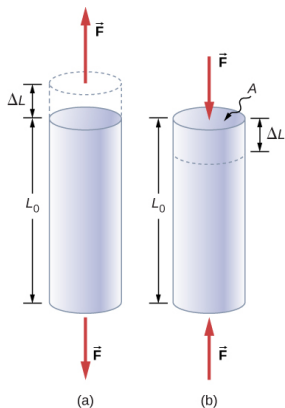


图 - 受到拉伸 (左) 和压缩 (右) 形变的物体。

⁷就是杨氏双缝 (Young's double slit) 的那个杨。(https://en.wikipedia.org/wiki/Young%27s_modulus)

⁸<https://www.youtube.com/watch?v=DLE-ieOVfJI>

各类材料的杨氏模量

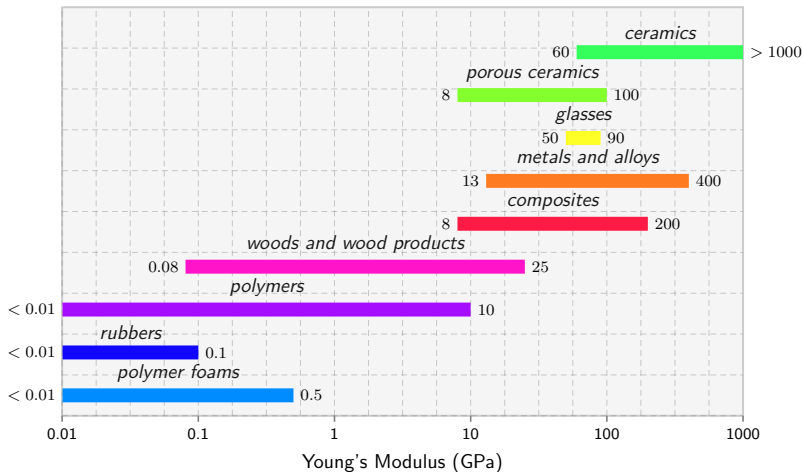


图 - 各类材料的杨氏模量的范围。⁹

⁹<http://www-materials.eng.cam.ac.uk/mpsite/properties/non-IE/stiffness.html>

泊松比

❁ 泊松比 ν (*Poisson's ratio*)：是指材料在单向受拉或受压时，横向应变与轴向应变的比值，也叫横向变形系数，它是反映材料横向变形的弹性常数。¹⁰

$$\nu = -\frac{\text{transverse strain}}{\text{axial strain}} = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L} \quad (26)$$

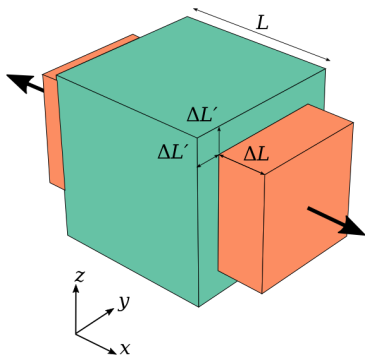


图 - 立方体受到 x 方向的拉伸时，其 yz 平面也同时发生形变，图片来自 wiki。¹¹

¹⁰ <https://www.youtube.com/watch?v=tu01M3P7ygA>

¹¹ https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson%27s_ratio

- ✿ 常见材料的泊松比数值在 $(0, 0.5]$ 之间。

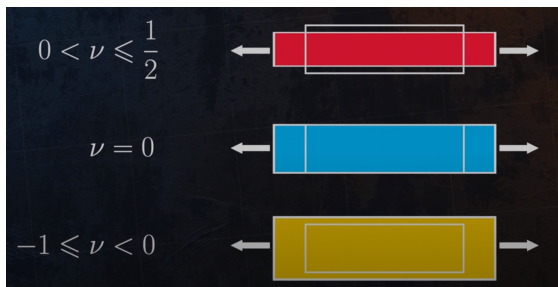


图 - 不同数值泊松比示意图。¹²

- ✿ 泊松比为 0 的材料，比如**软木塞**。
- ✿ 一些人工的材料泊松比也有可能 < 0 。

¹²<https://www.youtube.com/watch?v=tu01M3P7ygA>

剪切模量

- 对弹性体施加一个侧向的力 F ， F 除以受力面积 A 就是**剪切应力 (shear stress)**。弹性体会发生形变，形变的角度 $\alpha \approx \Delta x/L$ 称为**剪切应变 (shear strain)**，**剪切模量 (shear modulus) μ** 定义为：

$$\mu = \frac{\text{shear stress}}{\text{shear strain}} = \frac{F/A}{\Delta x/L} \quad (27)$$

