第八章　波动

§8.1 基本概念　理解机械波产生的条件及机理。理解波长、波速的概念，掌握周期、频率、波速与波长之间的关系。

§8.2 平面简谐波的运动方程　掌握平面简谐波的解析表示，理解相位随时间和空间的变化。

§8.3 波动方程　掌握建立平面简谐波方程的方法，以及波动方程的物理意义。

§8.4 波动的能量和能流　了解波的能量传播特征；了解波的能量、能流、能流密度等概念。

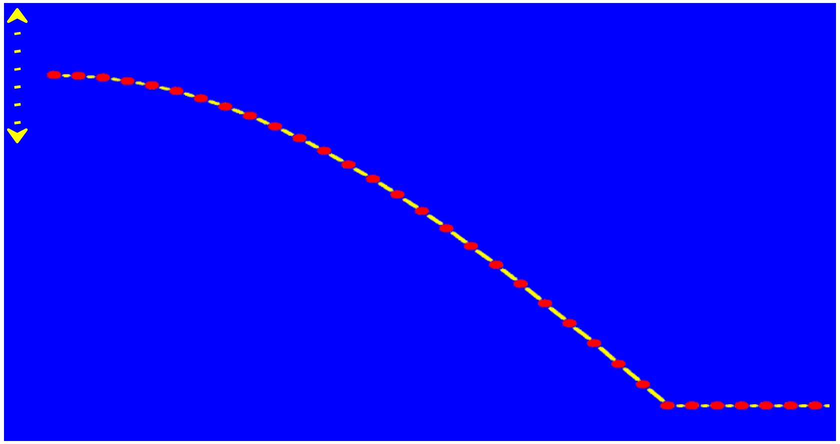
§8.5 波的叠加　理解波的相干条件及相干叠加后振幅加强减弱的相位差及波程差的条件；理解驻波及其形成条件

