

一类多参数的曲线细分格式*

申立勇¹ 黄章进²

¹(中科院数学与系统研究院, 数学机械化重点实验室, 北京 100080)

²(北京大学信息科学技术学院, 北京 100871)

(shenly@amss.ac.cn hzj@graphics.pku.edu.cn)

摘要: 构造了一类收敛的多参数差分格式, 根据细分格式和差分格式的关系以及连续性条件, 可得到任意阶连续的多参数曲线细分格式。通过选取合适的参数, 可以得到一些经典的曲线细分格式, 如Chaikin格式, 三次样条细分格式和四点插值格式等。同时设计了一种 C^1 连续的不对称三点插值格式, 可以生成不对称的极限曲线。给出了同阶差分格式线性组合的性质, 从而可设计出更多收敛的多参数曲线细分格式。

关键词: 生成多项式; 细分格式; 差分格式

中图法分类号: TP391.41 TP391.72

0. 引言

细分方法是通过对初始控制多边形/控制网格不断细化生成光滑曲线/曲面的造型方法。由于具有算法简单、易于实现和高效性等优点, 细分方法成为计算机图形学, 计算机辅助几何设计和工业造型设计中的一种重要方法。

Chaikin[1]最早在构造曲线中引入离散细分曲线的概念, 提出的用于生成二次B样条的算法。此后, 可从任意拓扑网格生成光滑曲面的Catmull-Clark曲面细分格式[2]的提出标志着细分方法成为曲线曲面造型的一种方法。自此, 新的细分格式和分析理论不断被提出和完善[3]。在单变量细分格式的分析 and 构造上, Dyn等人[4, 5, 6]和Warren[7]给出了二重格式的一些充分条件和必要条件, Hassan等人[8, 9]给出了三重格式的一些充分条件。Romani[10]和Huang[11]分析了一般的多重格式的连续性。

在此之前的单变量细分格式都是没有参数或单参数的, 在应用时, 单参数缺乏自由度来设计满足一定性质的格式。我们通过分析形如 $D(z) = (a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0)(z+1)^m, m \geq 1$ 的生成多项式对应的矩阵 D 的特征值, 得到了一类收敛的多参数差分格式。继而根据细分格式和差分格式的关系以及 C^k 连续性条件, 我们可以设计一系列任意阶连续的多参数曲线细分格式。通过选取合适的参数, 我们得到了经典的Chaikin格式[1], 三次B样条格式[5]和四点插值格式[4]等。

以往设计细分格式, 控制点的权值是对称的, 因而基函数和极限曲线呈现一定的对称性。通过选取不对称的参数, 我们可以得到不对称的细分格式。特别地, 我们给出了一种不对称的 C^1 连续的三点插值格式, 生成的极限曲线呈现有趣的不对称性。另外, 根据收敛的同阶差分格式的线性组合仍是收敛的差分格式的性质, 可以组合设计出更多收敛的多参数曲线细分格式。

1. 预备知识

给定初始控制点向量 $p^0 = \{p_i^0 : i \in Z\}$, Z 为整数集, 静态细分格式按如下方式定义一个控制点向量序列 $\{p^k : k \in Z\}$:

$$p_i^{k+1} = \sum_{j \in Z} a_{i-2j} p_j^k.$$

这里, 有限个元素不为零的系数构成的集合 $a = \{a_i : i \in Z\}$ 称为细分格式的掩模。上面的细分过程用矩阵形式可表示为 $p^{k+1} = S p^k$, 矩阵 S 称为细分矩阵, 其元素满足 $s_{2j+i, j} = a_i, i \in Z, j \in Z$ 。定义掩模 a 的生成多项式 $S(z) = \sum_i a_i z^i$ 为细分矩阵(或细分格式) S 的生成多项式。

