ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software, Vol.17, No.3, March 2006, pp.559−567
DOI: 10.1360/jos170559

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

单变量均匀静态细分格式的连续性分析和构造*

黄章进+

(中国科学技术大学 数学系,安徽 合肥 230026)

Continuity Analysis and Construction of Uniform Stationary Univariate Subdivision Schemes

HUANG Zhang-Jin+

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-551-3601009, Fax: +86-551-3601005, E-mail: zjh@mail.ustc.edu.cn, http://math.ustc.edu.cn

Huang ZJ. Continuity analysis and construction of uniform stationary univariate subdivision schemes. *Journal of Software*, 2006,17(3):559−567. http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/559.htm

Abstract: With the necessary and sufficient conditions for C^k-continuity of uniform stationary subdivision schemes, the range of free parameter in several classical interpolating curve schemes is presented. For the first time, this paper points out that the arity-2 interpolating 6-point scheme is C^3-continuous in certain range. A new C^3-continuous arity-3 interpolating 6-point scheme is also proposed.
Key words: subdivision; interpolating scheme; continuity analysis

摘 要: 利用单变量均匀稳定细分格式 C^k 连续的充要条件,分析了已有的插值曲线格式各阶连续时参数的取值范围.首次指出了六点二重插值格式可以达到 C^3 连续,并构造了一种新的 C^3 连续的六点三重插值细分格式.
关键词: 细分;插值格式;连续性分析
中图法分类号: TP391 文献标识码: A

由于具有算法简单、易于实现和高效性等优点,细分方法在计算机图形学和计算辅助几何设计中越来越受到关注.最早的单变量细分格式要追溯到 Chaikin 于 1974 年提出的用于生成二次 B-样条的算法[1].20 世纪 80 年代,Dubuc 以及 Dyn,Gregory 和 Levin 独立地提出了四点二重插值格式,并证明该格式是 C^1 连续的[2,3]. Weissman 构造了一种六点二重插值格式,并给出了 C^2 连续时参数的取值范围[3].Deslauriers 和 Debuc 从多项式插值出发,分析了 $2N$ 点 b 重插值格式[4].

Kobbelt 引入了一种称为 $\sqrt{3}$ 格式的曲面细分方法[5],该方法在两步细分后得到三重格式.该类细分方法的边界曲线是单变量三重格式生成的.受此启发,Hassan 和 Dodgson 等人提出了 C^1 的三点三重插值格式[6]和 C^2 的四点三重插值格式[7].

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.10201030, 60473132 (国家自然科学基金); the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.2004CB318000 (国家重点基础研究发展计划(973)); the National Science Fund for Distinguished Young Scholars of China under Grant No.60225002 (国家杰出青年科学基金); the Teaching and Research Award Program for Outstanding Young Teachers in Higher Education Institutions of the MOE (教育部高校优秀青年教师教学科研奖励计划)

Received 2005-04-13; Accepted 2005-08-25

在单变量细分格式的收敛性和连续性分析的理论上,Dyn 等人[3,8−10]给出了关于二重格式的充分条件和必要条件,Hassan 等人[6,7]给出了关于三重格式的充分条件.Romani[11]根据细分格式掩模的重数和宽度对单变量均匀格式进行了统一的分类,并给出了一般的 a 重格式 C^k 连续的充要条件.本文利用该条件分析了一些已知格式的连续性,指出 Weissman 的六点二重插值格式[3]可以达到 C^3 连续,并构造了一种新的 C^3 连续的六点三重插值细分格式.

本文第 1 节介绍单变量细分的概念,并修正了 Romani[11]的充要条件.第 2 节利用该充要条件分析了已有的单变量插值细分格式(如四点二重插值格式[3]、六点二重插值格式[3]、三点三重插值格式[6]、四点三重插值格式[7]等),给出各阶连续时参数的取值范围.第 3 节构造了一种新的六点三重插值细分格式,并证明该格式是 C^3 连续且有 4 阶精度.最后,给出本文的结论和将来的工作.