§8.6 多普勒效应　了解多普勒效应及其产生的原因 。

§8.1 基本概念

一. 机械波的形成

绳上的机械波。



振源，其振动向周围传播，能量输入。

相互作用的媒质，绳中的张力和媒质的质量是波动的内因。

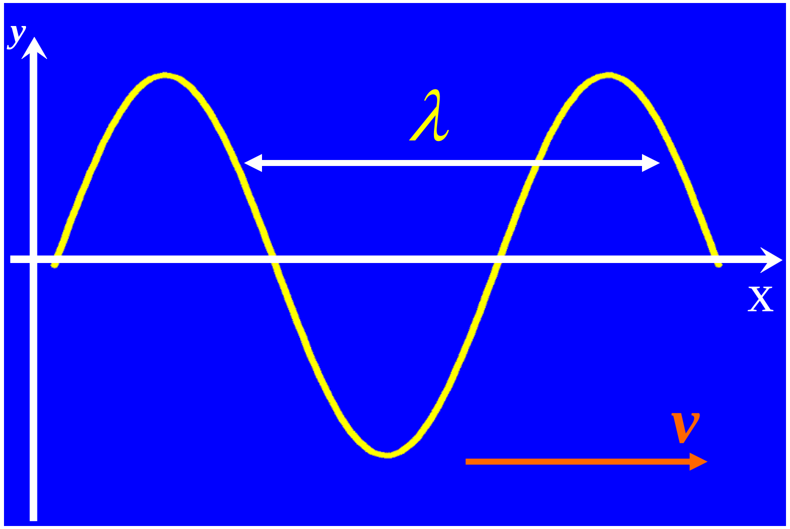
切变：媒质层间发生相对位移。切变弹性。

张变：媒质伸长或压缩的形变。张变弹性。

横波：振动方向与传播方向垂直。源于切变弹性。

纵波：振动方向与传播方向平行。源于张变弹性。

二. 波动的描述



离开振源各点处的振动相位依次落后，振动的传播需要时间。

波长λ：传播方向上两个同相位相邻点的间距。

波速v：相位传播的速度。相速度。

周期T：振动状态传播一个波长的时间。振动周期。

频率f：单位时间内传播波的个数。

$$f = 1/T,\ \lambda = vT,\ v = f\lambda$$

空间波。相位相同的各点构成波阵面。最前面的波阵面称为波前。波线指波的传播方向。

球面波。平面波。

§8.2 平面简谐波的运动方程

波的解析表达。若振源做简谐振动，介质中各质元也作简谐振动，称为简谐波。

用各质元平衡位置坐标x识别各点，各质点偏离平衡位置的位移u表示该点振动状态。

设 $x=0$ 处质点的振动为 $u_{(0,t)}=A\cos(\omega t)$

其它质元也以同频率ω振动。若无吸收，每个质元的振幅也为A。但是各点相位不同，若波沿x轴正向传播，前方各点振动将滞后，滞后时间是振动从原点传至该处的时间。t时刻x处的振动是 $x=0$ 处 $t-x/v$ 时的振动相位。

所以

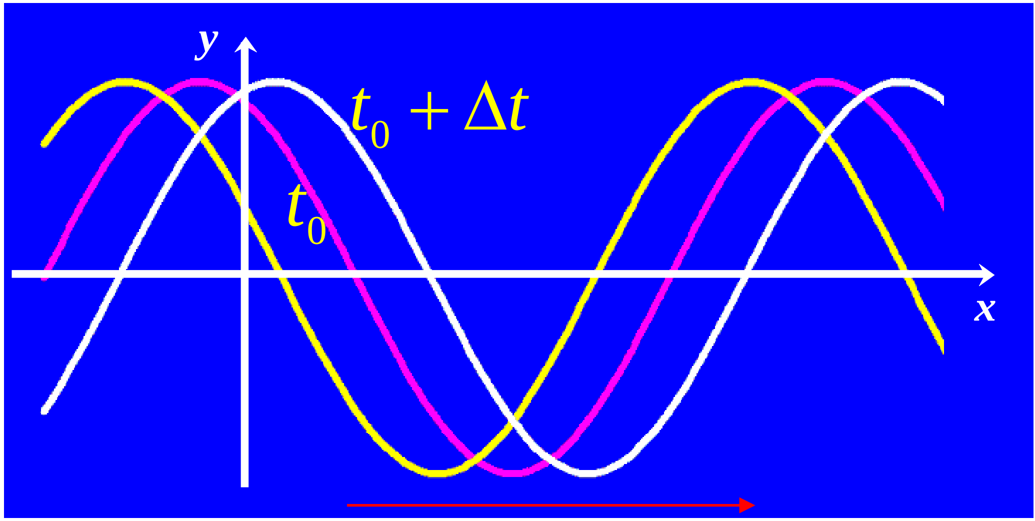
$$u_{(x,t)}=u_{(0,t-\frac{x}{v})}=A\cos\omega(t-\frac{x}{v})$$

是任何位置x在任何时刻t的振动。沿x轴正向传播的波的解析表示。

另外的常用表示是

$$u_{(x,t)} = A\cos(\omega t - \frac{\omega}{v}x) = A\cos(\omega t - kx) = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$$

其中 $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ ，称为波数。单位距离相位的滞后。



若振动沿**x**轴负向传播。**x**处的振动应比原点处超前

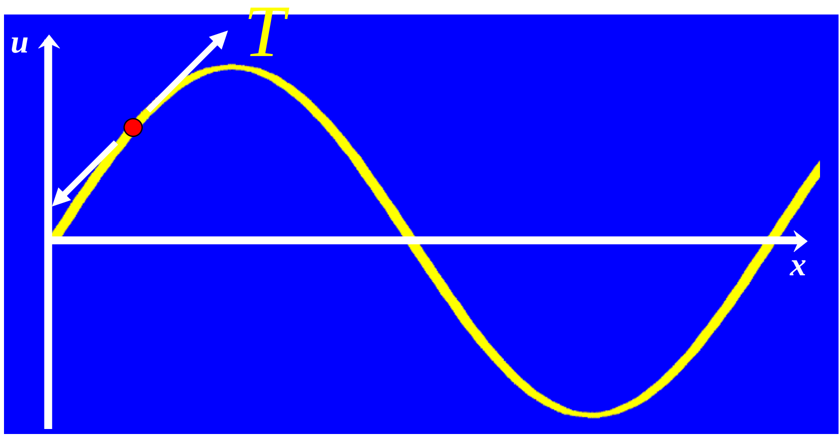
$$u_{(x,t)} = u_{(0,t+\frac{x}{v})} = A\cos\omega(t + \frac{x}{v}) = A\cos(\omega t + kx)$$