由[5]知, 细分格式一致收敛, 则其掩模 a 必满足

* 基金项目: 国家重点基础研究发展规划项目(2004CB719403); 国家自然科学基金(60573121); 许国志博士后工作奖励基金

$$\sum_i a_{2i} = \sum_i a_{2i+1} = 1. \quad (1)$$

记 Δ 为后差分算子, 差分向量 $\Delta p^j = \{(\Delta p^j)_i = p_i^j - p_{i-1}^j : i \in Z\}$ 。考察差分向量的细分过程, 有

$$\Delta p^{j+1} = D \Delta p^j,$$

这里 D 为差分格式的细分矩阵, 我们称之为**差分矩阵**。由 $p^{j+1} = S p^j$, 则有 $\Delta S p^j = D \Delta p^j$, 表示为生成多项式形式即为 $(1-z)S(z)P^j(z^2) = D(z)(1-z^2)P^j(z^2)$ 。

从而, 细分矩阵 S 和差分矩阵 D 对应的生成多项式满足

$$S(z) = (1+z)D(z). \quad (2)$$

注意, 文[7]中采用的前差分算子, 只能得到 $S(z) = (1+z)D(z)/z$ 。

对细分格式的收敛性和连续性分析, 文[7]给出了下面的定理:

定理1. 假定细分格式 S 的掩模 a 满足式(1), D 为其差分矩阵。若存在正整数 k 及实数 $0 \leq \alpha < 1$, 使 $\|D^k\| \leq \alpha$, 则细分格式 S 一致收敛。

定理2. 若生成多项式 $S(z)$ 定义的细分格式 S 是收敛的, 那么 $(\frac{z+1}{2})^k S(z)$ 定义一个 C^k 连续的细分格式。

2. 多参数细分格式

由定理2知, 从收敛的细分格式可以构造任意阶光滑的细分格式。由定理1, 要构造收敛的细分格式 S , 需要差分矩阵 D 为收敛矩阵, 此时称其对应的差分格式是收敛的。这样问题就转化为寻找合适的多项式 $D(z)$, 使其对应的差分格式 D 是收敛的, 继而 $S(z) = (1+z)D(z)$ 对应于收敛的细分格式。易见 $D(z)$ 满足如下两个条件:

1. $D(z)$ 的奇数项系数与偶数项系数和均为 $\frac{1}{2}$;
2. $D(z)$ 对应矩阵 D 的谱半径 $\rho(D) < 1$, 这里 $\rho(D) = \max_i |\lambda_i|$, λ_i 是 D 的特征值。

注意, 收敛的差分格式不同于收敛的细分格式, 对收敛的细分格式 S , 其细分矩阵的谱半径 $\rho(S) = 1$ 。

根据上面两个条件容易找到一些合适的多项式 $D(z)$, 如:

I) $D(z) = (az+b)(z+1)$, 若 $|a| < 1, |b| < 1, a+b = \frac{1}{2}$, 则 $D(z)$ 对应于收敛的差分格式。

II) $D(z) = (a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0)(z+1)^m, m \geq 1$, 若 $a_i \geq 0$ 且 $\sum_i a_i = \frac{1}{2^m}$, 易验证 $\|D^1\| = \frac{1}{2} < 1$, 而 $D(z)$ 的奇数项系数与偶数项系数和为 $2^{m-1} \times \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2}$, 所以这样的 $D(z)$ 对应于收敛的差分格式。

但这两个应用是非常有限的。I) 中的自由度太少, 能得到的格式有限; II) 是因为所有的 $a_i \geq 0$, 所以 $S(z) = D(z)(z+1)$ 对应的细分矩阵行中不会出现负项, 这使得上述细分格式形式设计非常有限, 例如在这种格式中不可能得到经典的四点插值格式[4]。

对形如 $D(z) = (a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0)(z+1)^m, m \geq 1$ 的多项式对应的矩阵 D 的特征值, 我们有如下引理:

引理1. 设 D_m 是生成多项式为 $D(z) = (az+b)(z+1)^m, m \geq 1$ 的矩阵, 则 D_m 的特征值为 $\{a, b, a+b, \dots, 2^{m-1}(a+b)\}$ 。

引理2. 设 D_m 是生成多项式为 $D(z) = (az^2 + bz + c)(z+1)^m, m \geq 1$ 的矩阵, 则 D_m 的特征值为 $\{a, b, c, a+b+c, 2(a+b+c), 4(a+b+c), \dots, 2^{m-1}(a+b+c)\}$ 。

