

程序设计II 第5讲高精度计算

计算机学院 黄章进 zhuang@ustc.edu.cn

内容



- 例题: 大整数加法 2981
- 例题: 大整数减法
- 例题: 大整数乘法 2980
- 例题: 大整数除法 2737
- 例题:循环数 2952
- 例题: 麦森数 2706

C/C++中数的表示范围



- 整数 limits.h
 - int/long: -2³¹ ~ 2³¹-1, 即 -2 147 483 648 ~ 2 147 483 647
 - unsigned: $0 \sim 2^{32}-1$, $\mathbb{P} 0 \sim 4294967295$
 - long long: $-2^{63} \sim 2^{63}$ -1, \square -9 223 372 036 854 775 808 \sim 9 223 372 036 854 775 807
 - unsigned long long: $0 \sim 2^{64}$ -1, 即 $0 \sim 18446744$ 073 709 551 615
- 如何处理一个200位的整数?

C/C++中数的表示范围



- 浮点数:
 - float 单精度, 32位, 6位精度
 - 最小正值 1.17549 × 10⁻³⁸,最大值 3.40282 × 10³⁸
 - double 双精度, 64位, 15位精度
 - 最小正值 2.22507 × 10⁻³⁰⁸ ,最大值 1.79769 × 10³⁰⁸
 - long double 扩展精度,96位
 - 存储遵循IEEE 745标准(即IEC 60559)规范
- 如何精确到小数点后100位

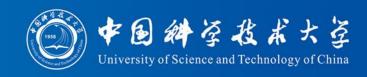
例题: 大整数加法



- 问题描述
 - 求两个不超过200位的非负整数的和。
- 输入
 - 有两行,每行是一个不超过200位的非负整数, 没有多余的前导0。
- 输出
 - 一行,即相加后的结果。结果里不能有多余的前导0,即如果结果是342,那么就不能输出为0342。



- 3333333333333333333
- 输出样例 55555555555555555555



- 解题思路
 - 用字符型或整型数组来存放大整数
 - an[0]存放个位数, an[1]存放十位数, an[2]存放百位数......
 - 模拟小学生列竖式做加法,从个位开始逐位相加,超过或达到10则进位。
 - 用int an1[201]保存第一个数,用int an2[200]表示第二个数,然后逐位相加,相加的结果直接存放在an1中。要注意处理进位。



```
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#define MAX_LEN 201
int an1[MAX_LEN+10], an2[MAX_LEN+10];
char szLine1[MAX_LEN+10], szLine2[MAX_LEN+10];
int Add(int nMaxLen, int *an1, int *an2)
// 将长度最多为nMaxLen的大整数an1和an2相加,结果放在an1
// an1[0], an2[0]对应于个位
 int i, nHighestPos = 0;
 for (i = 0; i < nMaxLen; i++) {
                            //逐位相加
   an1[i] += an2[i];
   if (an1[i] >= 10) { //看是否要进位
     an1[i] = 10;
     an1[i+1] ++;
                                   //进位
   return nHighestPos; }
```



```
int main() {
  scanf("%s", szLine1); scanf("%s", szLine2);
  // 库函数memset将地址an1开始的sizeof(an1)字节内容置成0
  // sizeof(an1)的值就是an1的长度, memset函数在string.h中声明
  memset(an1, 0, sizeof(an1)); memset(an2, 0, sizeof(an2));
  //下面将szLine1中存储的字符串形式的整数转换到an1中去,
  // an1[<mark>0</mark>]对应于个位
  int i, j;
  int nLen1 = strlen(szLine1);
  for (i = 0, i = nLen1 - 1; i >= 0; i--)
    an1[j++] = szLine1[i] - '0';
  int nLen2 = strlen(szLine2);
  for (j = 0, i = nLen2 - 1; i >= 0; i--)
    an2[i++] = szLine2[i] - '0';
  int nHighestPos = Add(MAX_LEN, an1, an2); // 可否改进?
  for (i = nHighestPos; i \ge 0; i --) printf("%d", an1[i]);
  return 0; }
```

例题: 大整数减法



- 问题描述
 - 求2个大的正整数相减的差
- 输入
 - 第1行是测试数据的组数n,每组测试数据占2行,第1行是被减数a,第2行是减数b(a > b)。每组测试数据之间有一个空行,每行数据不超过100个字符
- 输出要求
 - -n行,每组测试数据有一行输出是相应的整数差