v表示相位传播的速度，与各点的运动速度无关。

§8.3 波动方程

动力学方程。以弦上的波为例。

设弦上张力为T。 在x处取线元Δx，其质量



$$\Delta m = \rho_l \cdot \Delta x$$

该质元在u方向运动，其加速度

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$。在$u$方向受力 $T\sin\theta_{x+\Delta x} - T\sin\theta_x$

在小振动情况下，$\sin\theta \approx tg\theta,\ tg\theta = \frac{\partial u}{\partial x}$

所以，质元的动力学方程是

$$\Delta m \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}\right)$$

整理，得到波动方程 $$\frac{\rho_l}{T}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

前述的简谐波 $u_{(x,t)}=A\cos\omega(t-\frac{x}{v})$ 满足上式，并得到

波速 $v=\sqrt{T/\rho_l}$

该波速与振动频率无关，称为无色散的波。电磁波在真空中也是无色散的。

一般的波动方程可以表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

这是一个线性方程。波动满足叠加原理。

§8.4 波动的能量和能流

一. 波动的能量

仍以绳上的波为例。设 $u_{(x,t)} = A\cos\omega(t-\frac{x}{v})$ ，考虑**x**处质元 $\Delta m = \rho_l \cdot \Delta x$ 。

其动能 $$E_k = \frac{1}{2}\Delta m\dot{u}^2 = \frac{1}{2}\rho_l \Delta x A^2\omega^2 \sin^2\omega(t-\frac{x}{v})$$

Δm的势能是 $\frac{1}{2}k(\Delta L+\Delta l)^2$ ，***k***是绳子的弹力系数，***ΔL***是绳子原伸长，***Δl***是由振动伸长。$T = k(\Delta L+\Delta l) \approx k\Delta L$ 而***TΔL***部分在振动中不变，可以不计。势能可写为

$$E_p = \frac{1}{2}T\Delta l = \frac{1}{2}T\Delta u\sin\theta = \frac{1}{2}T\Delta u(\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{1}{2}v^2\rho_l\Delta x\frac{\Delta u}{\Delta x}(\frac{\partial u}{\partial x})$$

$$= \frac{1}{2}\rho_l\Delta x v^2(\frac{\partial u}{\partial x})^2 = \frac{1}{2}\rho_l\Delta x A^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{v})$$

Δm质元的总能量

不守恒！！

$$E = E_p + E_k = \rho_l \Delta x A^2 \omega^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{v})$$

能量密度

$$w = \frac{E}{\Delta x} = \rho_l A^2 \omega^2 \sin^2 \omega(t - \frac{x}{v})$$

平均能量密度

$$\overline{w} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} w dt = \frac{1}{2}\rho_l A^2 \omega^2$$

二. 能流密度

能量的传输，通过上游对下游做功。x处的功率

$$P = -T\sin\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = -T \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

将 $u_{(x,t)} = A \cdot \cos \omega(t - \frac{x}{v})$ 代入上式

$$P = T\frac{A^2\omega^2}{v}\cdot\sin^2\omega(t-\frac{x}{v}) = \rho_l v A^2\omega^2\cdot\sin^2\omega(t-\frac{x}{v})$$

以上是能流，其正负取决于速度，代表沿正负方向传输能量。

能流密度*I*是单位时间通过单位面积传输的能量。设绳的截面积*S*，体密度ρ，有 $\rho_l = \rho\cdot S$,则

$$I = \frac{P}{S} = \rho v A^2\omega^2\cdot\sin^2\omega(t-\frac{x}{v})$$

平均能流密度 $\bar{I} = \frac{1}{2}\rho v A^2\omega^2$

声强即是能流密度。闻阈，$I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$。声强级 $L = \lg(I/I_0)$

