第六章　刚体力学

§6.1 概述　了解刚体运动的基本情况，包括自由度、运动形式等。介绍处理刚体问题的基本思想。

§6.2 刚体的定轴转动　掌握刚体定轴转动的运动规律，掌握刚体定轴转动的角动量定理及角动量守恒。理解刚体对某定轴的转动惯量的概念和计算方法。掌握刚体定轴转动的动能定理。

§6.3 刚体的平面平行运动　理解平面平行运动是平动与转动的合成，掌握平面平行运动的基本的动力学方程，熟练掌握刚体的二维平动与圆柱体的无滑滚动。

§6.4 刚体的定点运动简析　定性分析刚体定点运动的状况，理解回转效应和章动等运动表现。

一．刚体的自由度

质点 → 实际物体（无穷多质元的质点系）

很多物体在运动过程中，大小、形状变化很微小，将其绝对化地抽象为**刚体**，　各质元间距离保持不变。

自由度—— 为确定一个系统的几何位形所需独立变量的个数。一个自由质点3个自由度，N个自由质点系$3N$个。

（内）约束降低自由度。刚性双原子分子5个自由度。

刚体虽有无穷多质点，但约束的存在，使自由度大大降低，最多**6个**。 常用3个移动＋3个转动自由度。

采用3移＋3转自由度，刚体动力学问题的基本方程是运动定理。

二. 刚体的运动类型

由于外约束的存在，自由度更减少，复杂程度也不同。常见以下几类：

- 平动　刚体中任一直线在运动中保持平行。各点运动情况相同。最多3个自由度。

- 定轴转动　刚体中各点绕一根固定直线转动。与转轴平行的直线上各点运动状况相同。只有1个自由度。

- 平面平行运动　刚体中各点运动都与某固定平面相平行。该平面垂线上各点运动相同。最多3个自由度。

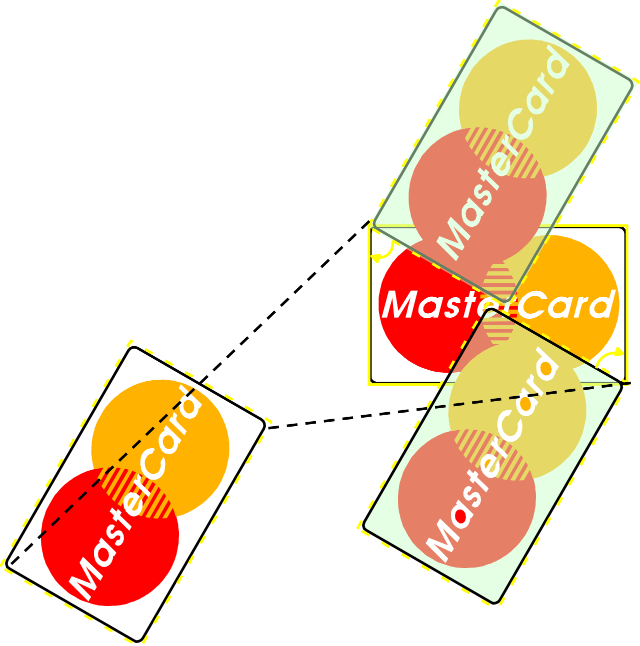
- 定点转动　始终绕一个固定点转动。最多3个自由度。

夺命“内轮差”！

刚体的一般运动，可以看作刚体上（或其延拓）某一基点的平动和绕此基点的定点转动。共6个自由度。

其中基点平动与基点的选择有关，而绕基点的转动则与基点无关。

力是滑移矢量：施于刚体某点的作用力，决不可以随便移到另一点去。但是，该力可以沿着其作用线滑移，其所起的力学作用完全不因此而改变。

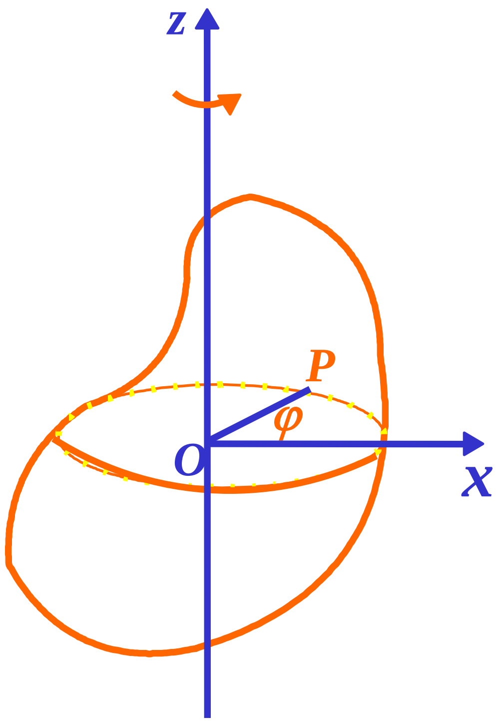


重力、平动惯性力等效于作用于刚体的质心。

对于刚体，内力所作功的和为零。

§ 6.2 刚体的定轴转动

一. 定轴转动运动学



在刚体上取一垂直于轴的截面，交点O为原点，取定x轴。角坐标 φ。一维问题。

定轴运动方程 $\varphi=\varphi_{(t)}$ 。角位移$\Delta\varphi$ 。

角速度

$$\omega_{(t)}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi}_{(t)}$$

角加速度