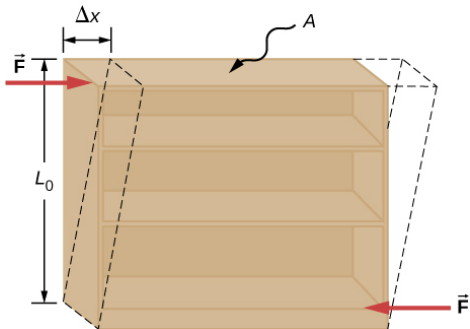


图 - 对一个弹性体施加侧向的力，弹性体发生剪切应变

体弹性模量

- 对弹性体施加一个整体的压强 (ΔP)，这个压强称为**体积应力 (bulk stress)**，弹性体的体积减少量 ($-dV$) 除以原来的体积 (V) 称为**体积应变 (bulk strain)**，体积应力除以体积应变就等于**体弹性模量 (bulk modulus)**：

$$B = \frac{\text{bulk stress}}{\text{bulk strain}} = \frac{\Delta P}{-dV/V} = -V \frac{dP}{dV} \quad (28)$$

上式取负号是为了保证 $B > 0$ ，因为一般压强增加，体积减少。

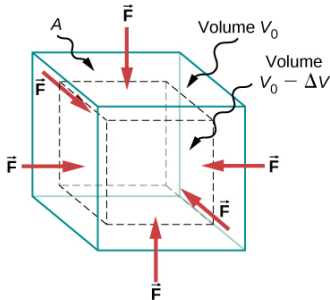


图 - 受到体积应变的立方体，整体体积在缩小。

- 体弹性模量的倒数称为材料的**压缩率 (compressibility)**。

不同对称性下的弹性模量张量

✿ 各向同性 (*isotropic*) 弹性体, 弹性模量张量独立的矩阵元只有2个, 式(24)中的矩阵可以写成

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (29)$$

其中张量元跟体杨氏模量 E , 泊松比 ν 和剪切模量 μ 的关系为:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & C_{12} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ &= \lambda + 2\mu & &= \lambda & &= \mu \end{aligned}$$

λ 也称为拉梅模量 (*Lamé modulus*), 体弹性模量 $B = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ 。弹性模量张量元也可以写成

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (30)$$

✿ **立方 (cubic) 对称性**的弹性体，**独立**的张量元只有**3个**，式(24)中的矩阵可以写成¹³

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (31)$$

其中张量元跟体杨氏模量 E ，泊松比 ν 和剪切模量 μ 的关系为：

$$C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad C_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad C_{44} = \mu; \quad \nu = \frac{C_{12}}{C_{11} + C_{12}}$$

体弹性模量 $B = \frac{1}{3}(C_{11} + 2C_{12})$ 。

不同对称性下的弹性模量张量

Form of the (s_{ij}) and (c_{ij}) matrices

Key to notation

- zero component
- non-zero component
- equal components
- components numerically equal, but opposite in sign
- twice the numerical equal of the heavy dot component to which it is joined (for s)
- the numerical equal of the heavy dot component to which it is joined (for c)
- X $2(s_{11}-s_{12})$ (for s)
- X $\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})$ (for c)

All the matrices are symmetrical about the leading diagonal.

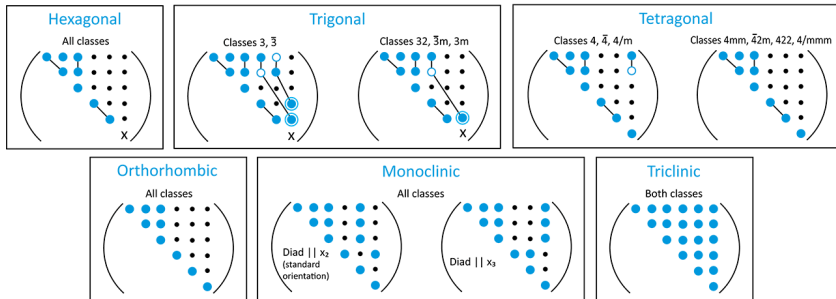
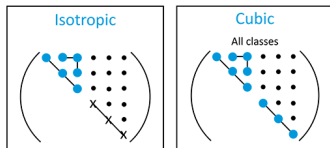