§8.5 波的叠加

一. 同频率波的干涉

两个同频率、振动方向相同，且具有固定位相差的波源发出的波在空间相遇，合振幅的空间分布将不随时间变化，形成稳定的振动强弱分布，干涉现象。相干波。

设两波源S_1、 S_2处振动方程

$$u_{10} = A_{10}\cos(\omega t + \varphi_1),\ u_{20} = A_{20}\cos(\omega t + \varphi_2)$$

分别经r_1、 r_2传至P点，其振动变为

$$u_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1 - kr_1),\ u_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2 - kr_2)$$

P点的合振动是同频谐振动，其振幅为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos[(\varphi_1 - kr_1) - (\varphi_2 - kr_2)]}$$

可见当传至**P**点的两振动相位差

$$\Delta = (\varphi_1 - \varphi_2) + k(r_2 - r_1) = 2n\pi,\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

时，$A_{\max} = A_1 + A_2$，振动最强，**P**点是相干相长点。

当 $\Delta = (\varphi_1 - \varphi_2) + k(r_2 - r_1) = (2n+1)\pi,\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

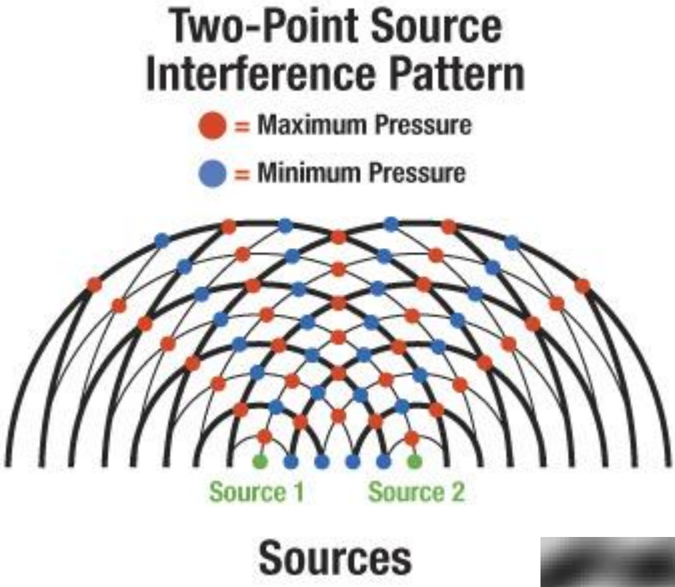
时，$A_{\min} = \left| A_1 - A_2 \right|$，振动最弱，**P**点是相干相消点。

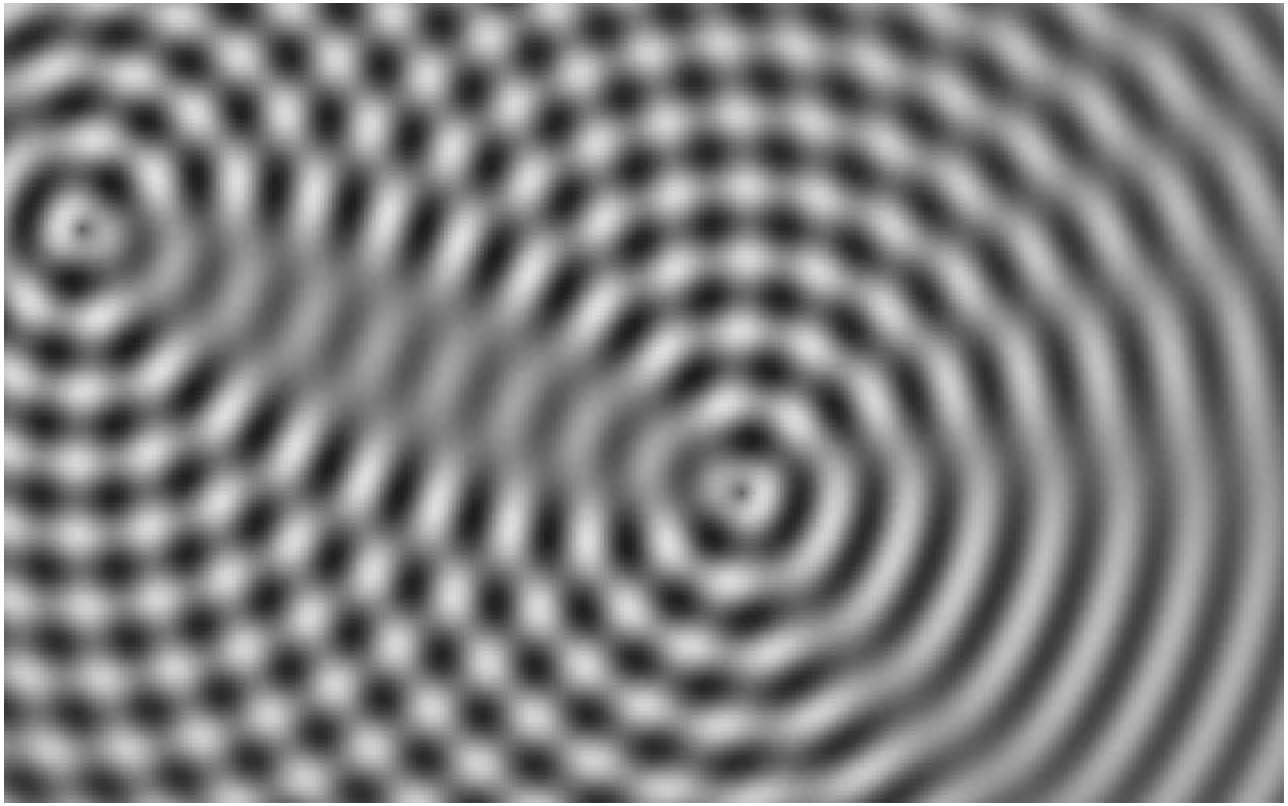
干涉最关键的是振幅的稳定空间分布。为此，首先须同频率。另外初相位差恒定。振动方向相同。