引理的证明见**附录**。有了上述引理, 我们可以设计一些收敛的多参数差分格式, 再利用关系式(2)和定理2设计任意阶连续的多参数曲线细分格式。

由引理1, 我们可以设计收敛的两参数差分格式。

定理3. $D(z) = (az+b)(z+1)^m$, 若 $|a| < 1, |b| < 1, a+b = \frac{1}{2^m}, m \geq 1$, 则 $D(z)$ 生成收敛的差分格式。

证明: 由引理1知, $D(z)$ 对应的差分矩阵 D 的特征值为 $\{a, b, a+b, 2(a+b), \dots, 2^{m-1}(a+b)\}$ 所以 $\rho(D) = \max\{|a|, |b|, |a+b|, |2(a+b)|, \dots, |2^{m-1}(a+b)|\} = \max\{|a|, |b|, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^{m-1}}, \dots, \frac{1}{2}\} < 1$, 则 D 是收敛矩阵。又由于 D 的行和为 $(a+b) \times 2^{m-1} = \frac{1}{2}$, 故 $D(z)$ 对应于收敛的差分格式。证毕。

例1 取 $m=1$, 则 $a+b = \frac{1}{2}$, $D(z) = (az+b)(z+1)$ 。由关系式(2)和定理2知, 生成多项式 $S(z) = \frac{1}{2}D(z)(z+1)^2$ 对应的细分格式:

$$\begin{cases} p_{2i}^{j+1} &= (\frac{1}{4}+a)p_{i-1}^j + (\frac{1}{4}+b)p_i^j \\ p_{2i+1}^{j+1} &= \frac{1}{2}ap_{i-1}^j + \frac{3}{4}p_i^j + \frac{1}{2}bp_{i+1}^j \end{cases} \quad (3)$$

当 $|a| < 1, |b| < 1, a+b = \frac{1}{2}$ 时, 至少是 C^1 连续的。

取 $a=0, b = \frac{1}{2}$, 格式(3)即为Chaikin格式[1]; 取 $a=b = \frac{1}{4}$, 格式(3)即为三次B样条细分格式[5]; 取 $a = -\frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}$, 则得到一个 C^1 连续的三点插值格式:

$$\begin{cases} p_{2i}^{j+1} &= p_i^j \\ p_{2i+1}^{j+1} &= -\frac{1}{8}p_{i-1}^j + \frac{3}{4}p_i^j + \frac{3}{8}p_{i+1}^j \end{cases} \quad (4)$$

类似地, 由引理2, 我们可以设计收敛的三参数差分格式。

定理4. $D(z) = (az^2 + bz + c)(z+1)^m$, 若 $|a| < 1, |b| < 1, |c| < 1, a+b+c = \frac{1}{2^m}, m \geq 1$, 则 $D(z)$ 生成收敛的差分格式。

例2 取 $m=2$, 则 $a+b+c = \frac{1}{4}$, $D(z) = (az^2 + bz + c)(z+1)^2$ 。由关系式(2)和定理2知, 生成多项式 $S(z) = \frac{1}{2}D(z)(z+1)^2$ 对应的细分格式:

$$\begin{cases} p_{2i}^{j+1} &= \frac{1}{2}(4a+b)p_{i-1}^j + \frac{1}{2}(4a+6b+4c)p_i^j + \frac{1}{2}(b+4c)p_{i+1}^j \\ p_{2i+1}^{j+1} &= \frac{1}{2}ap_{i-1}^j + \frac{1}{2}(6a+4b+c)p_i^j + \frac{1}{2}(a+4b+6c)p_{i+1}^j + \frac{1}{2}cp_{i+2}^j \end{cases} \quad (5)$$

当 $|a| < 1, |b| < 1, |c| < 1, a+b+c = \frac{1}{4}$ 时, 至少是 C^1 连续的。

取 $a=c = -\frac{1}{8}, b = \frac{1}{2}$, 格式(5)即为经典的四点插值格式[4]; 取 $a=b=c = \frac{1}{12}$, 则得到一个至少 C^1 连续的逼近格式。