1 细分格式 C^k 连续充要条件

1.1 单变量细分格式

单变量细分格式通过对初始控制多边形 $P^0=\{P_i^0:i\in \mathrm{Z}\}$不断加细,得到一条光滑的极限曲线.细分过程用公式可表示为

$$P^j=M^jP^{j-1}.$$

这里,P^j 是以控制顶点 $P_i^j,i\in \mathrm{Z}$ 为分量的列向量,线性变换矩阵 M^j 称为细分矩阵.

如果每一细分步的细分矩阵相同,即 $M^j\equiv M,j\in \mathrm{Z}_+$,则称格式是静态的(stationary);否则,称为非静态的(non-stationary).

定义 **1**. 细分矩阵$\{M^j\}_{j\ge 1}$的列(表示一个老控制顶点在第 j 层对新控制顶点的影响系数)称为掩模(masks).

如果每一细分步仅由一个掩模 $m^j=\{m_i^j:i\in \mathrm{Z}\}$确定,格式称为均匀的(uniform)(既然在曲线的所有位置用同样的掩模).这时,双无穷细分矩阵 M^j 的所有列是相同的,只是相互偏移了 a 行,即 $M_{ak+1,k}^k=m_i^j,\forall k,i\in \mathrm{Z}$.这样细分后的点列 P^j 对应于每个老控制顶点有 a 个新点.

定义 **2**. 均匀细分矩阵的每一列相对于相邻列偏移的整数位置数 $a(>1)$称为细分格式的重数(arity).

由于均匀细分由一个掩模确定,且相邻列仅偏移 a 个位置,所以细分矩阵 M^j 有 a 个不同的行.

定义 **3**. 均匀细分矩阵不同的 a 行(表示一个新点被老控制顶点影响的系数的集合)称为模板(stencils).

这样,模板是由掩模 m^j 的子序列隐式定义的.对一个合理的细分格式,要求模板的系数和为 $1:\forall j\in \mathrm{Z}_+$, $\sum_{i\in \mathrm{Z}}m_{ai+1}^j=1,l=0,\dots,a-1$.事实上,Dyn 等人[8]指出上述条件是均匀细分格式收敛(C^0)的一个必要条件.

如果我们把掩模第 1 个非零系数的下标取为 0(即有 $m_i^j=0,\forall i<0$),令 $w(>1)$是最小的整数,使得 $m_i^j=0,\forall i>w-1$.这样,无穷掩模 m^j 可以简化成由 w 个系数构成的有限集$\{m_i^j:i=0,\dots,w-1\}$.

定义 **4**. 正整数 $w(>1)$称为细分格式或掩模的宽度(width).

1.2 C^k连续充要条件

定义 **5**. 标志点(mark points)是指控制多边形在细分过程中拓扑不变的顶点.

我们在进行格式分析时,只需分析标志点的不变邻域(invariant neighborhood)所对应的双无穷细分矩阵 M 的有限阶的子方阵(局部细分矩阵).当细分重数为偶数时,只需分析一个局部细分矩阵;而当重数为奇数时,需要分析两个不同的局部细分矩阵.

记 m 为宽度为 $w(>1)$、重数为 $a(>1)$的掩模,M 为对应的细分矩阵.定义细分格式的生成函数(generating funtion)为 Laurent 多项式 $m(z)=\sum_{i\in \mathrm{Z}}m_iz^i$.

当重数 a 是偶数时,Romani 给出了下面的结论[11]:

定理 **1**. 由掩模 m 定义的均匀静态细分格式,局部细分矩阵 $\overline{M}$ 的阶数为 $N=\left\lceil \frac{w}{a-1} \right\rceil$.格式是 $C^k(k\geq 0)$连续的,当且仅当

$$d_k(z)=a^k\left(\frac{z^{a-1}(1-z)}{1-z^a}\right)^{k+1}m(z)$$

是 Laurent 多项式,且以其为生成函数的细分格式的 $N-k-1$ 阶局部细分矩阵 $\overline{D}_k$ 的谱半径满足

$$\rho(\overline{D}_k)<1.$$

当重数 a 是奇数时,Romani 给出了下面的结论[11]:

定理 **2**. 由掩模 m 定义的均匀静态细分格式,两个局部细分矩阵 $\overline{M}$ 和 $\overline{\overline{M}}$ 的阶数分别为 N 和 $N-1$,这里 $N=\left\lceil \frac{w}{a-1} \right\rceil$.格式是 $C^k(k\geq 0)$连续的,当且仅当

$$d_k(z)=a^k\left(\frac{z^{a-1}(1-z)}{1-z^a}\right)^{k+1}m(z)$$

是 Laurent 多项式,且以其为生成函数的细分格式的 $N-k-1$ 阶局部细分矩阵 $\overline{D}_k$ 和 $N-k-2$ 阶局部细分矩阵 $\overline{\overline{D}}_k$ 的谱半径满足

$$\rho(\overline{D}_k)<1, \rho(\overline{\overline{D}}_k)<1.$$

注 1. Romani 在文献[11]中的 $d_k(z)$表达式有误,都遗漏了 z^{a-1} 项.

有了这两个定理,对于含一个自由参数的单变量均匀稳定格式,我们可以精确地给出该格式生成 C^k 连续曲线时参数的最大取值范围.

2 已有格式的分析

已有的偶重数插值格式主要有 Dyn 等人提出的四点二重插值格式[3]和 Weissman 提出的六点二重插值格式[3];奇重数插值格式主要有 Hassan 等人提出的三点三重插值格式[6]和四点三重插值格式[7].这些格式都含有一个自由参数.下面,我们首先根据定理 1 和定理 2 给出连续性分析的一般步骤,然后分析这些格式,给出各阶光滑时参数的取值范围.

2.1 分析步骤

由定理 1 有 $m(z)=a^{-k}\left(\frac{1-z^a}{(1-z)z^{a-1}}\right)^{k+1}d_k(z)$,可知:从生成函数 $m(z)$中,可分解出 $k+1$ 个 $\frac{1-z^a}{(1-z)z^{a-1}}$ 是格式 C^k 连续的一个必要条件.而对于插值格式,该条件表明格式具有 k 阶精度(precision set),即如果初始控制点在 k 次多项式上采样而得,则极限曲线生成该多项式.

又根据文献[11]的注 3,检查 $\rho(\overline{D}_k)<1$ 等价于检查局部细分矩阵 $\overline{M}$ 按模大小排列的 N 个特征值$\{\lambda_i\text{:}i=0,\ldots,N-1\}$,有如下结构:

$$\begin{cases}\lambda_i=\dfrac{1}{a^i}, i=0,\ldots,k\\ |\lambda_i|<\dfrac{1}{a^k}, i=k+1,\ldots,N-1\end{cases}.$$

从而对于一个给定细分规则的 a 重格式,当 a 为偶数时,我们可按下面步骤分析其连续性:

Step 1. 根据细分规则确定掩模 m;

Step 2. 根据 m 确定 $N=\left\lceil \frac{w}{a-1} \right\rceil$ 阶的局部细分矩阵 $\overline{M}$,并求出其 N 个特征值$\{\lambda_i\text{:}i=0,\ldots,N-1\}$;

Step 3. 根据 m 确定生成函数 $m(z)$,并从中分解尽可能多的因式 $\frac{1-z^a}{(1-z)z^{a-1}}$,得到

$$m(z)=a^{-k}\left(\frac{1-z^a}{(1-z)z^{a-1}}\right)^{k+1}d_k(z),$$

现在我们可知,格式至多 C^k 连续,且有 k 阶精度;

Step 4. 对 $j=0,\ldots,k$,检查特征值是否有如下结构:

$$\begin{cases}\lambda_i=\frac{1}{a^i}, i=0,\ldots,j\\ |\lambda_i|<\frac{1}{a^k}, i=j+1,\ldots,N-1\end{cases},$$

若满足,则格式是 C^j 连续的,继续检查 $j+1$ 时是否满足;若不满足,则停止,格式是 C^{j-1} 连续的.