大整数减法



• 输入样例

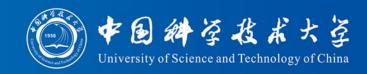
• 输出样例

大整数减法



```
int main() {
  int n;
  scanf("%d", &n);
  while (n--) {
    scanf("%s", szLine1);
                          scanf("%s", szLine2);
    int i, j;
    memset(an1, 0, sizeof(an1)); memset(an2, 0, sizeof(an2));
    //下面将szLine1中存储的字符串形式的整数转换到an1中去,
    //an1[0]对应于个位
    int nLen1 = strlen( szLine1);
    for (j = 0, i = nLen1 - 1; i >= 0; i--)
       an1[i++] = szLine1[i] - '0';
    int nLen2 = strlen(szLine2);
    for(i = 0, i = nLen2 - 1; i >= 0; i--)
       an2[i++] = szLine2[i] - '0';
    int nStartPos = Substract(MAX_LEN, an1, an2);
    for ( i = nStartPos; i >= 0; i -- ) printf("%d", an1[i]);
    printf("\n");
  return 0; }
```

大整数减法



```
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#define MAX_LEN 110
int an1[MAX_LEN], an2[MAX_LEN];
char szLine1[MAX_LEN], szLine2[MAX_LEN];
int Substract(int nMaxLen, int *an1, int *an2)
  // 两个最多nMaxLen位的大整数an1减去an2, an1保证大于an2
  int i, nStartPos = 0;
  for ( i = 0; i < nMaxLen; i++ ) { // 请补全循环体代码
   if (an1[i])
                    nStartPos = i; //记录最高位的位置
 return nStartPos; // 返回值是结果里面最高位的位置
```

例题: 大整数乘法



- 问题描述
 - 求两个不超过200位的非负整数的积。
- 输入
 - 有两行,每行是一个不超过200位的非负整数, 没有多余的前导0。
- 输出
 - 一行,即相乘后的结果。结果里不能有多余的前导0,即如果结果是342,那么就不能输出为0342



输入样例1234567890098765432100

输出样例1219326311126352690000



- 解题思路
 - 用unsigned an1[200]和unsigned an2[200]分别存放两个乘数,用aResult[400]来存放积。计算的中间结果也都存在aResult中。
 - aResult长度取400是因为两个200位的数相乘,积最多有400位
 - an1[0], an2[0], aResult[0]都表示个位。
- 一个数的第i位和另一个数的第i位相乘所得的数,
 - 一定是要累加到结果的第i+i位上。
 - 这里i,j都是从右往左,从0开始数。
- 计算的过程基本上和小学生列竖式做乘法相同。
 - 为编程方便,并不急于处理进位,而将进位问题留待最后统一处理。



现以835×49为例来说明程序的计算过程。

先算835×9。5×9得到45个1,3×9得到27个10,8×9得到72个100。由于不急于处理进位,所以835×9算完后,aResult如下:

下标	5	4	3	2	1	0
aResult	 0	0	0	72	27	45

• 接下来算5×4。此处5×4的结果代表20个 10, 因此要 aResult[1] += 20, 变为:

下标	5	4	3	2	1	0
aResult		0	0	72	47	45



• 835×49

下标	5	4	3	2	1	0	
aResult		0	0	72	47	45	

• 再下来算3×4。此处3×4的结果代表12个 100, 因此要 aResult[2] += 12, 变为:

下标	5	4	3	2	1	0
aResult	 0	0	0	84	47	45

• 最后算 8×4。此处8×4的结果代表 32个 1000, 因此要aResult[3] += 32, 变为:

下标	5	4	3	2	1	0
aResult	 0	0	32	84	47	45



• 835×49 乘法过程完毕:

下标	5	4	3	2	1	0
aResult	 0	0	32	84	47	45

- 接下来从 aResult[0]开始向高位逐位处理进位问题
- aResult[0]留下5,把4加到aResult[1]上,aResult[1]变为51后,应留下1,把5加到aResult[2]上.....最终使得aResult里的每个元素都是1位数,结果就算出来了:

