第七章　振动

§7.1 简谐振动　熟练掌握一维简谐振动的动力学方程及周期、频率、圆频率、相位、初位相的概念；了解简谐振动的矢量表示和复数表示。

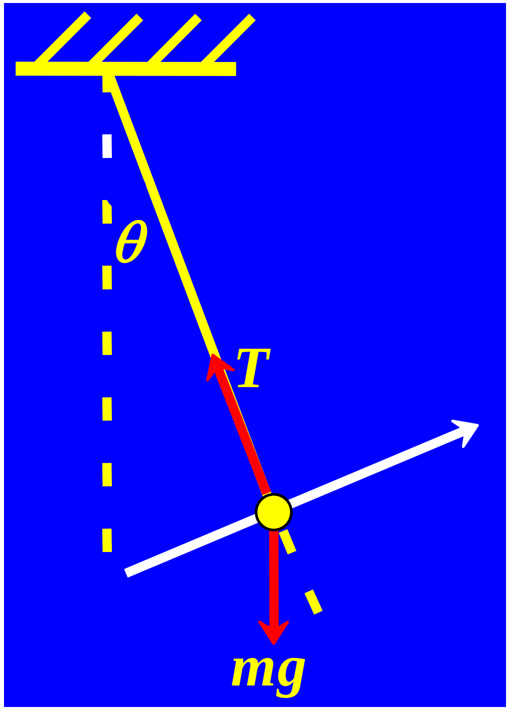
§7.2 阻尼振动　了解阻尼振动的动力学方程及欠阻尼、过阻尼和临界阻尼三种运动状态 。

§7.3 受迫阻尼振动　了解受迫阻尼振动的稳定态和共振的概念，了解品质因数的意义。

§7.4 谐振动的合成　掌握同方向、同频率简谐振动的合成；同方向、不同频率的简谐振动的合成；互相垂直简谐振动的合成。

§7.1 简谐振动

一. 小幅单摆



将单摆小幅度地拉离平衡位置。

取自然坐标系。考虑切向运动

$$m \cdot a_t = -mg\sin\theta$$

其中 $$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} = l\ddot{\theta}$$

切向动力学方程 $l\ddot{\theta} = -g\sin\theta$

当 $\theta \to 0$ 时，$\sin\theta \approx \theta$，有 $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

这种形式的方程称为谐振方程，常写为

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$$

其中 $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ，固有频率，由系统本身决定。

谐振方程的两个特解是 $\cos\omega_0 t$ 和 $\sin\omega_0 t$ 。二阶常微分方程的通解是两个特解的线性组合

$$\theta_{(t)} = A_1\cos\omega_0 t + A_2\sin\omega_0 t = A\cos(\omega_0 t+\varphi_0) \qquad (1)$$

其中两个参量 A，φ_0 由初始条件给出。

若 $t=0$ 时，$\theta=\theta_0,\ \dot{\theta}=0$ ，代入（1），得到

$$A=\theta_0,\ \varphi_0=0, \quad \therefore \quad \theta_{(t)}=\theta_0\cos(\omega_0 t)$$

若 $t=0$ 时，$\theta=0,\ \dot{\theta}=a$ ，代入（1），得到

$$A=\frac{a}{\omega_0},\ \varphi_0=\frac{3\pi}{2}, \quad \therefore \quad \theta_{(t)}=\frac{a}{\omega_0}\cos(\omega_0 t+\frac{3\pi}{2})$$

对一个弹簧振子，可以写出相似的方程 $\ddot{x}+\dfrac{k}{m}x=0$

其解 $x=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0),\ \omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

二. 简谐振动的描述

某物理量 $a_{(t)}=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$ ，随时间简谐变化，三特征量（要素）全面描述其状态。

1^o 频率和周期：

频率ω_0表示变化的快慢。周期T是完成一次振动的时间，

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}$$

2^o 振幅：

振幅A表示变化的幅度。振动能量。

3^o 位相和初位相：

$\omega_0 t+\varphi_0$ 决定瞬时状态和变化趋势的特征量。位相差反映两个量之间的关系。 φ_0叫初位相，在同频情形更重要。

三. 谐振的能量

单摆为例。动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$

势能 $$E_p = mg(l - l\cos\theta) = mgl \cdot 2 \cdot \sin^2(\frac{\theta}{2})$$

$$= \frac{1}{2}mgl \cdot \theta^2, \quad (\theta \to 0)$$

所以，总机械能

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}ml^2 \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl \cdot \theta^2$$

$$= \frac{1}{2}ml^2 A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2}mglA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$= \frac{1}{2}mglA^2$$ 守恒。等于摆至最高点的重力势能。

同样可以得到，弹簧振子的机械能 $E=\frac{1}{2}kA^2$

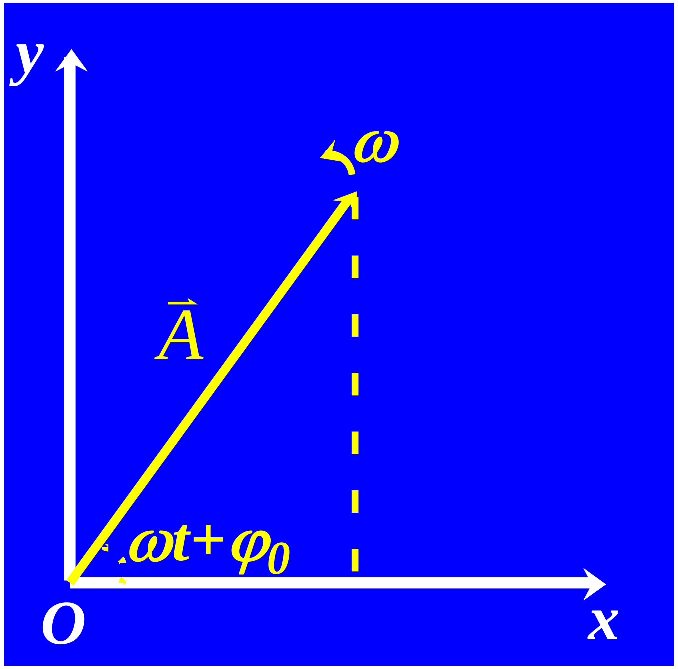
动能和势能的平均值是总能量之半。

$$<E_k>=\frac{1}{T}\int_0^T E_k dt=\frac{1}{2}E,\ <E_p>=\frac{1}{T}\int_0^T E_p dt=\frac{1}{2}E,$$