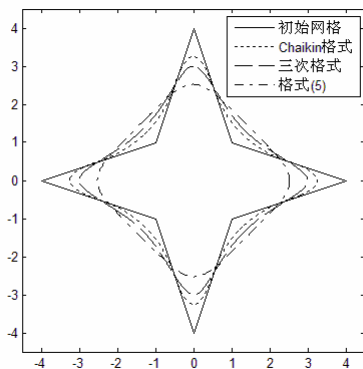


图1 逼近格式的比较

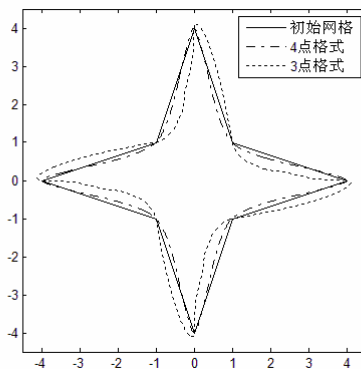


图2 插值格式的比较

图1中给出了Chaikin格式[1], 三次B样条格式[4]和取 $a=b=c = \frac{1}{12}$ 的格式(5)这三种逼近格式作用在同一初始网格上的结果。图2中给出了三点插值格式(4)和四点插值格式[4]作用在同一初始网格上的结果。注意到, 由于三点插值格式(4)中控制顶点权值的不对称性, 生成的极限曲线形状呈现不对称性。一般地, 在格式(3)和格式(5)中, 分别取 $a \neq b$ 和 $a \neq c$, 即可得到类似的不对称细分格式。

进一步, 对于同阶差分格式, 我们有如下性质。

性质1. 设 D_1, D_2 为满足定理4条件的两个同阶收敛差分格式, 则 $\alpha D_1 + \beta D_2$ 为收敛差分格式, 这里 $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$ 。

证明: 设 D_1, D_2 对应的生成多项式分别为 $(a_1z^2 + b_1z + c_1)(z+1)^m, (a_2z^2 + b_2z + c_2)(z+1)^m$, 则

$\alpha D_1 + \beta D_2$ 生成多项式为 $((\alpha a_1 + \beta a_2)z^2 + (\alpha b_1 + \beta b_2)z + (\alpha c_1 + \beta c_2))(z+1)^m$ 。由引理2的证明过程可知, $\alpha D_1 + \beta D_2$ 的特征值为 $\{\alpha a_1 + \beta a_2, \alpha b_1 + \beta b_2, \alpha c_1 + \beta c_2, (\alpha a_1 + b_1 + c_1) + \beta(a_2 + b_2 + c_2), \dots, \frac{1}{2^{m-1}}(\alpha(a_1 + b_1 + c_1) + \beta(a_2 + b_2 + c_2))\}$ 。 $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$ 和 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 满足的条件可得出 $\rho(\alpha D_1 + \beta D_2) < 1$ 且行和为 $\frac{1}{2}$, 即 $\alpha D_1 + \beta D_2$ 仍为收敛的差分格式。证毕。

根据上述性质, 可以进一步通过加权组合不同的差分格式而构造更多的多参数曲线细分格式。

例3 在定理4中取 $m = 2$ 时的细分格式, 取 $a = c = -\frac{1}{8}, b = \frac{1}{2}$ 和 $a = b = c = \frac{1}{12}$ 时的差分格式分别为 D_1, D_2 。由性质1可知, $D = \frac{1}{2}D_1 + \frac{1}{2}D_2$ 也是收敛的差分格式, 它对应一个至少 C^1 连续的逼近格式:

$$\begin{cases} p_{2i}^{j+1} &= \frac{5}{48} p_{i-1}^j + \frac{19}{24} p_i^j + \frac{5}{48} p_{i+1}^j \\ p_{2i+1}^{j+1} &= -\frac{1}{96} p_{i-1}^j + \frac{49}{96} p_i^j + \frac{49}{96} p_{i+1}^j - \frac{1}{96} p_{i+2}^j \end{cases}$$