下标	5	4	3	2	1	0
aResult	 0	4	0	9	1	5



```
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#define MAX_LEN 200
unsigned an 1 [MAX LEN+10], an 2 [MAX LEN+10];
unsigned aResult[MAX_LEN * 2 + 10];
char szLine1[MAX_LEN+10], szLine2[MAX_LEN+10];
int main() {
  gets(szLine1); gets(szLine2);
  memset(an1, 0, sizeof(an1)); memset(an2, 0, sizeof(an2));
  memset(aResult, 0, sizeof(aResult));
  int i, j;
  int nLen1 = strlen(szLine1);
  for (j = 0, i = nLen1 - 1; i >= 0; i--) // 把字符串转换为整数
    an1[j++] = szLine1[i] - '0';
  int nLen2 = strlen(szLine2);
  for (j = 0, i = nLen2 - 1; i >= 0; i--)
    an2[j++] = szLine2[i] - '0';
```

学 China

```
aResult
```

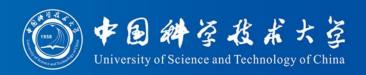
```
5
         4
                                   47
                                            45
                  32
                          84
          0
0
```

```
//每一轮都用an2的一位,去和an1各位相乘,从an2的个位开始
for (i = 0; i < nLen2; i++)
 for(j = 0; j < nLen1; j++)
   //两数第i,j位相乘,累加到结果的第i+j位
   aResult[i+j] += an2[i] * an1[j];
//下面的循环统一处理进位问题
int nHighestPos = 0;
for ( i = 0; i < MAX_LEN * 2; i++ ) { // 请补全循环体代码
 if (aResult[i])
                    nHighestPos = i;
for (i = nHighestPos; i \ge 0; i - ) printf("%d", aResult[i]);
return 0;
```

例题: 大整数除法



- 问题描述
 - 求2个大的正整数相除的商
- 输入
 - 第1行是测试数据的组数n,每组测试数据占2行,第1行是被除数,第2行是除数。每组测试数据之间有一个空行,每行数据不超过100个字符
- 输出
 - -n行,每组测试数据有一行输出是相应的整数商



输入样例

3

2405337312963373359009260457742057439230496493930355595797660791082739646 2987192585318701752584429931160870372907079248971095012509790550883793197894

5409656775097850895687056798068970934546546575676768678435435345 1

• 输出样例

()