类似地,当 a 为奇数时,我们按下面步骤分析格式的连续性:

Step 1. 根据细分规则确定掩模 m;

Step 2. 根据 m 确定 $N=\left\lceil\frac{w}{a-1}\right\rceil$ 阶和 $N-1$ 阶的两个局部细分矩阵的局部细分矩阵 $\overline{M}$ 和 $\overline{\overline{M}}$,并求出它们的特征值$\{\lambda_i:i=0,\ldots,N-1\}$和$\{\overline{\lambda}_i: i=0,\ldots,N-2\}$;

Step 3. 根据 m 确定生成函数 $m(z)$,并从中分解尽可能多的因式 $\frac{1-z^a}{(1-z)z^{a-1}}$,得到

$$m(z)=a^{-k}\left(\frac{1-z^a}{(1-z)z^{a-1}}\right)^{k+1}d_k(z),$$

现在我们可知,格式至多 C^k 连续,且有 k 阶精度;

Step 4. 对 $j=0,\ldots,k$,检查特征值是否有如下结构:

$$\begin{cases}\lambda_i=\frac{1}{a^i}, i=0,\ldots,j\\ |\lambda_i|<\frac{1}{a^k}, i=j+1,\ldots,N-1\\ \overline{\lambda}_i=\frac{1}{a^i}, i=0,\ldots,j\\ |\overline{\lambda}_i|<\frac{1}{a^k}, i=j+1,\ldots,N-2\end{cases},$$

若满足,则格式是 C^j 连续的,继续检查 $j+1$ 时是否满足;若不满足,则停止,格式是 C^{j-1} 连续的.

2.2 偶重数格式

四点二重插值格式的细分规则为[3]

$$\begin{cases}P_{2i}^{j+1}=P_i^j\\ P_{2i+1}^{j+1}=\left(\frac{1}{2}+\theta\right)(P_i^j+P_{i+1}^j)-\theta(P_{i-1}^j+P_{i+2}^j)\end{cases}.$$

Dyn 等人在文献[8]中指出:当 $|\theta|<\frac{1}{2}$ 时,格式是 C^0 连续的,即是收敛的;当 $0<\theta<\frac{\sqrt{5}-1}{8}$ 时,格式是 C^1 连续的.Romani 在文献[11]中作为例子,用不同的分析步骤给出了与我们相同的结果.考虑到完整性,我们重新分析该格式:

掩模为 $m=\left\{-\theta,0,\frac{1}{2}+\theta,1,\frac{1}{2}+\theta,0,-\theta\right\}$,宽度 $w=7$,重数 $a=2$.

局部细分矩阵 $\overline{M}$ 的阶数 $N=7$,具体形式为

$$\overline{M}=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

这里,$a_0=-\theta, a_1=\frac{1}{2}+\theta$.

特征值为 $\lambda=\left\{1,\frac{1}{2},2\theta,-\theta,-\theta,\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{1-16\theta}\right),\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{1-16\theta}\right)\right\}$.

从 Laurent 多项式 $m(z)$中分解尽可能多的因式 $\frac{1-z^2}{1-z}=1+z$,得到 $m(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-z^2}{(1-z)z}\right)^2 d_1(z)$.这里,Laurent 多项式 $d_1(z)=z^2(-2\theta+4\theta z+(1-4\theta)z^2+4\theta z^3-2\theta z^4)$.

可见,对于一般的θ,四点二重格式至多是 C^1 的:

1. C^0 连续:要求$\lambda_0=1$ 且$|\lambda_i|<1, i=1,\dots,6$,即 $-\frac{1}{2}<\theta<\frac{1}{2}$;

2. C^1 连续:要求$\lambda_0=1,\lambda_1=\frac{1}{2}$ 且 $|\lambda_i|<\frac{1}{2}, i=2,\dots,6$,即 $0<\theta<\frac{1}{4}$.

于是我们有下面的结论:

定理 3. 对任意的初始控制多边形,四点二重插值格式生成的极限曲线:

1. 当 $-\frac{1}{2}<\theta<\frac{1}{2}$ 时,是 C^0 连续的;

2. 当 $0<\theta<\frac{1}{4}$ 时,是 C^1 连续的.