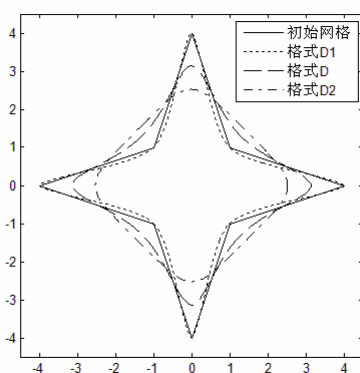


图3 组合格式

图3中给出了差分格式 D_1, D_2 和它们的组合格式 $D = \frac{1}{2}D_1 + \frac{1}{2}D_2$ 对应的曲线细分格式作用在同一初始网格上的结果。

3. 结论

本文通过分析形如 $D(z) = (a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0)(z+1)^m, m \geq 1$ 的生成多项式对应的矩阵 D 的特征值形式, 并且根据矩阵收敛和特征值的关系给出了一类收敛的多参数差分格式。继而根据细分格式和差分格式的关系以及连续性条件, 可以设计一系列任意阶连续的多参数曲线细分格式。多参数格式和以往的单参数格式相比, 可以有更多自由度来设计满足特定性质的细分格式。在本文的给出的差分格式中, 我们不仅可以得到一系列新的收敛细分格式, 而且通过适当选取差分格式的参数可以得到了一些经典的细分格式。进一步, 通过选取不对称的参数, 可以得到不对称的细分格式。作为例子, 我们给出了不对称的 C^1 连续的插值格式, 生成的极限曲线呈现不对称性, 增加了细分方法的造型能力。另外, 我们证明了收敛的同阶差分格式的线性组合仍是收敛的差分格式。根据这个性质, 可以设计出更多收敛的多参数曲线细分格式。

本文根据分析差分矩阵特征值的符号形式, 从而得到矩阵的收敛性条件与矩阵元素的关系。我们希望推广这种思路, 讨论更多的差分矩阵特征值形式, 设计更多类型的多参数细分格式。对已有的收敛细分格式, 研究参数选取和细分格式性质的关系也是需要进一步探讨的工作。如对于怎样选取参数使得细分格式的具有保凸性, 参数的选取对细分格式连续性的影响等。

4. 附录

我们仅以引理2为例给出证明, 引理1证明类似。

引理2的证明: 用归纳法, $m = 1$ 时, 可以求得 D_1 的特征值是 $\{a, b, c, (a+b+c)\}$ 。

现在假定 $m = k$ 时命题成立, 要证 $m = k+1$ 时也成立。 $m = k$ 时, 生成多项式为

$$f_k(z) = (az^2 + bz + c)(z+1)^k = a_{k+2} z^{k+2} + a_{k+1} z^{k+1} + \dots + a_1 z + a_0$$

从而 D_k 的 $(k+3) \times (k+3)$ 阶中心矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{k+2} & a_k & a_{k-2} & a_{k-4} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{k+1} & a_{k-1} & a_{k-3} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{k+2} & a_k & a_{k-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

D_k 的特征值就是行列式 $\det(D_k - \lambda I)$ 的解。

当 $m = k + 1$ 时, 生成多项式为 $f_{k+1}(z) = f_k(z)(z+1)$, 对应的差分矩阵为 D_{k+1} 。则 D_{k+1} 的特征值就是行列式 $\det(D_{k+1} - \lambda I)$ 的解, $D_{k+1} - \lambda I$ 的 $(k+4) \times (k+4)$ 阶中心矩阵为,

$$\begin{pmatrix} a_{k+2} - \lambda & a_{k+1} + a_k & a_{k-1} + a_{k-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{k+2} + a_{k+1} - \lambda & a_k + a_{k-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{k+2} & a_{k+1} + a_k - \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 + a_1 - \lambda & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 + a_2 & a_1 + a_0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_4 + a_3 & a_2 + a_1 & a_0 - \lambda \end{pmatrix} \quad (6)$$