- 基本思想是反复做减法,看看从被除数里最多能减去多少个除数,商就是多少。
- 一个一个减显然太慢,如何减得更快一些呢?
- 以7546除以23为例来看一下: 开始商为0
 - 先减去23的100倍,就是2300,发现够减3次,余下646。于是商的值就增加300
 - 然后用646减去230,发现够减2次,余下186。于是 商的值增加20,变为320
 - 最后用186减去23、够减8次、因此最终商就是328
- 本题的核心是要写一个大整数的减法函数,然后反复调用该函数进行减法操作



```
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <stdbool.h>
int Substract(int nMaxLen, int *an1, int * an2)
//大整数an1减去an2。两者最多nMaxLen位, an1必须不小于an2, 差放在an1里
//返回差的最高非0位的位置
  int i, nStartPos = 0;
  for (i = 0; i < nMaxLen; i ++)
                               //逐位相减
    an1[i] = an2[i];
    if (an1[i] < 0) { //看是否要借位
      an1[i] += 10;
                      //借位
      an1[i+1] --;
    if (an1[i])
      nStartPos = i; //记录最高位的位置
                                                                   25
  return nStartPos; }
```



```
int Length(int nMaxLen, int *an)
// 求大整数的位数, 0算0位
  int i;
  for (i = nMaxLen - 1; an[i] == 0 && i >= 0; i--);
  if (i >= 0)
                 return i + 1;
  return 0;
void ShiftLeft(int nMaxLen, int *an1, int *an2, int n)
// 将大整数an1左移n位,即乘以10的n次方,结果放到an2里
  int i;
  memcpy(an2, an1, nMaxLen * sizeof(int));
  if (n \le 0)
                 return;
  for ( i = nMaxLen -1; i >= 0; i -- ) { // 请写出循环体代码
```



```
int * Max(int nMaxLen, int *an1, int *an2)
// 求大整数an1和an2里面大的那个; 若an1==an2, 返回an1
// 如果都是0,则返回NULL
  bool bBothZero = true;
  int i;
  for (i = nMaxLen -1; i >= 0; i --) 
    if (an1[i] > an2[i])
      return an1;
    else if (an1[i] < an2[i])
      return an2;
    else if (an1[i])
      bBothZero = false;
  if (bBothZero)
    return NULL;
  else
    return an1;
```



```
#define MAX_LEN 110
int an1[MAX_LEN]; // 存放被除数, an1[0]对应于个位
int an2[MAX_LEN]; // 存放除数
int tmpAn2[MAX_LEN];
int anResult[MAX_LEN]; // 存放商
char szLine1[MAX_LEN]; // 存放被除数的字符串
char szLine2[MAX_LEN]; // 存放除数的字符串
char szNouse[MAX_LEN];
int main()
 int n;
 scanf("%d", &n);
 gets(szNouse);
```



```
while(n--) {
   gets(szLine1);
   gets(szLine2);
   gets(szNouse);
   int i, j;
   //库函数memset将地址an1开始的sizeof(an1)字节内容置成0
   memset(an1, 0, sizeof(an1));
   memset(an2, 0, sizeof(an2));
   //下面将szLine1中存储的字符串形式的整数转换到an1中去,
   int nLen1 = strlen( szLine1);
   for (i = 0, i = nLen1 - 1; i >= 0; i--)
      an1[j++] = szLine1[i] - '0';
   int nLen2 = strlen(szLine2);
   for (i = 0, i = nLen2 - 1; i >= 0; i--)
      an2[i++] = szLine2[i] - '0';
```



```
int nHighestPos = 0;
  memset(anResult, 0, sizeof(anResult));
  int nShiftLen = Length(MAX_LEN, an1) - Length(MAX_LEN, an2);
  // 只要an1大于an2,就不停相减
  while (Max(MAX_LEN, an1, an2) == an1)
    // 算出an2的10的nShiftLen次方倍
    ShiftLeft(MAX_LEN, an2, tmpAn2, nShiftLen);
    // 重复减去an2的10的nShiftLen次方倍,看能减几次
    while (Max(MAX_LEN, an1, tmpAn2) == an1)
      Substract(MAX_LEN, an1, tmpAn2);
      anResult[nShiftLen] ++; // 记录商对应位
    // 记录结果最高位的位置
    if( nHighestPos == 0 && anResult[nShiftLen])
      nHighestPos = nShiftLen;
    nShiftLen--;
  for (i = nHighestPos; i \ge 0; i--)
                                    printf("%d", anResult[i]);
  printf("\n");
return 0;
```

高精度计算需要注意 的几个问题



- 大整数的读入
 - 不能用数值型的读入方式
 - 用字符串的读入方式,再按字符分别转成数字
- 计算过程中考虑进位和借位问题(先不急于处理,在计算结束时处理)
- 输出时注意跳过高位时多余的0
- 数组需要稍微大一些,避免运算时溢出

例题: 循环数



• 问题描述

- 当一个N位的整数X满足下列条件时,称其为<mark>循环数: X与任意一个整数i (1≤i≤N)</mark>相乘时,都将产生一个X的"循环"。即: 分别将这两个整数(X和X*i)的第1位数字与最后1位数字连在一起,可以得到一个相同的数字循环; 当然两个整数在该数字循环中的起始位置不同。例如,142857是一个循环数

```
142857 *1 = 142857

142857 *2 = 285714

142857 *3 = 428571

142857 *4 = 571428

142857 *5 = 714285

142857 *6 = 857142
```



• 输入

- 输入包括多个长度为 2 到 60 位的整数。注意: 每个整数前面的零被看作是该整数的一部分, 在计算N时要统计。例如 "01"是 2 位数, "1" 是 1 位数。

• 输出

- 对于每一个输入的整数,输出一行表明它是否是循环数。



• 输入样例

142857

142856

142858

01

0588235294117647

• 输出样例

142857 is cyclic

142856 is not cyclic

142858 is not cyclic

01 is not cyclic

0588235294117647 is cyclic



解题思路

• 高精度的乘法:整数可能达60位

$$-X*1: X_1 = X;$$

$$-X*2: X_2 = X_1 + X$$

$$-X*3: X_3 = X_2 + X$$

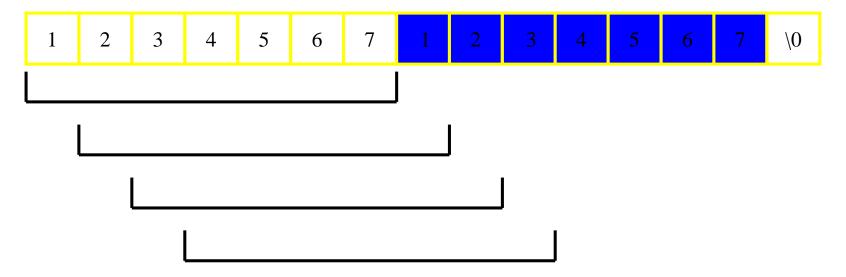
—

$$-X*N: X_N = X_{N-1} + X$$

• X_i是否是X的"循环"?