$$\beta_{(t)}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\ddot{\varphi}_{(t)}$$

由运动方程，微分可得角速度和角加速度；反之，在初始条件下，积分可得到运动方程。

刚体内某点的运动情况。该点与转轴的距离是ρ，则

$$v=\omega\rho,\quad a_\tau=\beta\rho,\quad a_n=\omega^2\rho$$

若在转轴上取一原点O，质元位矢 $\vec{r}_{(t)}$

利用角速度矢量 $\vec{\omega}$，各点速度表示为

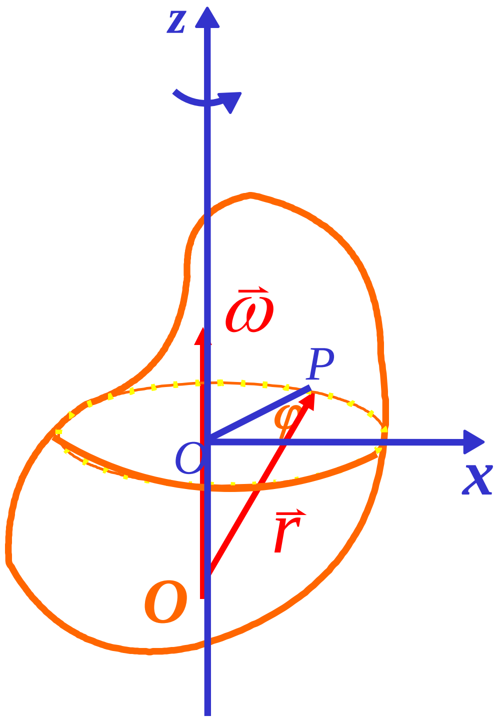
$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r})=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$=\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

所以

$$\begin{cases}\vec{a}_\tau=\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} & \text{切向}\\ \vec{a}_n=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) & \text{法向}\end{cases}$$



二. 定轴转动的动力学方程

定轴转动一个自由度需一个方程。角动量定理

$$M=\frac{dJ}{dt}$$ （其中***M***、***J***均对定轴）

目前特点是各质元间距及对定轴的距离不变。且各点有相同的角速度。角动量可写为

$$J=\sum m_i r_i v_i=\sum m_i r_i^2\omega=I\omega$$ (r_i到轴距离)

其中***I***是刚体对定轴的转动惯量。由质量及其分布决定，对定轴是不变的。这样角动量定理写为

$$\boxed{M=\frac{d(I\omega)}{dt}=I\cdot\beta}$$

这是定轴转动的基本方程 。

三. 转动惯量的计算

$I=\sum m_i r_i^2$，其中 $\Delta I=m_i r_i^2$ 可以视为质元$\boldsymbol{m_i}$对转轴的转动惯量。$\boldsymbol{r_i}$是到轴距离！

对于质量连续分布的刚体，已知质量密度分布和形状，利用积分可以求得对定轴的转动惯量

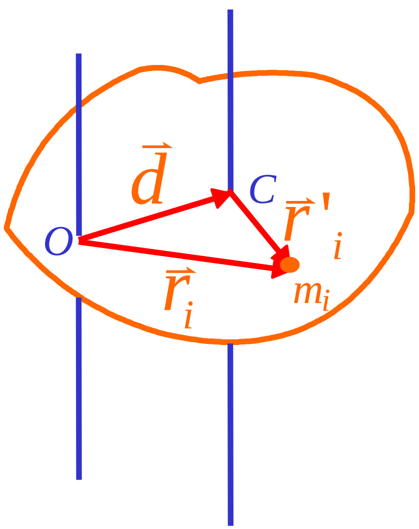
$$I=\int r^2 dm=\iiint\limits_V r^2\rho_{(r)}dV,\quad (\iint\limits_S r^2\sigma dS,\quad \int\limits_L r^2\lambda dl)$$