四. 谐振的其它表示

1^o 旋转矢量法

简谐量 $a_{(t)}=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$ 可以用平面极坐标中的一个旋转矢量 $\vec{A}$ 表示。其长度等于振幅，与极轴的夹角等于位相。其极轴方向投影是简谐量的瞬时值。



2^o 复数法

对于复杂运算，更常用的是复数法。

复数 $\tilde{A} = a + bj = Ae^{j\theta}$，其复指数形式中模和幅角，对应复平面中矢量 $\vec{A}$ 的长度和夹角。

当 $\theta = \omega_0 t + \varphi_0$ 时，以上成为旋转矢量和复简谐

$$\tilde{A} = Ae^{j(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

其模和幅角对应于振幅和位相，其实部是瞬时值。

$$\mathrm{Re}(\tilde{A}) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

另外也常将振幅和初位相合写为复振幅形式 $\tilde{A}_0 = Ae^{j\varphi_0}$。其中包含了简谐量中主要的两个要素。

§7.2 阻尼振动

实际的振动系统存在阻尼，耗散能量，例如油中的振子系统。

低速下，阻尼力 $f=-h\dot{x}$ ，动力学方程为

$m\ddot{x}+h\dot{x}+kx=0$ 写为 $\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2 x=0$

其中 $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 固有频率，$\beta=\dfrac{h}{2m}$ 阻尼因子。

将试探解 $x=\tilde{A}e^{j\alpha t}$ 代入方程，得

$$\tilde{A}e^{j\alpha t}(-\alpha^2+2j\alpha\beta+\omega_0^2)=0$$

$\tilde{A}e^{j\alpha t}$ 有非零解的充要条件是 $-\alpha^2+2j\alpha\beta+\omega_0^2=0$

得到 $\alpha=j\beta\pm\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$

对 ω_0 与 β 的三种关系，出现三种实际情况。

一. $\omega_0>\beta$，欠阻尼

$$\alpha = j\beta \pm \omega,\ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

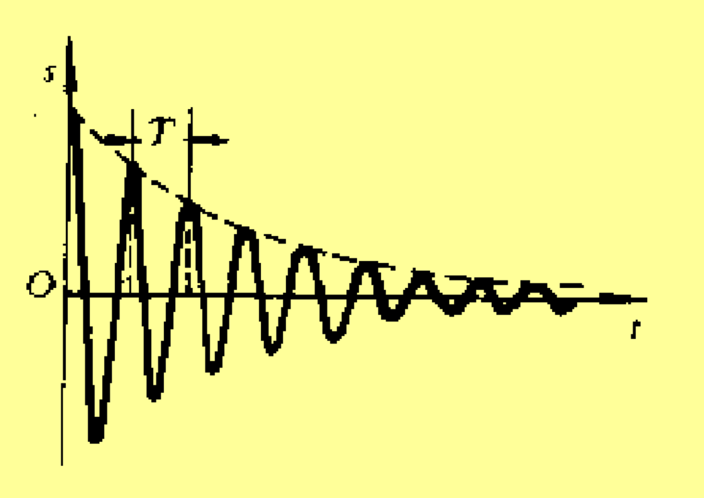
通解是以上两解的线性组合

$$x_{(t)} = e^{-\beta t}(\tilde{A}_1 e^{j\omega t} + \tilde{A}_2 e^{-j\omega t})$$

实际的物理解应是实数解。上式中$\tilde{A}_1$、$\tilde{A}_2$满足复共轭

$\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2^* = \dfrac{A}{2} e^{j\varphi}$ 时，

$$x_{(t)} = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$



是方程的物理解。A和φ由初始条件决定。

振幅按 $Ae^{-\beta t}$ 衰减，经无穷长时间衰减为零。

二. $\omega_0<\beta$，过阻尼

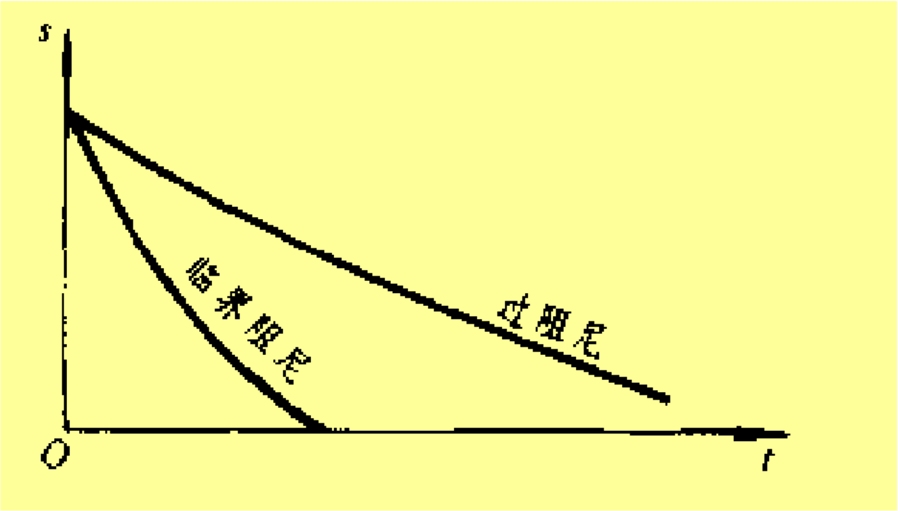
若阻尼很大，有 $\alpha = j\beta \pm j\beta_r$，$\beta_r = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