- X_i是否是X的"循环"?
- 穷举: N位整数,循环移位可以有N种可能
- 循环移位方法:
 - "X;"是否是"XX"的子串?



2952 循环数



```
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <stdbool.h>

#define MAX_LEN 61
int an1[MAX_LEN+10]; // 存放Xi = X * i
int an2[MAX_LEN+10]; // 存放X
char szLine1[MAX_LEN+10]; // 存放"X"
char szLine2[MAX_LEN+10]; // 存放"Xi"
char szDouble[2 * MAX_LEN + 10]; // 存放"XX"
```

//将长度最多为 nMaxLen 的大整数 an1和an2 相加, 结果放在an1 int Add(int nMaxLen, int *an1, int *an2);

循环数



```
int main()
  int i, j;
  while(gets(szLine1) && szLine1[0]) {
    memset(an1, 0, sizeof(an1));
    memset(an2, 0, sizeof(an1));
    //下面将szLine1中存储的字符串形式的整数转换到an1中去,
    // an1[0]对应于个位
    int nLen1 = strlen( szLine1); // X的位数
    for (j = 0, i = nLen1 - 1; i >= 0; i--) {
      an1[j] = szLine1[i] - '0';
      an2[i] = szLine1[i] - '0';
      j++;
    strcpy(szDouble, szLine1);
    strcat(szDouble, szLine1); // 构造"XX"
```

循环数



```
bool bOk = true; // 是否循环数
for ( i = 1; i < nLen1; i++ ) {
  int nHighestPos = Add(MAX_LEN, an1, an2); // an1存放Xi, an2存放X
  if ( nHighestPos >= nLen1 ) { // 长度超出了
    bOk = false; break;
  }
  // 判断"Xi"是否是"XX"的子串,请写出代码
```

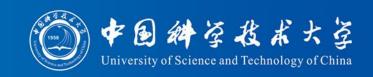
```
}
if ( bOk)
    printf( "%s is cyclic\n",szLine1);
else
    printf( "%s is not cyclic\n",szLine1);
}
return 0; }
```

```
int an1[MAX_LEN+10]; // 存放Xi = X * i int an2[MAX_LEN+10]; // 存放X char szLine1[MAX_LEN+10]; // 存放"X" char szLine2[MAX_LEN+10]; // 存放"Xi" char szDouble[2 * MAX_LEN+10]; // 存放"XX"
```

例题: 麦森数



- 形如M_p=2^p-1的素数称为麦森数(Mersenne prime),这时P一定也是个素数。但反过来不一定,即如果P是个素数,2^p-1不一定也是素数
 - 头4个麦森数是3、7、31和127,对应的P为2、3、5和7
 - 已发现48个麦森数,已知的最大麦森数为 $2^{57,885,161}$ -1,有17,425,170位
 - "互联网梅森素数大搜索"(GIMPS)项目
 - http://www.mersenne.org/
 - 美国EFF(Electronic Frontier Foundation)奖金
 - 超过1000万位数, 10万美元; 超过1亿位数, 15万美元; 超过10亿位数, 25万美元



- 总时间限制: 1000ms 内存限制: 65536kB
- 问题描述
 - 任务: 从文件中输入P(1000<P<3100000),计算2P-1的位数和最后500位数字(用十进制高精度数表示)
- 输入
 - 只包含一个整数P(1000<P<3100000)
- 输出
 - 第1行: 十进制高精度数2P-1的位数。
 - 第2-11行: 十进制高精度数2P-1的最后500位数字。每 行输出50位,共输出10行,不足500位时高位补0
 - 不必验证2p-1与P是否为素数。



- 输入样例
- 输出样例

386



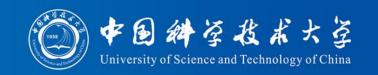
- · 首先考虑2P-1有多少位
 - 由于2p-1的个位数只可能是 2, 4, 6, 8, 所以2p-1和2p的位数相同
 - 使用math.h中声明的,求以10为底的对数的函数double log10(double x),就能轻松求得2p-1的位数
 - $-\log 10(2^{p}) = p * \log 10(2)$