平行轴定理：刚体对某轴的转动惯量等于质心对该轴的转动惯量加上刚体对过质心平行轴的转动惯量。

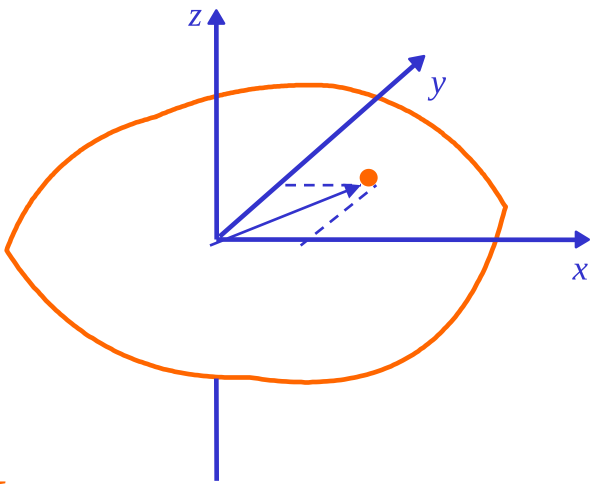
$$I=\sum m_i r_i^2=\sum m_i(\vec{d}+\vec{r}'_i)^2$$

$$=\sum m_i d^2+\sum m_i r'^2_i+2\sum m_i \vec{r}'_i\cdot\vec{d}$$

$$=Md^2+I_C \qquad (\sum m_i\vec{r}'_i=M\vec{r}'_C=0)$$



垂直轴定理：一个平面分布的质点系对垂直平面z轴的转动惯量，等于面内与z轴相交的两垂直轴的转动惯量之和。



$$\because \quad I_x = \sum m_i y_i^2, \quad I_y = \sum m_i x_i^2$$

$$\therefore \quad I_z = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = I_x + I_y$$

四. 角动量守恒

刚体对转动轴的角动量变化是

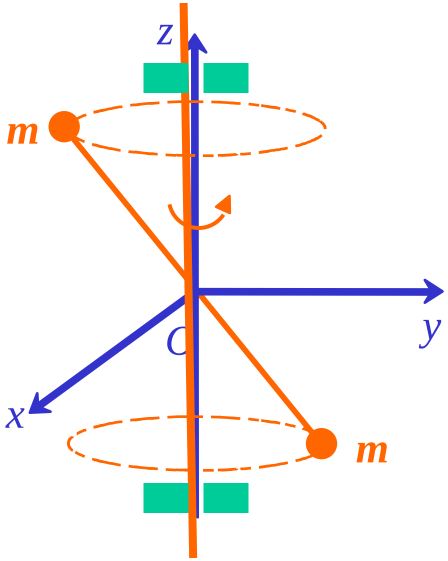
$$J_2 - J_1 = \int_{t_1}^{t_2} M dt$$

若对转动轴的力矩为零，则系统对转轴的角动量守恒

$$J = I\omega = const.$$

注意只是对转轴守恒，其它两个方向不一定守恒。

右图所示 $x = \pm r\cos\omega t,\quad y = \pm r\sin\omega t$



$$J_x = 2myv_z - 2mzv_y = -2mzv_y$$

$$J_y = 2mzv_x - 2mxv_z = 2mzv_x$$

$$J_z = 2mxv_y - 2myv_x = 2mr^2\omega$$

x、y轴受力矩作用。轴承提供约束反力。动平衡。

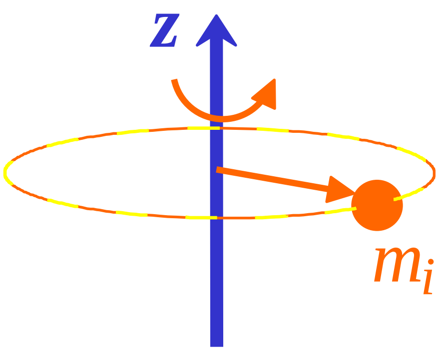
五. 转动动能

定轴转动动能

$$E_k = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i r_i^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

系统动能变化 $E_{k2}-E_{k1}=A_{in}+A_{ex}$

其中对于刚体内力作功和为零 $A_{in}=0$



外力作功

$$dA_{ex}=\sum F_{i\tau}r_i d\varphi=(\sum F_{i\tau}r_i)d\varphi=M_{ex}d\varphi$$