关心振幅的空间变化，而不是瞬时值。

拍的情况是振幅由于频率不同造成随时间周期性分布。时间上的干涉。

Double Slit Interference





二. 驻波

考察沿一维正负方向传播的同频简谐波的叠加。设

$$u_1 = A\cos(\omega t - kx + \varphi_1),\ u_2 = A\cos(\omega t + kx + \varphi_2)$$

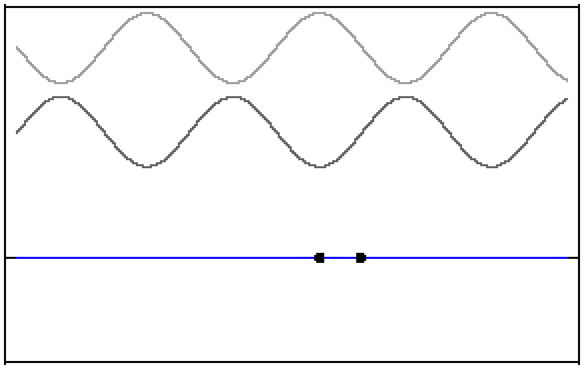
叠加的结果是

$$u = u_1 + u_2 = 2A\cos(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2})\cos(\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}),$$

特点是各处相位保持一致，没有振动的传播，称驻波。

波腹位置 $x = \frac{n\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2\pi}\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2},$

波节位置 $x = \frac{n\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{2\pi}\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$



相邻波腹、波节间距为λ/2。波节两侧反相。

端点问题。

设入射波 $u_i = A\cos(\omega t - kx)$,，在$x=l$处反射，反射波 $u_r = A\cos(\omega t - 2kl + kx + \Delta\varphi)$，叠加结果

$$u = u_i + u_r = 2A\cos(kx - kl + \frac{\Delta\varphi}{2})\cos(\omega t - kl + \frac{\Delta\varphi}{2})$$

自由端点，$x=l$处是波腹， $\Delta\varphi=0$。

固定端点， $x=l$处是波节， $\Delta\varphi=\pi$， 半波损失。

两端点问题。有限长的波对频率有要求。设 $x=0,l$处是固定端点。上式满足 $u_{(l,t)} = 0$ 。

另一个边界条件 $u_{(0,t)} = 0$ ，要求 $kl = n\pi$，得到

$$\omega = \frac{n\pi v}{l}$$

三. 波包 群速度

不同频率波的叠加。考虑一个简单的调幅波，由两不同频率的谐波组成。

$$u_1 = A\cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1),\ u_2 = A\cos(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2)$$