注 2. 当 $\theta=\frac{1}{16}$ 时,$m(z)$可以提取出更多的因式: $m(z)=\frac{1}{2^3}\left(\frac{1-z^2}{(1-z)z}\right)^4 d_3(z)$.这里, $d_3(z)=z^4\left(-\frac{1}{2}+2z-\frac{z^2}{2}\right)$.但此时特征值为 $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8},-\frac{1}{16},-\frac{1}{16}\right\}$.从而对于一般的初始控制多边形,极限曲线不可能是 C^2 或 C^3 的,只能为 C^1.但此时格式有 3 阶精度.

六点二重插值格式的细分规则为[3]

$$\begin{cases} P_{2i}^{j+1}=P_i^j \\ P_{2i+1}^{j+1}=\left(\frac{9}{16}+2\theta\right)(P_i^j+P_{i+1}^j)-\left(\frac{1}{16}+3\theta\right)(P_{i-1}^j+P_{i+2}^j)+\theta(P_{i-2}^j+P_{i+3}^j) \end{cases}.$$

Weissman 说明:当 $0<\theta<0.02$ 时,格式是的 C^2 连续的[3].仿照四点二重格式的分析过程,我们有下面的结论:

定理 4. 对任意的初始控制多边形,六点二重插值格式生成的极限曲线:

1. 当 $-\frac{3}{16}<\theta<\frac{1}{16}(-1+3\sqrt{2})$ 时,是 C^0 连续的;

2. 当 $\frac{1}{32}(-6+3\sqrt{2})<\theta<\frac{1}{32}(-1+\sqrt{19})$ 时,是 C^1 连续的;

3. 当 $0<\theta<\theta_0$ 时,是 C^2 连续的;

4. 当 $0<\theta<\theta_1$ 时,是 C^3 连续的.

这里,θ_0,θ_1 分别是四次方程$-5+64x+768x^2-16384x^3+262144x^4=0$ 与$-1+32x+1536x^2-32768x^3+2097152x^4=0$ 的正实根.

注 3. 当 $\theta=\frac{3}{256}$ 时,对于一般的初始控制多边形,极限曲线是 C^2 的,但此时格式有 5 阶精度.

2.3 奇重数格式

三点三重插值格式的细分规则为[6]

$$\begin{cases} P_{3i-1}^{j+1}=a_0P_{i-1}^j+a_1P_i^j+a_2P_{i+1}^j \\ P_{3i}^{j+1}=P_i^j \\ P_{3i+1}^{j+1}=a_2P_{i-1}^j+a_1P_i^j+a_0P_{i+1}^j \end{cases}.$$

这里, $a_0=\mu, a_1=\frac{4}{3}-2\mu, a_2=-\frac{1}{3}+\mu$ .Hassan 等人仅说明了当 $\frac{2}{9}<\mu<\frac{3}{9}$ 时,格式是 C^1 的[6].类似于偶重数格式的分析过程,我们有下面的结论:

定理 **5**. 对任意的初始控制多边形,三点三重插值格式生成的极限曲线:

1. 当 $0<\mu<\frac{2}{3}$ 时,是 C^0 连续的;

2. 当 $\frac{2}{9}<\mu<\frac{1}{3}$ 时,是 C^1 连续的.

注 4. 当 $\mu=\frac{2}{9}$ 时,对于一般的初始控制多边形,极限曲线是 C^0 的,但此时格式有 2 阶精度.