所以

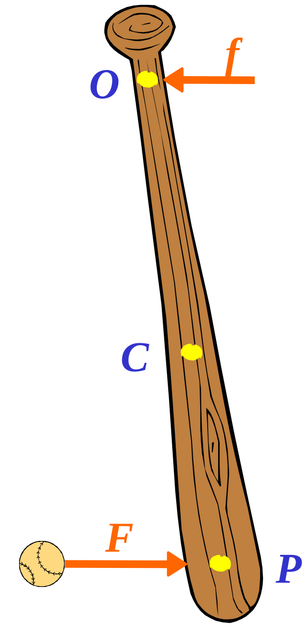
$$\boxed{E_{k2}-E_{k1}=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}M_{ex}\cdot d\varphi}$$

若仅保守力作功，仍有机械能守恒，E_k+E_p=const.。

在定轴转动的基本方程（角动量定理）中，没有涉及轴上约束力的问题，因为轴上的力对定轴的力矩为零。

若要得到约束力，必须利用全套方程式，即动量定理（质心运动定理）。

例：刚体可绕**O**点的轴转动，水平力***F***击打***P***点， ***OP=l***。为保持**O**点稳定，该对**O**点施加多大的力？



解：对于**O**点的转动方程

$$F\cdot l = I\cdot\ddot{\varphi}$$

为直观计，设 $I = mk^2$ 。***k***是刚体对于**O**轴的回转半径。上式写为 $F\cdot l = mk^2\ddot{\varphi}$

若**O**点静止，则质心***C***的加速度是 $r_C\ddot{\varphi}$，质心运动方程

$$F - f = mr_C\ddot{\varphi}$$ （r_C是质心至支点的距离）

解得

$$f = F(1 - \frac{r_C\cdot l}{k^2})$$

当作用距离 $l = \dfrac{k^2}{r_C}$ 时， ***f=0***。该点称为打击中心。

§6.3 刚体的平面平行运动

一． 运动学

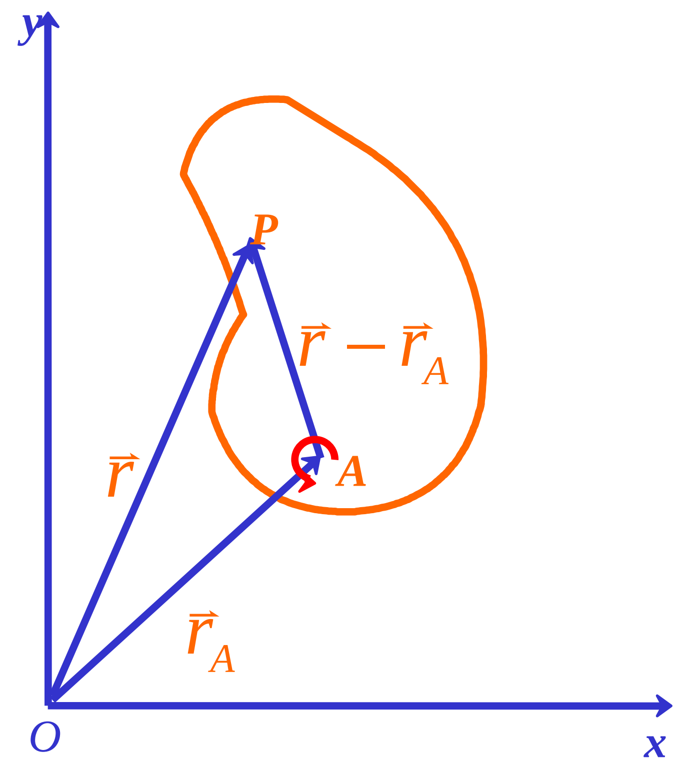
刚体内各点的运动轨迹平行于一固定平面，取平行于平面的剖面为代表。两个平动自由度和一个转动自由度，转轴始终垂直于平面。

刚体内各点的运动情况。首先选择一基点***A***，其速度 $\vec{v}_A$（与基点有关），同时刚体绕过***A***点垂直剖面轴以与基点无关的 $\vec{\omega}$ 旋转。则剖面上任意***P***点的速度为