$$x_{(t)} = A_1 e^{-(\beta+\beta_r)t} + A_2 e^{-(\beta-\beta_r)t}$$

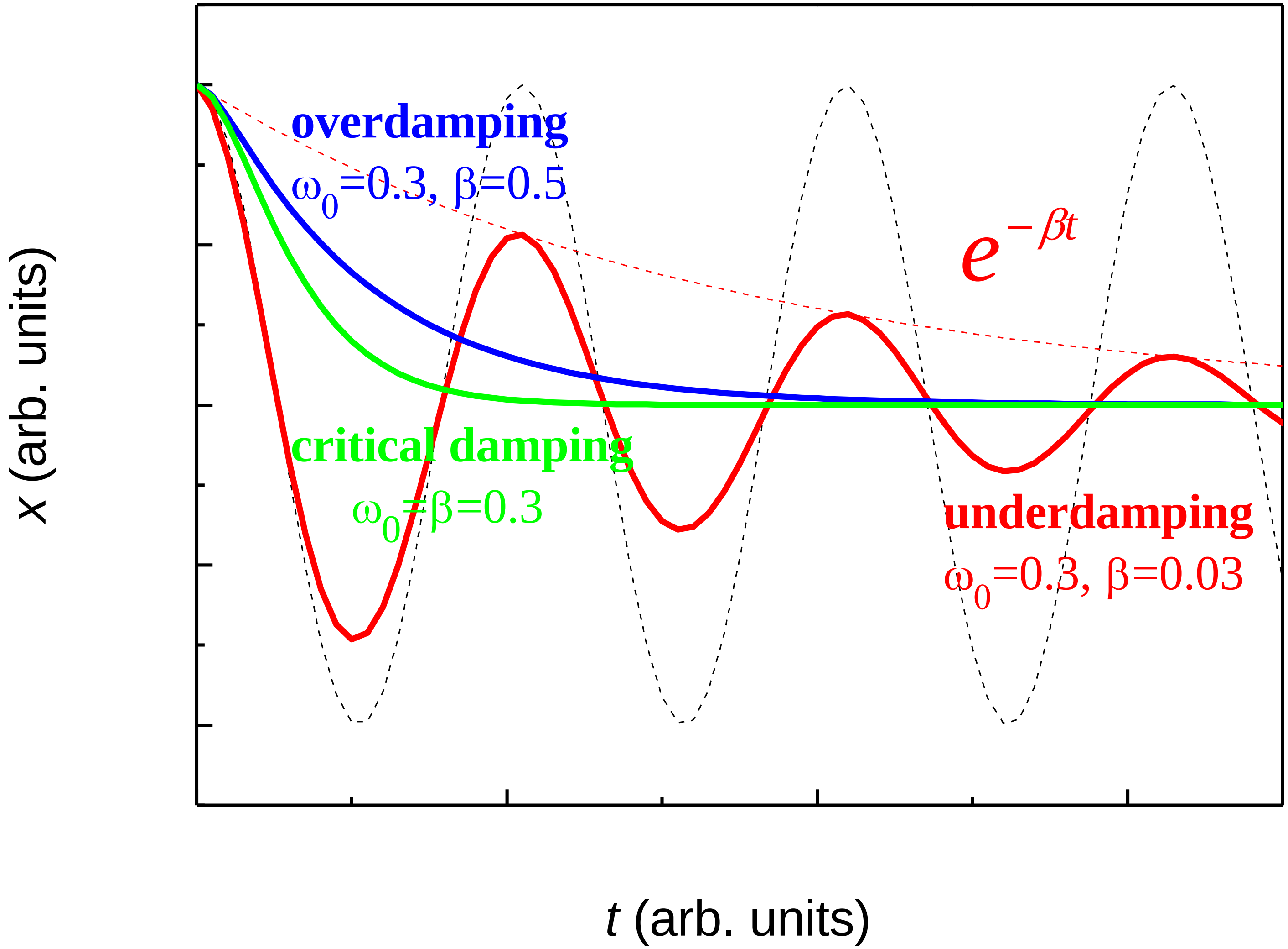
偏离平衡位置的距离按指数衰减，无法完成一次振动。

三. $\omega_0=\beta$，临界阻尼

情况介于上述两者之间，与过阻尼相似，但阻尼较小，将在较短的时间内趋向平衡点。



Damped free oscillation



§7.3 受迫阻尼振动

以上讨论的是自由振动。若振动中受外力作用，并外力作功，称受迫振动。若外力是恒定的，则影响不大，只是平衡位置改变。

考虑随时间周期性变化的策动力 $F_0\cos(\omega t+\varphi_0)$。一般地，系统存在自由振动和受迫振动的叠加。

若系统存在阻尼。暂态过程：自由振动能量耗散，被衰减；受迫振动由外力补充能量趋于稳定。稳态：仅剩与外力同频的简谐受迫振动。以下考虑稳态响应。

一. 稳态响应

动力学方程 $m\ddot{x}+h\dot{x}+kx=F_0\cos(\omega t+\varphi_0)$

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos(\omega t+\varphi_0)$$

物理上稳态解是同频振荡，因此方程两边是同频简谐量。

方程两边分别是复简谐的实部。同频复简谐相等的充要条件是其实部相等。方程变为复简谐方程

$$\ddot{\tilde{x}}+2\beta\dot{\tilde{x}}+\omega_0^2\tilde{x}=\frac{\tilde{F}}{m}$$

策动力的复数形式 $\tilde{F}=F_0e^{j(\omega t+\varphi_0)}=F_0e^{j\varphi_0}e^{j\omega t}=\tilde{F}_0e^{j\omega t}$

及位移的复数形式 $\tilde{x}=Ae^{j(\omega t+\varphi)}=\tilde{A}e^{j\omega t}$，代入上式，得到

$$(-\omega^2+2j\beta\omega+\omega_0^2)\tilde{A}e^{j\omega t}=\frac{\tilde{F}_0}{m}e^{j\omega t}$$

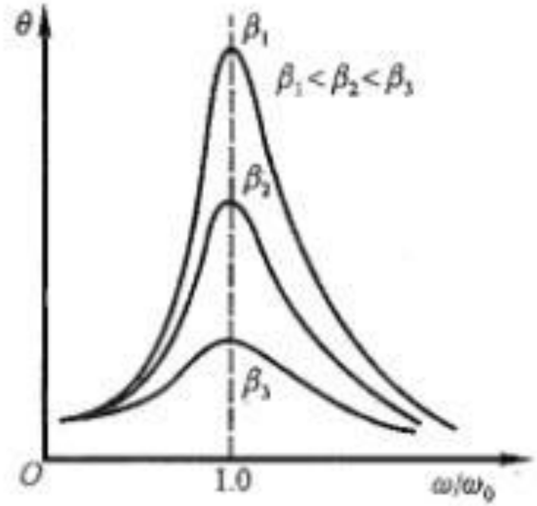
解得

$$\tilde{A}=\frac{\tilde{F}_0}{(-\omega^2+2j\beta\omega+\omega_0^2)m}=\frac{F_0}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2]^{1/2}m}e^{j(\varphi_0+\varphi)}$$

$$A=\frac{F_0}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2]^{1/2}m},\quad \varphi=tg^{-1}(-\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2})$$