图 - 各种对称性下的弹性模量张量矩阵元分布。¹⁴

¹³ http://solidmechanics.org/text/Chapter3_2/Chapter3_2.htm

¹⁴ <https://duffy.princeton.edu/single-crystal-elasticity-database>

✿ 根据**牛顿方程** $m\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}$ ，我们可以得到

$$\int_V \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV = \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_V \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) dV \quad (32)$$

假设不存在外力，即 $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = 0$ 。根据积分的高斯定理

$$\oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \quad (33)$$

代入式(32)可以得到

$$\int_V \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \quad (34)$$

由于式(34)对任意体积元 V 成立，我们可以得到位移场跟应力的关系：

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (35)$$

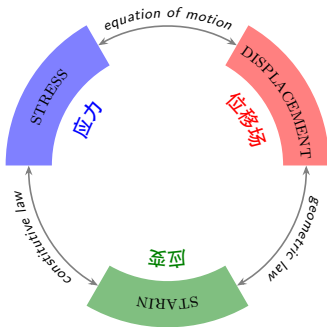
式(35)就是弹性体的**运动方程** (*equation of motion*)，写成分量的形式

$$\rho \ddot{u}_i = [\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}]_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial r_j} \sigma_{ji} \quad (i = 1, 3) \quad (36)$$

① 位移场、应力和应变

② 晶体中的弹性波

✿ 位移场、应变和应力之间的关系可以用如下的图总结：



- geometric law:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (1)$$

- constitutive law:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

- equation of motion:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3)$$

图 - 位移场、应变和应力之间的关系。

✿ 弹性体的波动方程 (wave equation)

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} \nabla \cdot \left\{ \mathbf{C} \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] \right\} \Rightarrow \rho \ddot{u}_i = \sum_{j,k,l=1}^3 C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial r_j \partial r_l} \quad (37)$$

各向同性弹性介质中的波动方程

✿ 各向同性弹性介质中的波动方程：

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = (\lambda + \mu) \nabla [\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)] + \mu \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \quad (38)$$

✿ 对 $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ 做傅里叶变换

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \int d\omega \int d\mathbf{q} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, \omega) e^{i[\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t]} \quad (39)$$

✿ 将式(39)代入(38)，我们可以得到

$$\rho \omega^2 \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, \omega) = (\lambda + \mu) \mathbf{q} [\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, \omega)] + \mu q^2 \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, \omega) \quad (40)$$

写成矩阵的形式：

$$\omega^2 \begin{bmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \\ \tilde{u}_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \mu q^2 + (\lambda + \mu) q_x^2 & (\lambda + \mu) q_x q_y & (\lambda + \mu) q_x q_z \\ (\lambda + \mu) q_y q_x & \mu q^2 + (\lambda + \mu) q_y^2 & (\lambda + \mu) q_y q_z \\ (\lambda + \mu) q_z q_x & (\lambda + \mu) q_z q_y & \mu q^2 + (\lambda + \mu) q_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \\ \tilde{u}_z \end{bmatrix} \quad (41)$$

即本征值矩阵方程：

$$D U = \omega^2 U \quad (42)$$

✿ 式(41)是一个 3×3 本征值矩阵方程, 对于任意给定波矢 \mathbf{q} , 有3组本征值 ω_i 和本征向量 $\tilde{\mathbf{u}}_i$ 。

$$\rho\omega^2\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, \omega) = (\lambda + \mu)\mathbf{q}[\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, \omega)] + \mu q^2\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, \omega)$$

✿ **纵波 (longitudinal wave)** : 传播方向 \mathbf{q} 和振动方向 $\tilde{\mathbf{u}}$ 平行, 假设 $\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = q_z \tilde{u}_z$, 则

$$\begin{aligned}\rho\omega^2\tilde{u}_z &= (\lambda + \mu)q_z^2\tilde{\mu}_z + \mu q_z^2\tilde{u}_z \\ &= (\lambda + 2\mu)q_z^2\tilde{\mu}_z\end{aligned}\quad (43)$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} q_z \quad (44)$$

纵波的传播速度 (群速度):

$$v_L = \frac{\partial\omega}{\partial q} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (45)$$