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_A)$$

该点的加速度

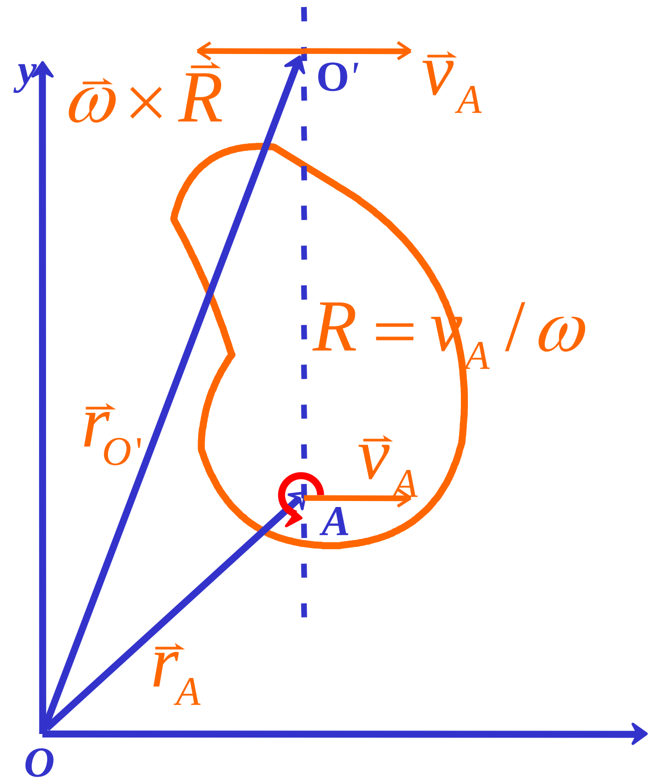
$$\vec{a} = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{r} - \vec{r}_A) - \omega^2 (\vec{r} - \vec{r}_A)$$



瞬时转动中心：任一时刻，刚体(内)存在一点O'，其速度 $\vec{v}_{O'}=0$。整个刚体绕过O'点垂直于剖面的轴作纯转动。

过基点A引垂直于$\vec{v}_A$的直线，必有O'点，$\boxed{\omega R=v_A}$，且方向相反。O'点即时速度为零。

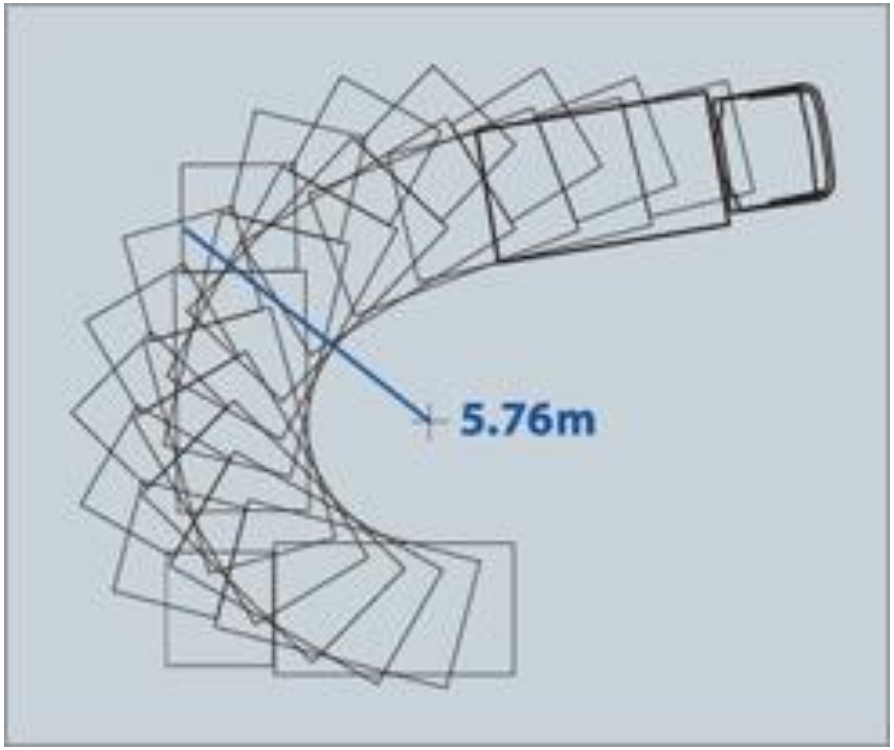
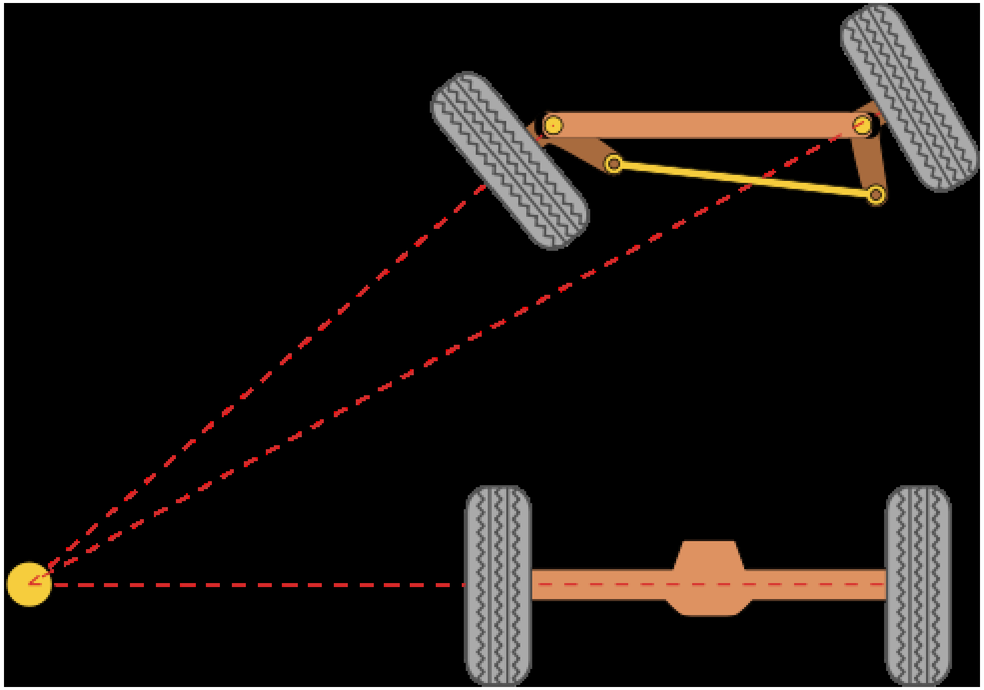
$$\vec{r}_{O'}=\vec{r}_A+\frac{1}{\omega^2}\vec{\omega}\times\vec{v}_A$$