所以，稳态受迫振动 $x_{(t)} = A\cos(\omega t + \varphi_0 + \varphi)$

二. 共振与带宽

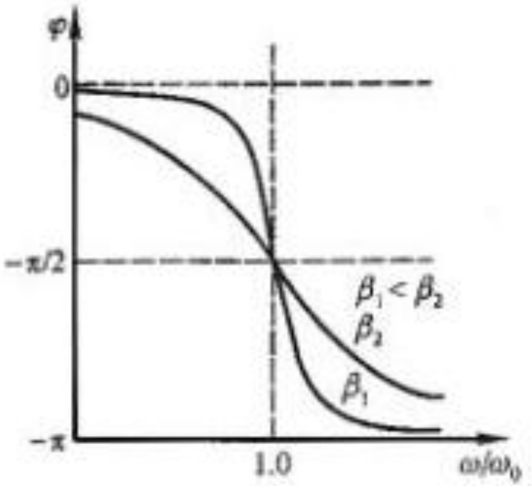


考虑振幅、位相随频率变化。

在 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ 时，振幅极大

$$A_{max} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

共振宽度 $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$



由 $$A^2\Big|_{\omega_1,\omega_2} = \frac{1}{2}A_{max}^2$$

计算可得 $\Delta\omega = 2\beta$

阻尼越小，频宽越窄。

三. 能量关系和品质因数

稳态情形下，系统动能和势能分别是（取φ_0=0）

$$\begin{cases} E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi), \\ E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\cos^2(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

（机械能不守恒）

考虑系统平均能量

$$<E>=<E_k>+<E_p>=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}E_k dt+\frac{1}{T}\int_t^{t+T}E_p dt$$

$$=\frac{1}{4}mA^2\omega^2+\frac{1}{4}mA^2\omega_0^2=\frac{1}{4}mA^2(\omega^2+\omega_0^2)$$

可以看到在一个周期内，策动力作功与阻力作功抵消。

策动力功率 $P_{(t)} = F \cdot \dot{x} = -F_0 \cos(\omega t) A\omega \sin(\omega t + \varphi)$

阻力功率 $P_{f\,(t)} = -2m\beta\dot{x} \cdot \dot{x} = -2m\beta A^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$

平均功率

$$< P > = -\frac{1}{2} F_0 A\omega \sin\varphi, \quad < P_f > = -m\beta A^2\omega^2$$

将A、φ代入，可以得到 $< P > + < P_f > = 0$

品质因数

$$Q = 2\pi \frac{< E >}{< P > \cdot T} = \omega \frac{mA^2(\omega^2 + \omega_0^2)}{4m\beta A^2\omega^2} = \frac{(\omega^2 + \omega_0^2)}{4\beta\omega}$$

表示效率。共振下，

$$\omega \approx \omega_0 \quad \Longrightarrow \quad Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$$

相对频宽

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\beta}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

（频率选择性）

§7.4 谐振动的合成

一. 同方向，同频率

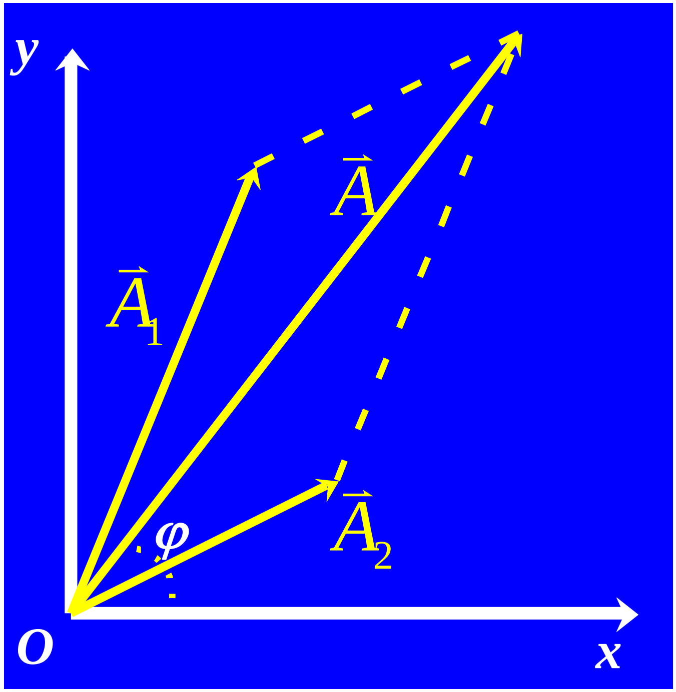
设质点同时参加两个振动，

$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1),\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