四点三重插值格式的细分规则为[7]

$$\begin{cases} P_{3i}^{j+1}=P_i^j \\ P_{3i+1}^{j+1}=a_0P_{i-1}^j+a_1P_i^j+a_2P_{i+1}^j+a_3P_{i+2}^j \\ P_{3i+1}^{j+1}=a_3P_{i-1}^j+a_2P_i^j+a_1P_{i+1}^j+a_0P_{i+2}^j \end{cases}.$$

这里,

$$a_0=-\frac{1}{18}-\frac{1}{6}\mu, a_1=\frac{13}{18}+\frac{1}{2}\mu, a_2=\frac{7}{18}-\frac{1}{2}\mu, a_3=-\frac{1}{18}+\frac{1}{6}\mu .$$

Hassan 等人说明了当 $\frac{1}{15}<\mu<\frac{1}{9}$ 时,格式是 C^2 的[7].类似于偶重数格式的分析过程,我们有下面的结论:

定理 **6**. 对任意的初始控制多边形,四点三重插值格式生成的极限曲线:

1. 当 $-1<\mu<1$ 时,是 C^0 连续的;

2. 当 $-\frac{1}{5}<\mu<\frac{1}{3}$ 时,是 C^1 连续的;

3. 当 $\frac{1}{15}<\mu<\frac{1}{9}$ 时,是 C^2 连续的.

注 5. 当 $\mu=\frac{1}{27}$ 时,对于一般的初始控制多边形,极限曲线是 C^1 的,但此时格式有 3 阶精度.

3 六点三重插值格式的构造

定理 1 和定理 2 不仅可以用于分析已有的格式,还可以用于指导构造新的细分格式.下面,我们构造一种新的六点三重插值细分格式.

记 $m^{(0)}(z)=m(z)$,从生成函数 $m(z)$中可分解出因式 $\frac{1-z^a}{a(1-z)z^{a-1}}$ 的一个充分条件是模板系数和为 1,即

$$\sum_{i\in Z} m_{ai+l}=1, l=0,\dots,a-1 \tag{*}$$

这时,

$$\begin{aligned}&m^{(k)}(z)=m^{(k+1)}(z)\frac{1-z^{a}}{a(1-z)z^{a-1}}\\&\Rightarrow az^{a-1}m^{(k)}(z)=m^{(k+1)}(z)(1+z+\ldots+z^{a-1})\\&\Rightarrow am_i^{(k)}=m_{i-a+1}^{(k+1)}+m_{i-a+2}^{(k+1)}+\ldots+m_i^{(k+1)}\\&\Rightarrow m_i^{(k+1)}=am_i^{(k)}-\left(m_{i-a+1}^{(k+1)}+m_{i-a+2}^{(k+1)}+\ldots+m_{i-1}^{(k+1)}\right).\end{aligned}$$

这样,提取因式的多项式操作转化为对数列的操作.容易看出,$m^{(k)}(z)$与 $d_k(z)$关系为 $d_k(z)=\frac{1}{a}m^{(k+1)}(z)$, k=0,1,…

对于重数 a=3,式(*)为

$$\sum_{i\in Z}m_{3i+l}=1,l=0,1,2 \tag{**}$$

由对称性,可设六点三重插值格式为

$$\begin{cases}P_{3i}^{j+1}=P_i^j\\P_{3i+1}^{j+1}=a_0P_{i-2}^j+a_1P_{i-1}^j+a_2P_i^j+a_3P_{i+1}^j+a_4P_{i+2}^j+a_5P_{i+3}^j\\P_{3i+2}^{j+1}=a_5P_{i-2}^j+a_4P_{i-1}^j+a_3P_i^j+a_2P_{i+1}^j+a_1P_{i+2}^j+a_0P_{i+3}^j\end{cases}.$$

这里,a_i为待定系数.

格式掩模为

$$m^{(0)}=m=\{a_5,a_0,0,a_4,a_1,0,a_3,a_2,1,a_2,a_3,0,a_1,a_4,0,a_0,a_5\}.$$

为了使格式是 C^0 连续,即生成函数 $m(z)$可以提取出因式 $\frac{1-z^3}{3(1-z)z^2}$,$m^{(0)}$需要满足式(**),即 $\sum_{i=0}^{5}a_i=1$,则有 $a_2=1-a_0-a_1-a_3-a_4-a_5$.从而有

$$\begin{aligned}m^{(1)}=\{&a_5,a_0-a_5,-a_0,a_4+a_5,a_0+a_1-a_4-a_5,-a_0-a_1,a_3+a_4+a_5,1-2a_3-2a_4-2a_5,\\&a_3+a_4+a_5,-a_0-a_1,a_0+a_1-a_4-a_5,a_4+a_5,-a_0,a_0-a_5,a_5\}.\end{aligned}$$