这时O'点是瞬时转动中心。过O'点垂直于运动平面的直线上各点速度同为零，为瞬时转动轴。

刚体上任意两点速度的垂线交点是瞬心。

纯滚动的轮子，其瞬时中心是接地点。每个时刻车轮绕接地点转动，这时轮心速度$\boxed{v_C=R\omega}$。


5.76m


二、动力学方程

问题涉及平动自由度，需动量定理。对一般的基点***A***牵涉到刚体内力。而对于质心，合外力

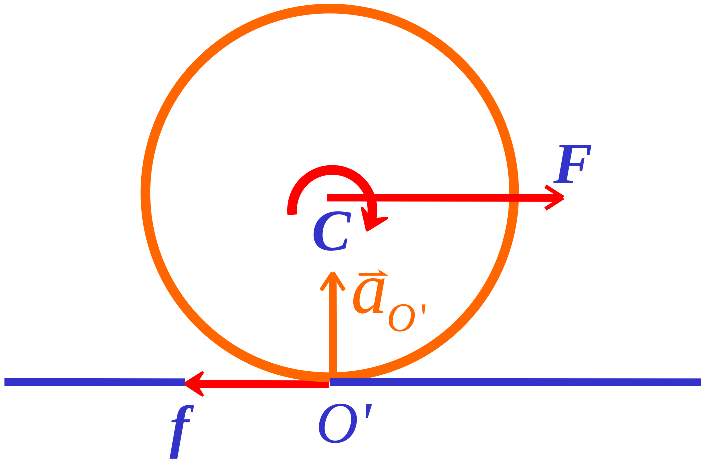
$$\boxed{\vec{F}=\frac{d\vec{P}_C}{dt}=m\frac{d\vec{v}_C}{dt}}\qquad \begin{cases} F_x=m\ddot{x}_C \\ F_y=m\ddot{y}_C \end{cases}$$

对于转动，取垂直平面的任一直线***z***为转轴，有

$$\boxed{M_z=\dot{J}_z,\quad M_z=I\dot{\omega}}$$ （后者对刚体上的轴）

若该点（轴）有加速度，须计入惯性力矩。一般可以取惯性系或质心系（轴）。

对瞬轴的角动量定理也可选择，需注意$\vec{a}_{O'}\neq 0$，计入惯性力矩。但在纯滚动下，往往惯性力通过***O'***点，其力矩为零。



三. 动能定理

刚体的总动能，由柯尼希定理 $E_k = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$

相对于质心平动，由质心运动方程

$$A_1 = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}_C = \int_1^2 m \frac{d\vec{v}_C}{dt} \cdot d\vec{r}_C = \int_1^2 m\vec{v}_C \cdot d\vec{v}_C = \Delta(\frac{1}{2} m v_C^2)$$

相对转动能的改变，由前述定轴转动

$$A_2 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z \cdot d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} I_C \frac{d\omega}{dt} \cdot d\varphi = \Delta(\frac{1}{2} I_C \omega^2)$$

总动能定理

$$\boxed{A = A_1 + A_2 = \Delta(\frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2)}$$