叠加结果是

调制

$$u = u_1 + u_2 = 2A\cos[\frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2}t - \frac{(k_1 - k_2)}{2}x + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}]$$

$$\cdot\cos[\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}t - \frac{(k_1 + k_2)}{2}x + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}],$$

载波

可以看作对载波振幅的调制。这种调制在时间和空间进行，也是一种波动形式。

载波的相速 $(\omega_1 + \omega_2)/(k_1 + k_2)$

调制的相速 $(\omega_1 - \omega_2)/(k_1 - k_2)$

在 $k_1 \approx k_2$ 的情况下，合成波的

相速度 $v_p = \dfrac{\omega}{k}$，群速度 $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$

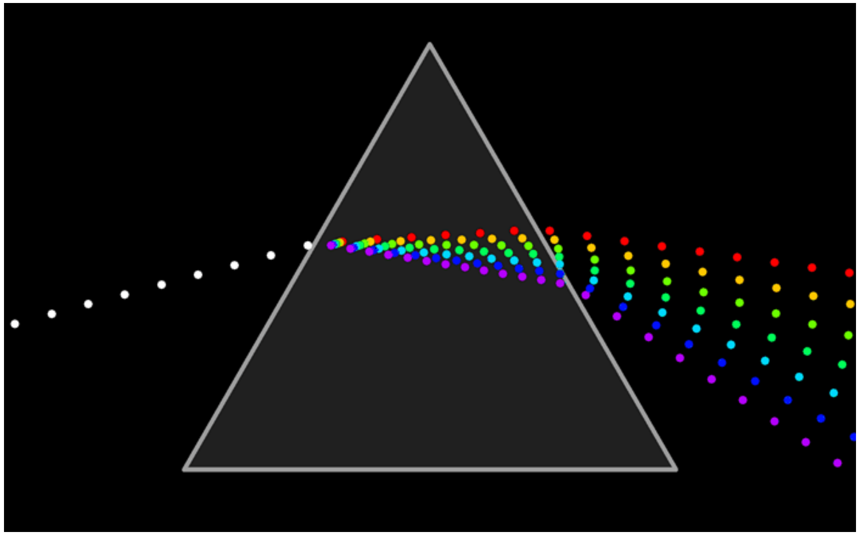
若相速度与频率无关，称为无色散的波，则 $v_g = v_p$ 。

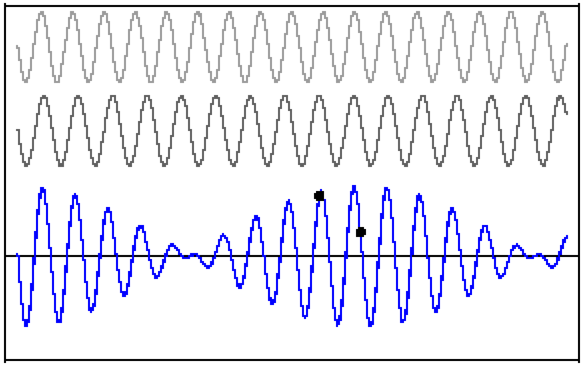
若相速度与频率有关，称为色散波，有

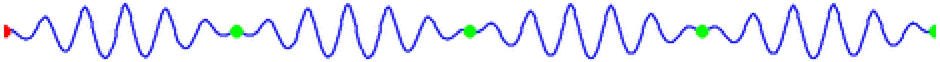
$$v_g = v_p + k\frac{dv_p}{dk} = v_p - \lambda\frac{dv_p}{d\lambda}$$ （瑞利群速度公式）

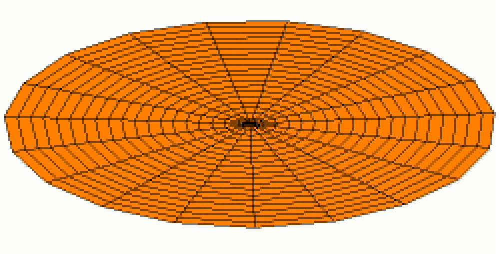
$\dfrac{dv_p}{d\lambda} > 0,\ v_g < v_p,$ 正常色散