于是,



- · 输出高精度数2P-1的最后500为数字
 - -做p次乘以2的操作,结果严重超时
 - 对于任何 p>0,考虑 p 的二进制形式: $p = a_0 2^0 + a_1 2^1 + a_2 2^2 + ... + a_{n-1} 2^{n-1} + 2^n$ 这里, a_i 要么是1,要么是0。

$$2^{p} = 2^{a_0} \times 2^{2a_1} \times 2^{4a_2} \times 2^{8a_3} \times \cdots \times 2^{a_{n-1}2^{n-1}} \times 2^{2^{n}}$$



$$2^{p} = 2^{a_0} \times 2^{2a_1} \times 2^{4a_2} \times 2^{8a_3} \times \cdots \times 2^{a_{n-1}2^{n-1}} \times 2^{2^{n}}$$

- 计算2p的办法
 - 先将结果的值设为1,计算 2^{1} 。如果 a_{0} 值为1,则结果乘以 2^{1} ;
 - 计算 2², 如果 a₁ 为 1,则结果乘以 2²;
 - 计算 2⁴, 如果 a₂ 为 1, 则结果乘以 2⁴;
 - 第 i 步 (i 从 0 到 n, a_n是1)就计算 2^{2ⁱ}, 如果 a_i 为 1, 则结果就乘以 2^{2ⁱ}
 - 每次由2²ⁱ×2²ⁱ就能算出 2²ⁱ⁺¹
- 由于p可能很大,所以上面的乘法都应该 使用高精度计算

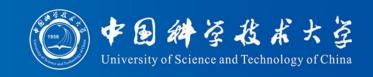


- 在前面的高精度计算中,用数组来存放大整数,数组的一个元素对应于十进制大整数的一位。
 - 本题如果也这样做,就会超时
- 为了加快计算速度,可以用一个数组元素对应于大整数的4位,即将大整数表示为10000进制,而数组中的每一个元素就存放10000进制数的1位。
 - 例如,用 int 型数组 a 来存放整数 6373384,那么只需两个数组元素就可以了,a[0]=3384,a[1]=637
- 由于只要求结果的最后 500 位数字,所以我们不需要计算完整的结果,只需算出最后500 位即可。所以本题中的数组最多只需要125 个元素。



```
#include <string.h>
#include <math.h>
#define LEN 125

// Multiply函数功能是计算高精度乘法a*b,结果的末500位放在a中
void Multiply(int* a, int* b)
{
    int i, j, nTmp;
    int nCarry; //存放进位
    int c[LEN]; //存放结果的末500位
    memset(c, 0, sizeof(int) * LEN);
    for (i = 0; i < LEN; i++) { // 请写出循环体代码
```



```
int main() {
                          2^{p} = 2^{a_0} \times 2^{2a_1} \times 2^{4a_2} \times 2^{8a_3} \times \cdots \times 2^{a_{n-1}2^{n-1}} \times 2^{2^{n-1}}
  int p, i;
  scanf("%d", &p);
  printf("%d\n", (int)(p*log10(2))+1); // 输出位数
  // 下面将 2 的次幂初始化为 2^(2^0), 最终结果初始化为 1
  int anPow[LEN]; //存放不断增长的2的次幂
  int aResult[LEN]; //存放最终结果的末500位
  anPow[0] = 2; aResult[0] = 1;
  for (i = 1; i < LEN; i++)
    anPow[i] = 0; aResult[i] = 0;
  // 下面计算2的p次方
  while (p > 0) { // p==0, 则说明p中的有效位都用过了,不需再算下去
    if (p&1)//判断此时 p 中最低位是否为 1
      Multiply(aResult, anPow);
    p >>= 1;
    Multiply(anPow, anPow);
  aResult[0]--; //2的p次方算出后减1
                                                                        48
```



//输出结果 for (i = LEN-1; i >= 0; i--) { // 每行输出50位 if (i % 25 == 12) //当i%25等于12时, 第 i 个万进制位会被折行输出 printf("%02d\n%02d", aResult[i]/100, aResult[i]%100); else { printf("%04d", aResult[i]); if (i % 25 == 0) // 换行 printf("\n"); return 0;