为了使格式是 C^1 连续,$m^{(1)}$需要满足式(**),则有 $a_3=\frac{1}{3}+2a_0+a_1-2a_4-3a_5$.从而有

$$\begin{aligned}m^{(2)}=9\{&a_5,a_0-2a_5,-2a_0+a_5,a_0+a_4+2a_5,2a_0+a_1-2a_4-4a_5,-4a_0-2a_1+a_4+2a_5,\frac{1}{3}+4a_4+2a_1,\\&-4a_0-2a_1+a_4+2a_5,2a_0+a_1-2a_4-4a_5,a_0+a_4+2a_5,-2a_0+a_5,a_0-2a_5,a_5\}.\end{aligned}$$

为了使格式是 C^2 连续,$m^{(2)}$需要满足式(**),则有 $a_1=-\frac{1}{9}-3a_0-a_4-3a_5$.从而有

$$\begin{aligned}m^{(3)}=27\{&a_5,a_0-3a_5,-3a_0+3a_5,3a_0+a_4+2a_5,-\frac{1}{9}-a_0-4a_4-12a_5,\frac{1}{3}+6a_4+18a_5,\\&-\frac{1}{9}-a_0-4a_4-12a_5,3a_0+a_4+2a_5,-3a_0+3a_5,a_0-3a_5,a_5\}.\end{aligned}$$

为了使格式是 C^3 连续,$m^{(3)}$需要满足式(**),则有 $a_4=-\frac{4}{81}+a_0-4a_5$.从而有

$$m^{(4)}=81\{a_5,a_0-4a_5,-4a_0+6a_5,-\frac{4}{81}+7a_0-4a_5,\frac{11}{81}-8a_0+2a_5-\frac{4}{81}+7a_0-4a_5,-4a_0+6a_5,a_0-4a_5,a_5\}.$$

为了使格式是 C^4 连续,$m^{(4)}$需要满足式(**),则有 $a_0=\frac{3}{243}-a_5$.从而有

$$m^{(5)}=243\{a_5,\frac{5}{243}-6a_5,-\frac{25}{243}+15a_5,\frac{43}{243}-20a_5,-\frac{25}{243}+15a_5,\frac{5}{243}-6a_5,a_5\}.$$

为了使格式是 C^5 连续,$m^{(5)}$需要满足式(**),则有 $a_5=\frac{7}{729}$.从而有

$$m^{(6)}=\{7,-34,57,-34,-7\}.$$

我们不能再进一步得到 $m^{(7)}$.

于是,我们构造了一种新的六点三重插值格式,它的系数 a_i 为

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{5}{243} - \mu \\ a_1 = -\dfrac{35}{243} + 5\mu \\ a_2 = \dfrac{70}{81} - 10\mu \\ a_3 = \dfrac{70}{243} + 10\mu \\ a_4 = -\dfrac{7}{243} - 5\mu \\ a_5 = \mu \end{cases}.$$

此时,生成函数 $m(z)$可以提取因式 $\dfrac{1-z^3}{3(1-z)z^2}$ 的 5 次幂,即格式至多为 C^4 连续.