✿ 式(41)是一个 3×3 本征值矩阵方程, 对于任意给定波矢 \mathbf{q} , 有3组本征值 ω_i 和本征向量 $\tilde{\mathbf{u}}_i$ 。

$$\rho\omega^2\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, \omega) = (\lambda + \mu)\mathbf{q}[\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, \omega)] + \mu q^2\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, \omega)$$

✿ **横波 (transverse wave)** : 传播方向 \mathbf{q} 和振动方向 $\tilde{\mathbf{u}}$ 垂直, 即 $\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0$

$$\rho\omega^2\tilde{\mathbf{u}} = \mu q^2\tilde{\mathbf{u}} \quad (46)$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}q \quad (47)$$

横波有**两支**, 传播速度 (群速度) 为

$$v_T = \frac{\partial\omega}{\partial q} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (48)$$

✿ 显然纵波的传播速度比横波的传播速度要大!

$$\frac{v_L}{v_T} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} \quad (49)$$

✿ 根据波动方程(37)和立方对称性下的弹性张量 (31), 可以得到波动方程

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) \quad (50)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} \right) \quad (51)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial z} \right) \quad (52)$$

同样做傅里叶变换

$$u_\alpha(\mathbf{r}, t) = \int d\omega \int d\mathbf{q} \tilde{u}_\alpha(\mathbf{q}, \omega) e^{i[\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t]} \quad (\alpha = x, y, z) \quad (53)$$

可得, 矩阵本征值方程

$$\omega^2 \begin{bmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \\ \tilde{u}_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} C_{11}q_x^2 + C_{44}(q_y^2 + q_z^2) & (C_{12} + C_{44})q_xq_y & (C_{12} + C_{44})q_xq_z \\ (C_{12} + C_{44})q_xq_y & C_{11}q_y^2 + C_{44}(q_x^2 + q_z^2) & (C_{12} + C_{44})q_yq_z \\ (C_{12} + C_{44})q_xq_z & (C_{12} + C_{44})q_yq_z & C_{11}q_z^2 + C_{44}(q_x^2 + q_y^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \\ \tilde{u}_z \end{bmatrix} \quad (54)$$

✿ 假设弹性波波沿 $\langle 100 \rangle$ 方向传播，即 $\mathbf{q} = q\mathbf{e}_x$ ，则式 (54) 中的矩阵变成

$$\frac{q^2}{\rho} \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (55)$$

显然，上面的矩阵有 3 组本征值，分别是

$$\omega_L = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} q \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\omega_{T_1} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} q \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\omega_{T_2} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} q \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (58)$$

分别对应一支纵波和两支横波。

沿 $\langle 110 \rangle$ 方向传播的弹性波

✿ 假设弹性波波沿 $\langle 110 \rangle$ 方向传播, 即 $\mathbf{q} = \frac{\sqrt{2}}{2} q\mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} q\mathbf{e}_y$, 则式(54)中的矩阵变成

$$\frac{q^2}{2\rho} \begin{bmatrix} C_{11} + C_{44} & C_{12} + C_{44} & 0 \\ C_{12} + C_{44} & C_{11} + C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 2C_{44} \end{bmatrix} \quad (59)$$

显然, 上面的矩阵有 3 组本征值, 分别是

$$\omega_L = q\sqrt{\frac{C_{11} + C_{12} + 2C_{44}}{2\rho}} \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$\omega_{T_1} = q\sqrt{\frac{C_{11} - C_{12}}{2\rho}} \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$\omega_{T_2} = q\sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (62)$$

分别对应**一支纵波**和**两支横波**。

✿ 这些弹性波就是固体中的声波！

Crystal	C_{11}	C_{12}	C_{44}	ρ	$\sqrt{\frac{C_{11} + C_{12} + 2C_{44}}{\rho}}$	$\sqrt{\frac{C_{11} - C_{12}}{\rho}}$	$\sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$
	[GPa]			[kg/m ³]	[m/s]		
W	523.3	204.5	160.7	19 317	7369	4062	2884
Cu	168.4	121.4	75.4	9018	6990	2283	2892
Ag	124	93.7	46.1	10 635	5398	1688	2082
Au	192.3	163.1	42	19 488	4748	1224	1468

图 - 几种金属的弹性张量以及声速，数据摘自 Kittel 书。

✿ 空气中的声波是**纵波**，速度为331 m/s (0°C)

谢谢!