则合成是同频简谐振动 $x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t+\varphi)$

其中的A，φ可以通过三角运算获得。

用矢量法合成方便而直观。



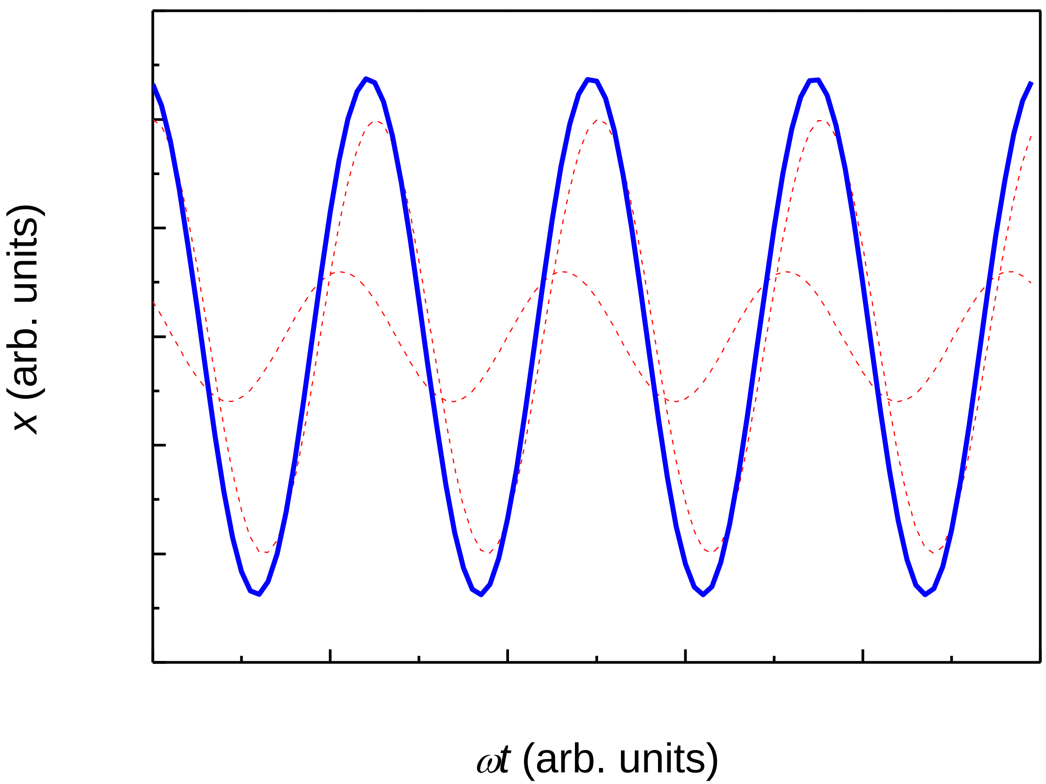
由几何关系得到

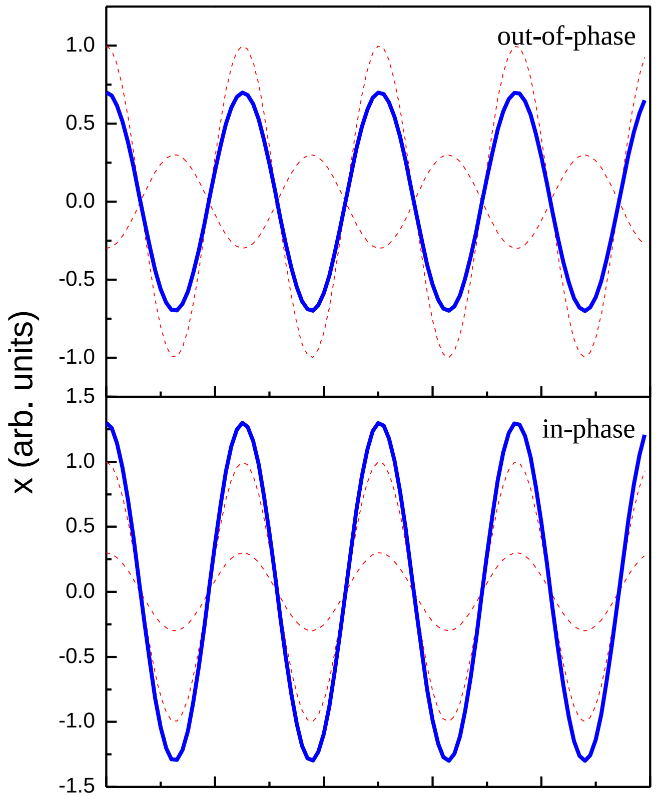
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)},$$

$$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}\right)$$

Composition of oscillations

parallel directions, same frequencies





二. 同方向，异频率

设 $x_1 = A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$, $x_2 = A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$

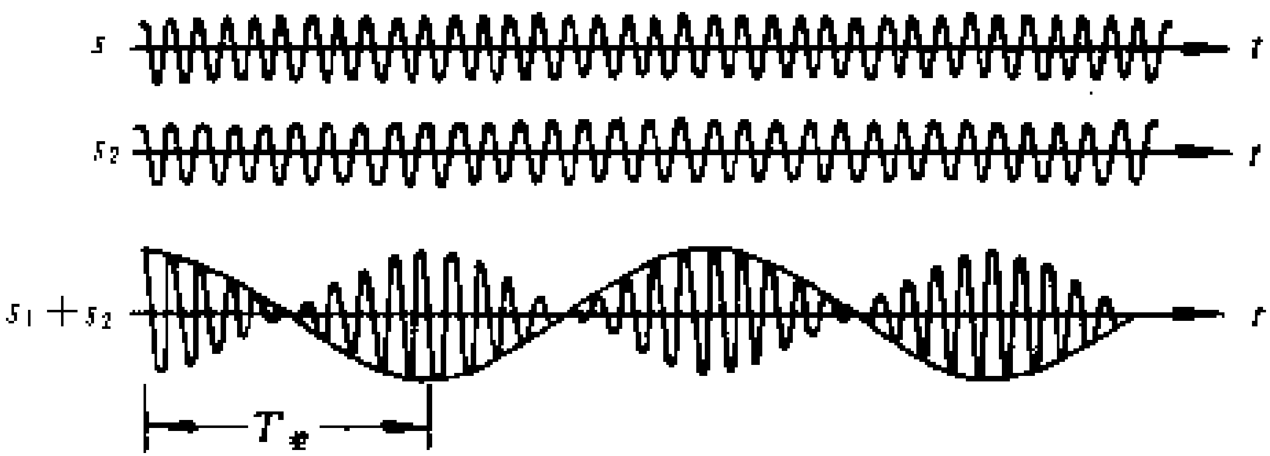
从矢量图看，合成矢量的大小随时间周期性变化，可以看作振幅作周期性改变，称为拍，变化频率称为拍频。