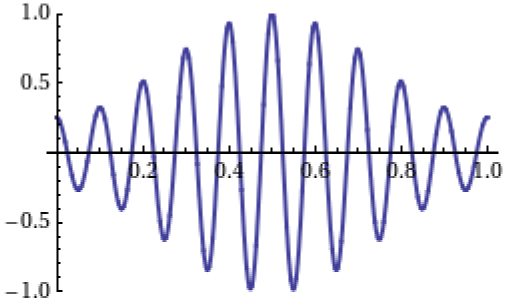
$\dfrac{dv_p}{d\lambda} < 0,\ v_g > v_p,$ 反常色散

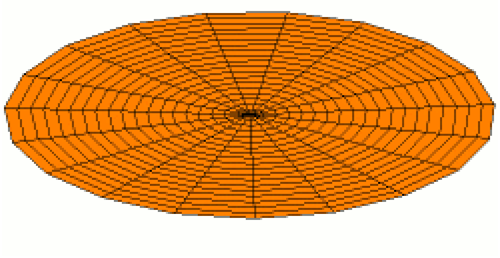












Two-dimensional standing wave

Phase velocity and group velocity

§8.5 多普勒效应

波源和接收器之间存在相对运动时，会发生接收频率与波源频率不一致的现象，称为多普勒效应。

一. 波源运动，接收器静止

单位时间内 进入接收器的波列长度是 v_p，波长被压缩，

$\lambda' = \lambda - v_s T$ 。所以接收频率

$$f' = \frac{v_p}{\lambda'} = \frac{v_p}{\lambda - v_s T} = \frac{v_p}{\lambda - v_s \dfrac{\lambda}{v_p}} = \frac{f}{1 - \dfrac{v_s}{v_p}}$$

二. 波源静止，接收器运动

单位时间内 进入接收器的波列长度是 v_p+v_D，波长不变。所以接收频率

$$f' = \frac{v_p + v_D}{\lambda} = f + \frac{v_D}{\lambda} = f\left(1 + \frac{v_D}{v_p}\right)$$