仅保守力作功下，机械能守恒

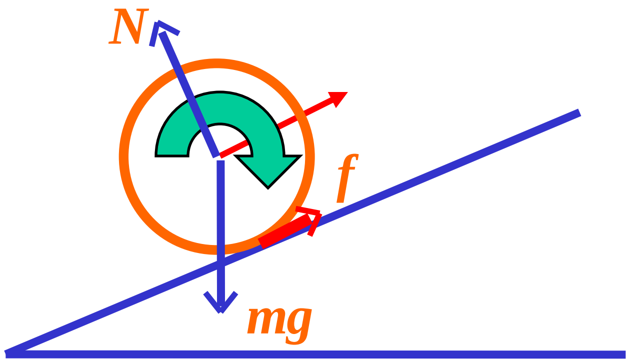
$$\boxed{\frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 + U = const.}$$

四. 滚动中的摩擦力

当刚体既滚且滑时，只要考虑接触处的滑动摩擦，问题比较简单。

纯滚动下，接触点可能存在静摩擦，需对滑动趋势作具体分析。

一般当刚体在质心运动方向受净力作用时，有静摩擦力存在。



沿斜面向上（下）纯滚的车轮。由于重力分力，v_C将减小（增大），若$R\omega$不变，接触点将下滑，为此静摩擦力f向上，使ω也减小（增大）。

当车轮在平面作自由纯滚时，没有滑动趋势，不受静摩擦力作用。

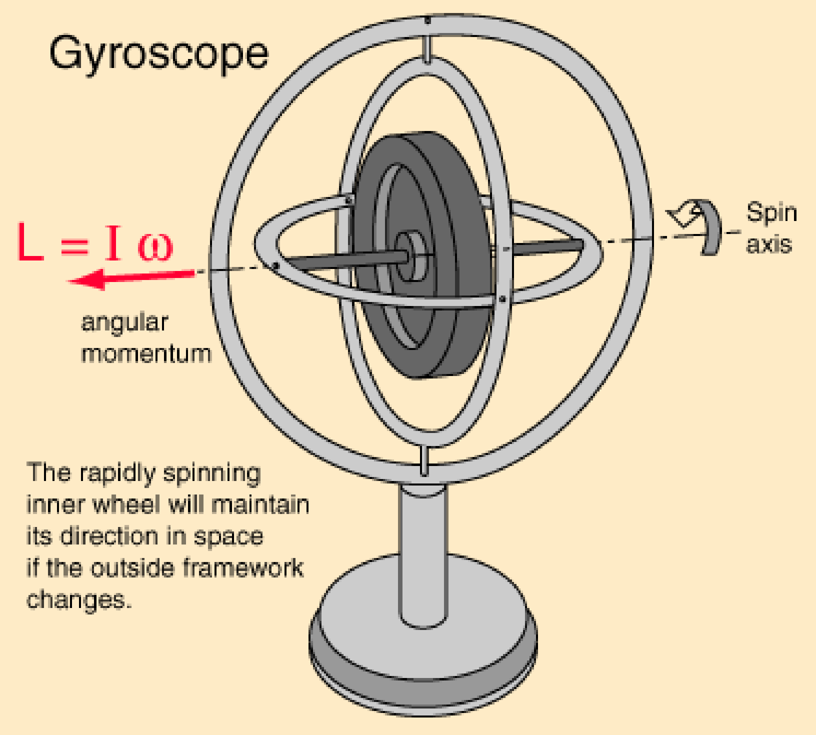
静摩擦力作功为零。但要注意参考系。

§6.4 刚体的定点运动简析

一．不受外力矩的定点运动

定点运动指运动过程中刚体某点始终保持“静止”。有三个转动自由度。

陀螺仪是常见例子，一般指绕轴对称轴以大角动量转动。

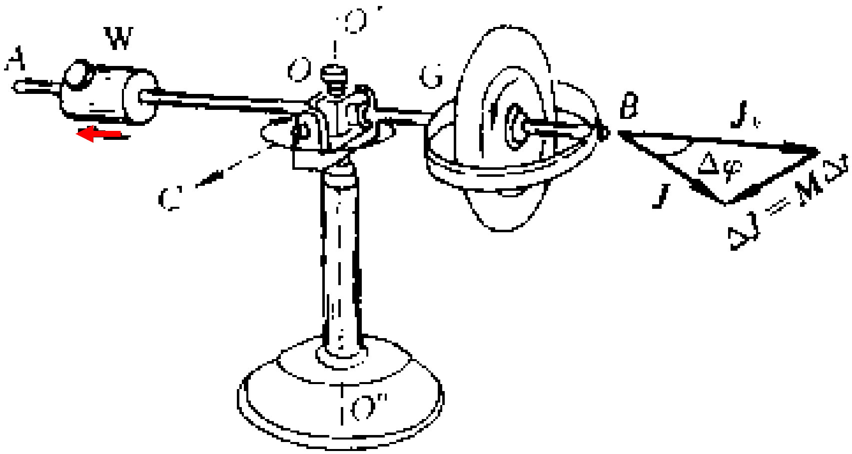


常平架由内外两个圆环构成，可分别绕轴自由转动。陀螺仪的轴装在内环上。三轴两两垂直，并通过陀螺仪重心。这样陀螺仪不受重力的力矩作用，且能在空间任意取向。

陀螺仪不受外力矩时角动量守恒，因而转动轴线方向不变。用于方向导航的基本原理。

二. 外力矩作用——陀螺的进动（回转效应）

将陀螺支于地面一定点。陀螺高速旋转时，重力作用下在水平面内绕竖直轴旋转。



陀螺自转轴的这种转动，称为进动。在外力矩作用下产生进动的效应，称回转效应。

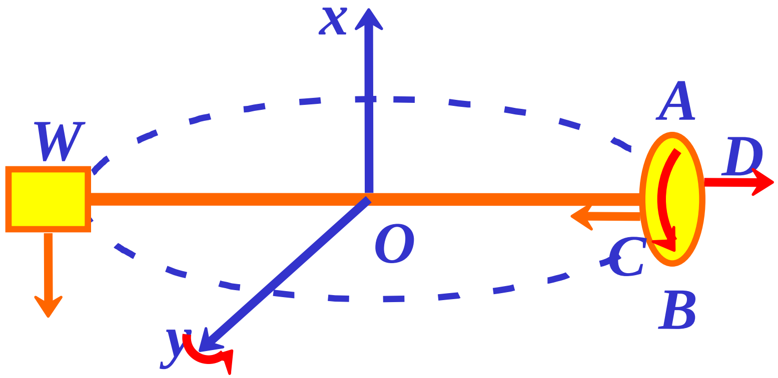