拍频

$$f = \frac{|\omega_1-\omega_2|}{2\pi} = |f_1 - f_2|$$

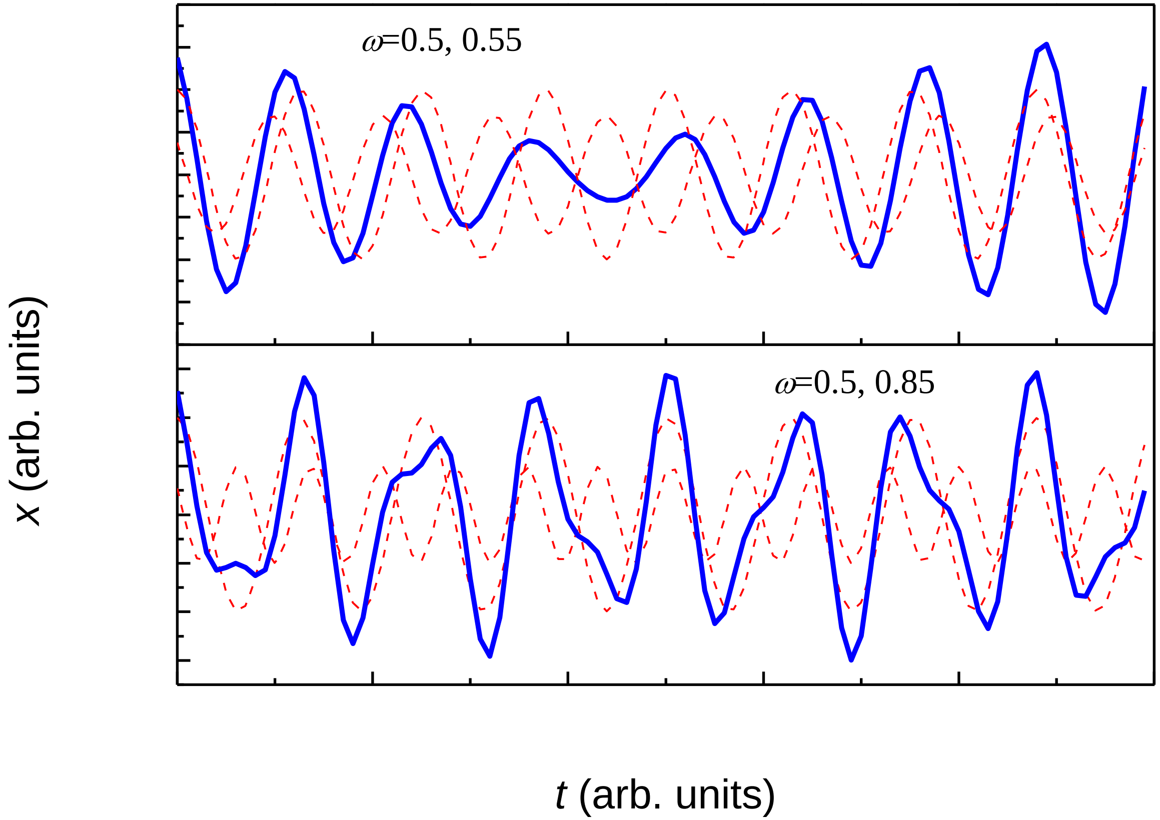
在$A_1 = A_2$的简单情形，通过三角运算

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$$



Composition of oscillations

parallel directions, different frequencies



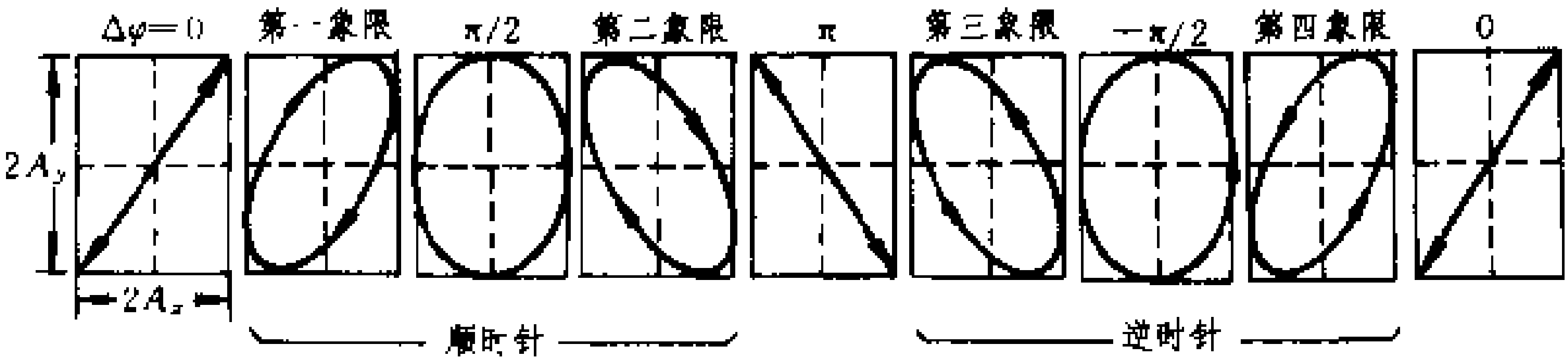
三. 互相垂直简谐振动的合成

设同频率 $x = A_x\cos(\omega t + \varphi_x)$, $y = A_y\cos(\omega t + \varphi_y)$

消去时间，可以得到轨道方程

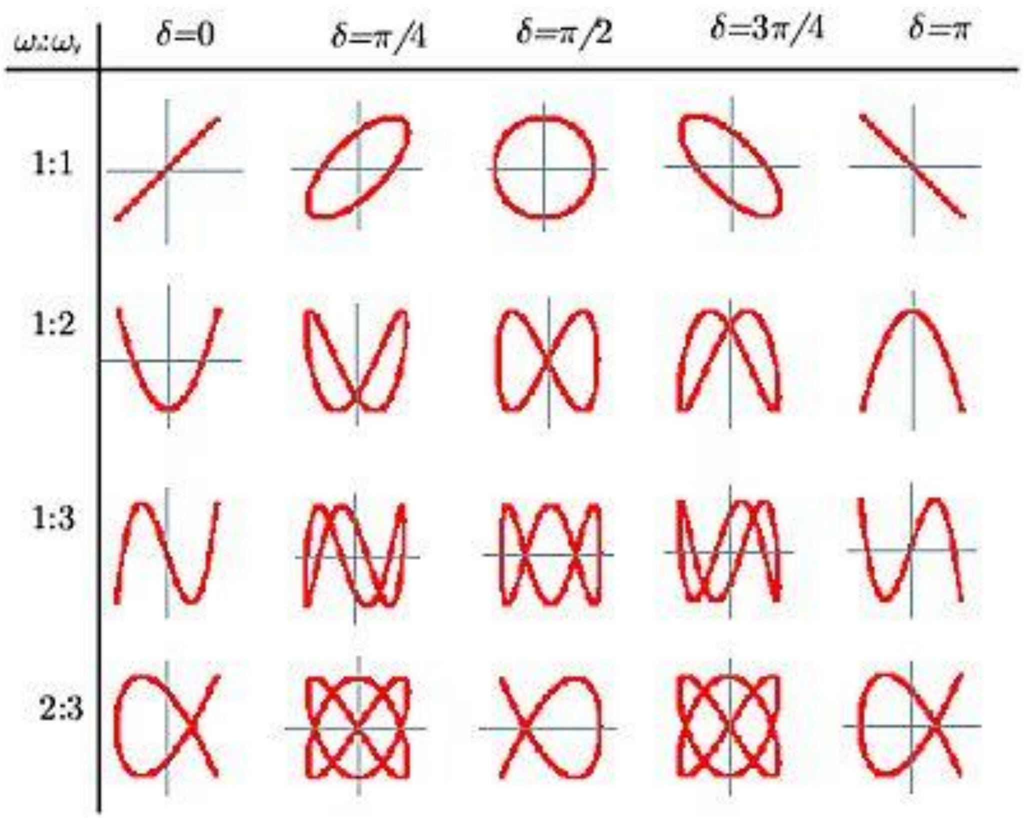
$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2xy}{A_x A_y}\cos(\varphi_x - \varphi_y) = \sin^2(\varphi_x - \varphi_y)$$