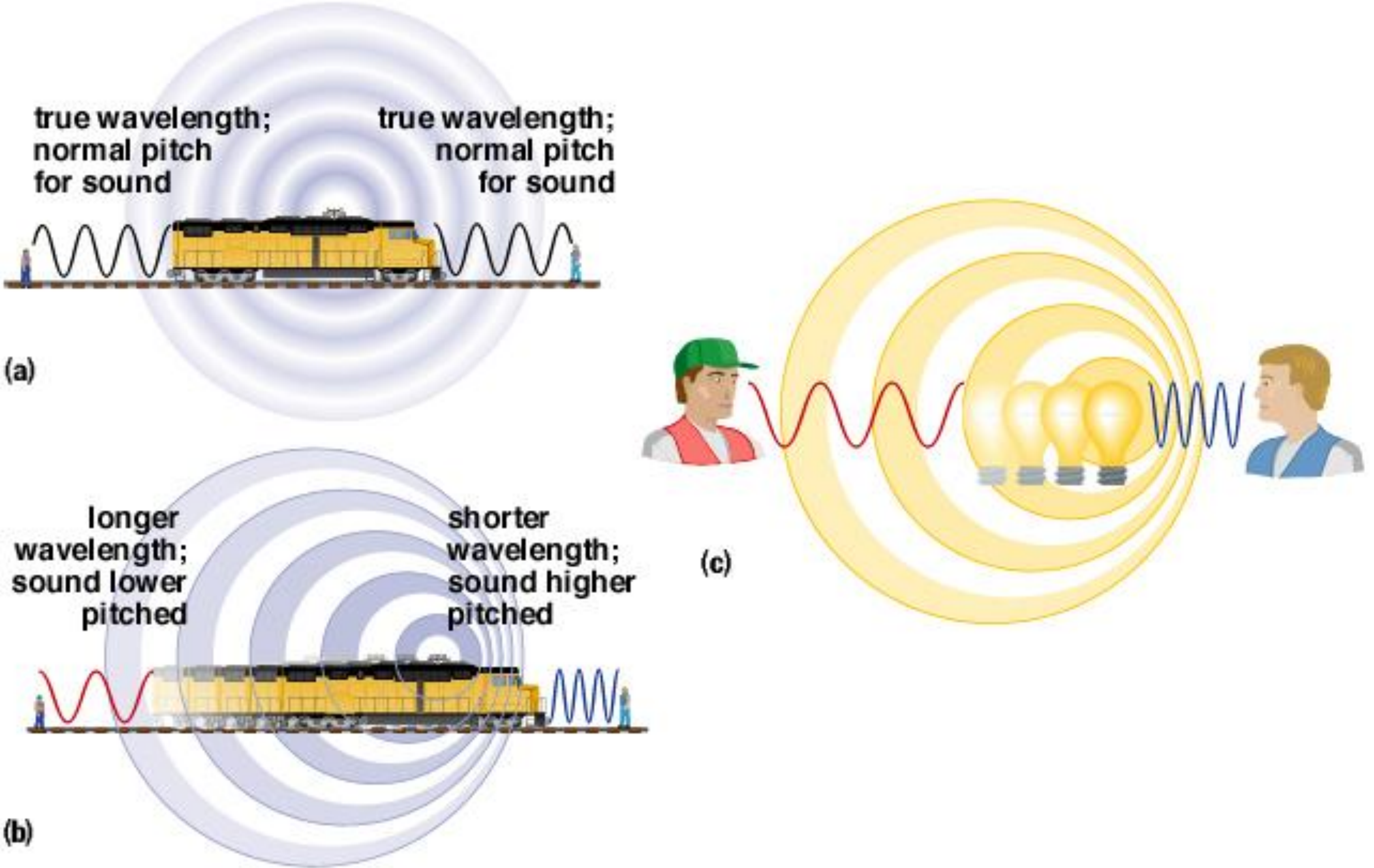
三. 波源、接收器都运动

考虑进入接收器的波列长度和波长的变化，则

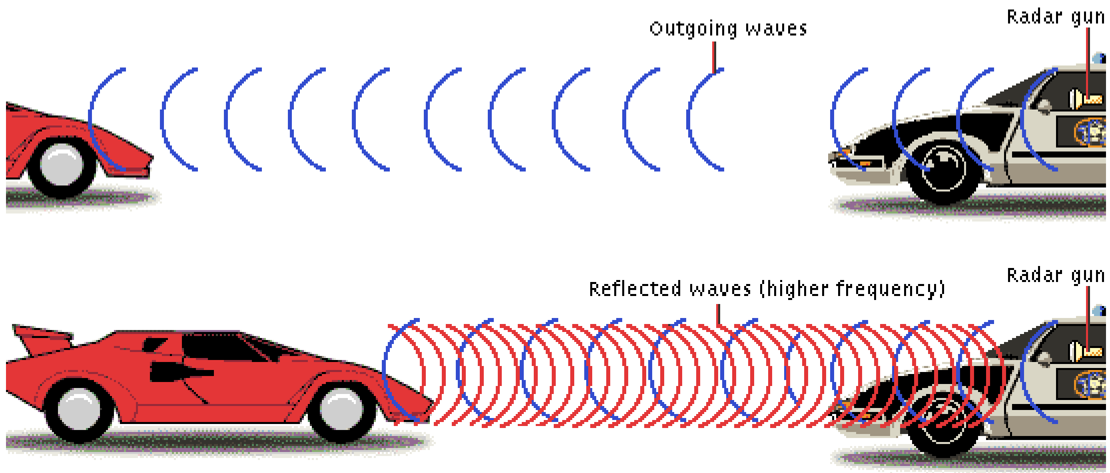
$$f' = \frac{1 + \frac{v_D}{v_p}}{1 - \frac{v_s}{v_p}} f = \frac{v_p + v_D}{v_p - v_s} f$$

经典的机械波中，横向运动没有多普勒效应。

演 示 实 验


true wavelength;
normal pitch
for sound
true wavelength;
normal pitch
for sound
(a)
longer
wavelength;
sound lower
pitched
shorter
wavelength;
sound higher
pitched
(b)
(c)

http://www.mendonpublicsafety.com/ondutyradar.htm



Proximity Fuze