重力矩 $\vec{M}$ 引起角动量 $\vec{J}_0$ 沿 $\vec{M}$ 方向的变化。在 $\Delta t \to 0$ 时间内有

$$\Delta J = J_0 \cdot \Delta\varphi$$

由角动量定理 $$M = \frac{\Delta J}{\Delta t} = J_0 \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = J_0 \Omega$$

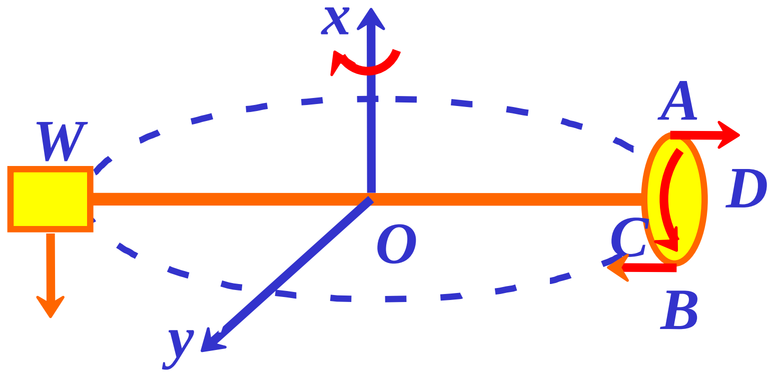
计及方向 $$\boxed{\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{J}_0}$$

配重*W*外移，确引起陀螺仪上翘。在绕*y'*转动的参考系中，惯离力的力矩为零。考虑科力，有一个合力矩沿-*x'*。所以绕该方向（顺时针）进动。



倾侧 ⟹ 回转力矩1 ⟹ 进动

进动发生后，取随进动的转动参考系。科力矩沿-*y''*轴，可以和重力矩平衡。抵消倾倒。



进动 ⟹ 回转力矩2 ⟹ 阻止倾倒

回转仪的回转速度应足够快，否则无法阻止倾倒发生。

三. 章动

回转仪在外力矩作用下发生进动，这是一种稳定情况。实际上在外力矩刚施加上去的时候，回转轴除了水平面进动外，同时上下交替下倾和上升，称为章动。

扰动刚施加时，回转轴上升，而进动角速度不够大，回转力矩2小于重力矩，继续上升；随着进动角速度增加，回转力矩2超过重力矩，回转轴上升减慢并开始下降。同时进动角速度减小，回转力矩2减小，回转轴下降加速度减小；至与重力矩相消，由于惯性，继续下降，但重力矩反超，下降速率变慢，至最低点又开始上升。

在有摩擦的情况下，章动首先被衰减，剩余进动。