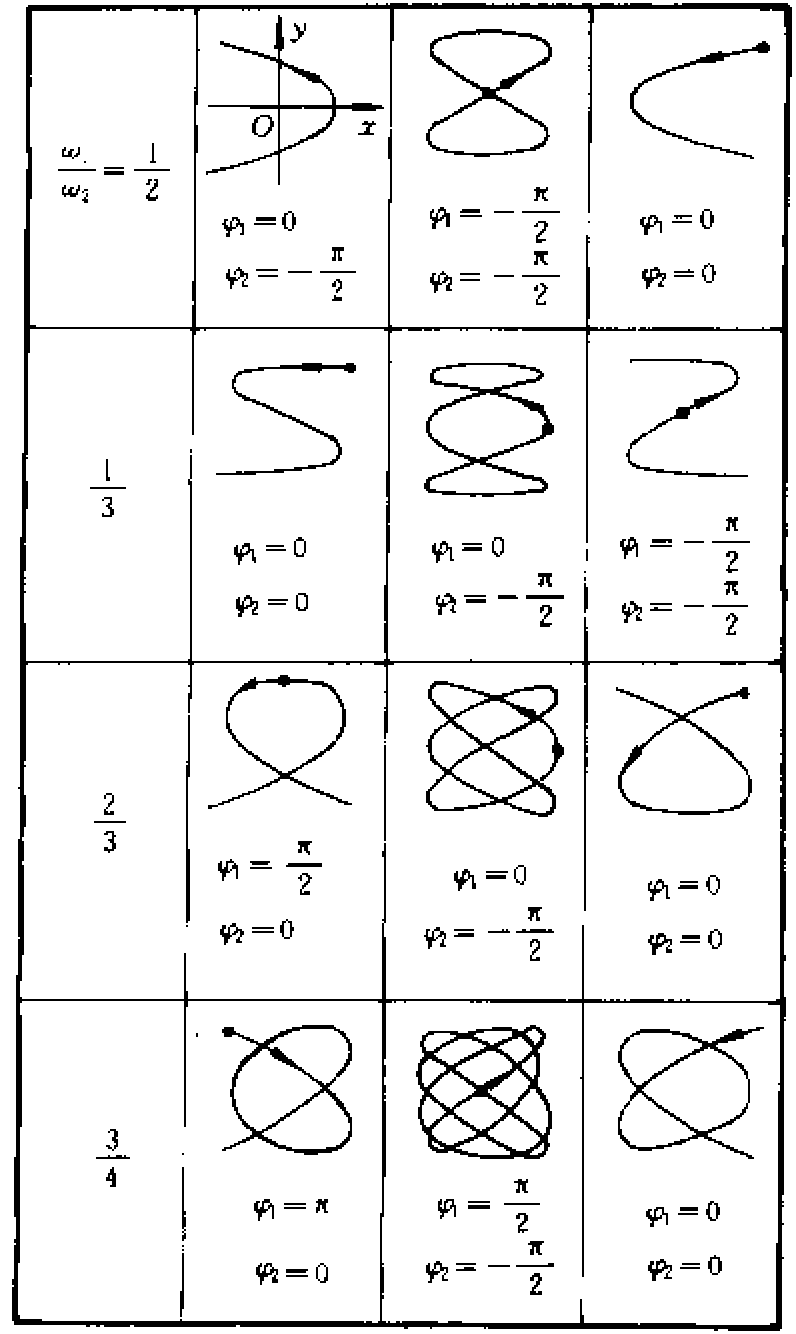
一般情形是椭圆。也可以出现直线、正椭圆和圆。



若频率稍有差别，轨道会按以上顺序动态变化。

若频率有简单的整数比例关系，也可以得到稳定的封闭合成运动轨道。称为李萨如图形。

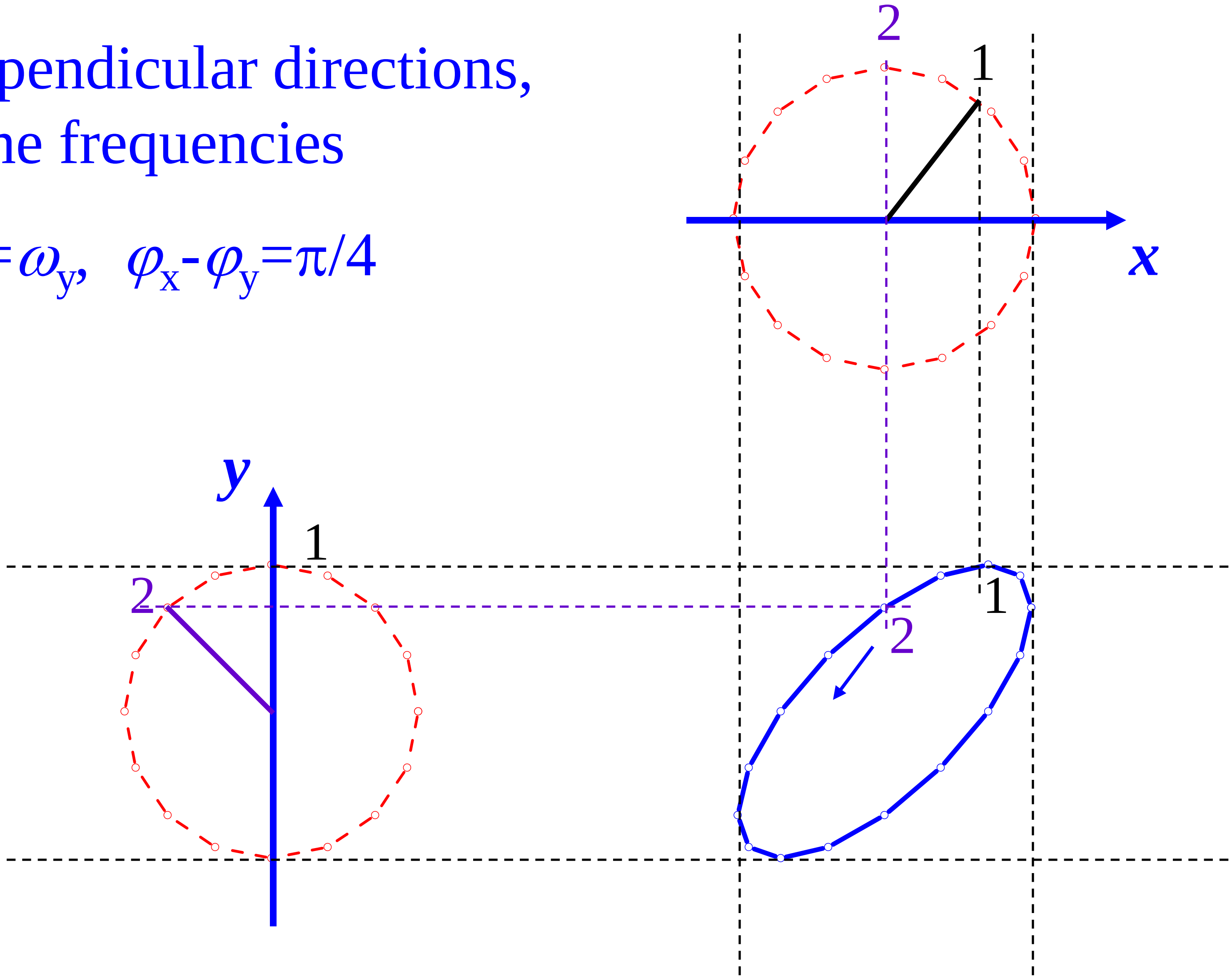




Composition of oscillations

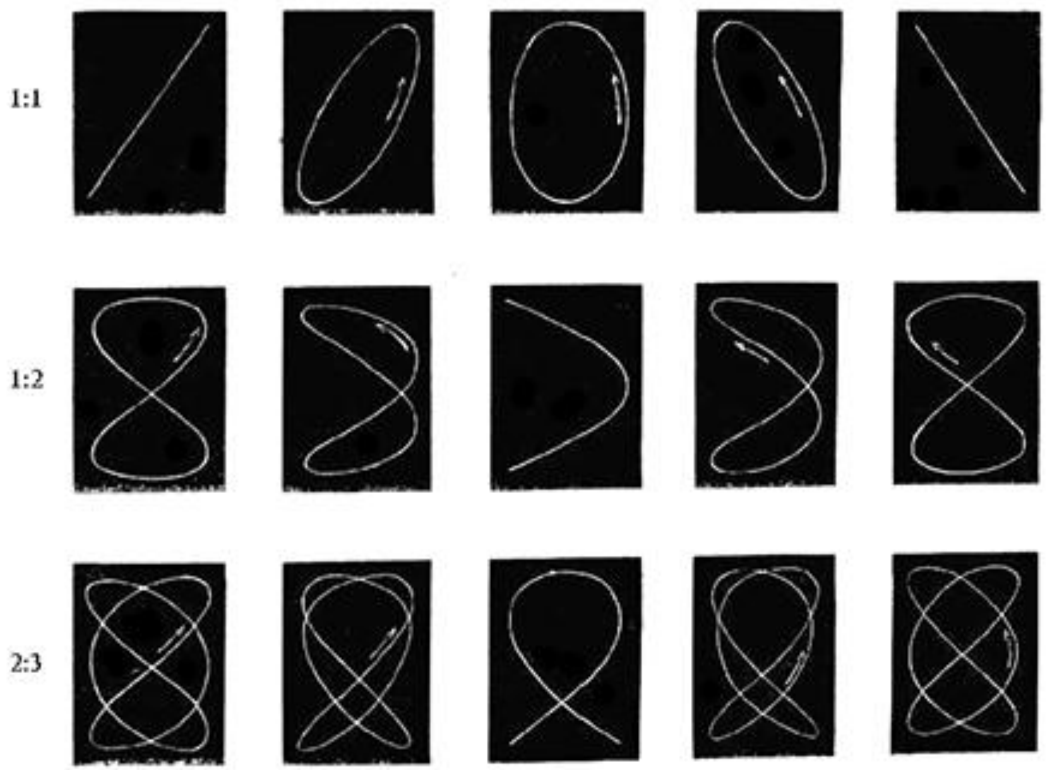
perpendicular directions,
same frequencies

$\omega_x = \omega_y$, $\varphi_x - \varphi_y = \pi/4$



Composition of oscillations

perpendicular directions, different frequencies



Simple Lissajous figures for various frequency ratios, from Koenig's Acoustic Catalogue, 1865.

http://jxzy.ustc.edu.cn/tcpe/read.aspx