特别地,当 $\mu = \dfrac{7}{729}$ 时,系数 a_i 为 $a_0 = \dfrac{8}{729}, a_1 = -\dfrac{70}{729}, a_2 = \dfrac{560}{729}, a_3 = \dfrac{280}{729}, a_4 = -\dfrac{56}{243}, a_5 = \dfrac{7}{729}$.此时,生成函数 $m(z)$可以提取因式 $\dfrac{1-z^3}{3(1-z)z^2}$ 的 6 次幂,即格式至多为 C^5 连续.仿照三点三重格式的分析过程,我们有下面的结论:

定理 7. 对任意的初始控制多边形,六点三重插值格式生成的极限曲线:

1. 当 $\dfrac{-601+\sqrt{189841}}{4374} < \mu < \dfrac{13}{243}$ 时,是 C^0 连续的;
2. 当 $\dfrac{-899+\sqrt{548281}}{21870} < \mu < \dfrac{37}{1701}$ 时,是 C^1 连续的;
3. 当 $\dfrac{-197+\sqrt{70489}}{21870} < \mu < \dfrac{19}{1701}$ 时,是 C^2 连续的;
4. 当 $\dfrac{37+\sqrt{13609}}{21870} < \mu < \dfrac{13}{1701}$ 时,是 C^3 连续的.

注 6. 对于一般的 μ ,格式有 4 阶精度.当 $\mu = \dfrac{7}{729}$ 时,对于一般的初始控制多边形,极限曲线是 C^2 的,但此时格式有 5 阶精度.

4 结 论

本文利用 Romani 的充要条件[11],系统地分析了一些已有的单变量插值细分格式各阶连续时参数的取值范围.指出了 Weissman 的六点二重插值格式[3]可以达到 C^3 连续.另外,构造了一种新的六点三重插值细分格式,与六点二重插值格式相比,连续性虽同为 C^3,但高一阶精度.

本文构造插值细分格式的方法是一种代数方法,而 Ivrissimtzis 等人从几何的角度研究了细分格式的构造[12].虽然本文中的构造方法对于精度的阶数提高是有效的,但对连续阶的改善并不是直接而有效的.在以后的工作中,我们将考虑能否通过增加参数个数或从几何角度给出提高连续阶的构造方法.另外,如何选择参数来确定插值细分格式的逼近精度,也是一个有待进一步研究的问题.

References:

[1] Chaikin GM. An algorithm for high speed curve generation. Computer Graphics and Image Processing, 1974,3(4):346–349.

[2] Dubuc S. Interpolation through an iterative scheme. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1986,114(1):185–204.

[3] Dyn N, Gregory JA, Levin D. A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design. Computer Aided Geometric Design, 1987,4(4):257−268.

[4] Deslauriers G, Debuc S. Symmetric iterative interpolation processes. Constructive Approximation, 1989,5(1):49−68.

[5] Kobbelt L. $\sqrt{3}$ -Subdivision. In: Proc. of the SIGGRAPH 2000. New York: ACM Press, 2000. 103−112.

[6] Hassan MF, Dodgson NA. Ternary and three-point univariate subdivision schemes. In: Cohen A, Merrien JL, Schumaker LL, eds. Curve and Surface Fitting: Saint-Malo 2002. Brentwood: Nashboro Press, 2003. 199−208.

[7] Hassan MF, Ivrissimitzis IP, Sabin MA. An interpolating 4-point C^2 ternary stationary subdivision scheme. Computer Aided Geometric Design, 2002,19(1):1−18.

[8] Dyn N, Gregory JA, Levin D. Analysis of uniform binary subdivision scheme for curve design. Constructive Approximation, 1991,7(2):127−147.

[9] Dyn N, Levin D, Micchelli CA. Using parameters to increase smoothness of curves and surfaces generated by subdivision. Computer Aided Geometric Design, 1990,7(2):129−140.

[10] Dyn N. Analysis of convergence and smoothness by the formalism of Laurent polynomials. In: Iske A, Quak E, Floater MS, eds. Tutorials on Multiresolution in Geometric Modelling. New York: Springer-Verlag, 2002. 51−64.

[11] Romani L. Classifying uniform univariate refinement schemes and predicting their behaviour. In: Dodgson NA, Floater MS, Sabin MA, eds. Proc. of the MINGLE 2003. 123−134.

[12] Ivrissimitzis IP, Dodgson NA, Hassan MF, Sabin MA. On the geometry of recursive subdivision. Int'l Journal of Shape Modeling, 2002,8(1):23−42.

黄章进(1980－),男,湖北天门人,博士生,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学.