我们只要证明 D_k 的特征值都是 D_{k+1} 的特征值, 且 D_{k+1} 还有另一特征值 $2^k(a+b+c)$, 则引理得证。考察矩阵 (6), 将所有的列加到最后一列, 于是新的行列式最后一列元素都为 $2^k(a+b+c) - \lambda$ 。将它作为一个因子提出去, 此时矩阵的最后一列元素都为 1, 再从第一行起, 用前一行减后一行, 直到最后一行, 则矩阵变为

$$\begin{pmatrix} a_{k+2} - \lambda & a_k - a_{k+2} + \lambda & a_{k-2} - a_k & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{k+1} - \lambda & a_{k-1} - a_{k+1} + \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{k+2} & a_k - a_{k+2} - \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 - a_3 - \lambda & -a_1 + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 - a_4 & a_0 - a_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_4 + a_3 & a_2 + a_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

再对矩阵 (7) 右乘矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(k+4) \times (k+4)}$$

则可得

$$\begin{pmatrix} D_k - \lambda I & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}_{(k+4) \times (k+4)}$$

于是我们有 $\det(D_{k+1} - \lambda I) = \det(D_k - \lambda I)(2^k(a+b+c) - \lambda)$ 。由归纳假设知, D_{k+1} 的特征值为 $\{a, b, c, a+b+c, 2(a+b+c), 4(a+b+c), \dots, 2^k(a+b+c)\}$ 。证毕。

参考文献

- [1] Chaikin G. An algorithm for high speed curve generation [J]. Computer Graphics & Image Processing, 1974, 3(4): 346—349
- [2] Catmull E, Clark J. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes [J]. Computer Aided Design, 1978, 10(6): 350—355
- [3] Zorin D, Schröder P. Subdivision for modeling and animation (Course notes) [C] // Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, New Orleans, Louisiana, 2000: 1—116
- [4] Dyn N, Levin D, Gregory J A. A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design [J]. Computer Aided Geometric Design, 1987, 4(4): 257—268
- [5] Dyn N, Levin D, Micchelli C A. Using parameters to increase smoothness of curves and surfaces generated by subdivision [J]. Computer Aided Geometric Design, 1990, 7(3): 129—140
- [6] Dyn N, Gregory J A, Levin D. Analysis of uniform binary subdivision scheme for curve design [J]. Constructive Approximation, 1991, 7(2) : 127—147
- [7] Warren J, H. Weimer. Subdivision method for geometric design : a constructive approach [M]. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2001
- [8] Hassan M F, Dodgson N A. Ternary and three-point univariate subdivision schemes [C] // Curve and Surface Fitting: Saint-Malo 2002. Brentwood: Nashboro Press, 2003: 199—208
- [9] Hassan M F, Ivriřimitzis I P, Sabin M A. An interpolating 4-point C^2 ternary stationary subdivision scheme [J]. Computer Aided Geometric Design, 2002, 19(1): 1—18
- [10] Romani L. Classifying uniform univariate refinement schemes and predicting their behaviour[C] // Proceedings of MINGLE Workshop 2003. Cambridge, UK, 2003: 123—134
- [11] Huang Zhangjin. Continuity analysis and construction of uniform stationary univariate subdivision schemes [J]. Journal of Software, 2006, 17(3): 559—567(in Chinese)
(黄章进. 单变量均匀静态细分格式的连续性分析和构造[J]. 软件学报, 2006, 17(3): 559—567)

A Class of Curve Subdivision Schemes with Several Parameters

Liyong Shen¹, Zhangjin Huang²

¹ (KLMM, Institute of Systems Sciences, AMSS, Beijing 100080, China)

² (School of Electronics Engineering and Computer Science, Peking University, Beijing 100871, China)

Keywords: generating polynomial; subdivision scheme; difference scheme

Abstract: A class of convergent difference schemes with several parameters is proposed. According to the relationship between the subdivision scheme and its difference scheme and the sufficient condition for C^k continuity, we can devise curve subdivision schemes with arbitrary order continuity. By setting appropriate parameters, some classical curve subdivision schemes such as the Chaikin's scheme, the cubic B-spline scheme and 4-point interpolating scheme can be obtained. A C^1 -continuous asymmetric 3-point interpolating scheme is also presented to model asymmetric limit curves. Furthermore, the property of the linear combination of the difference schemes of the same order is analyzed, which can help to devise more convergent curve subdivision schemes with several parameters.