

# 中国科学技术大学

申请博士学位论文

## 微纳米吸附 接触力学模型的研究

研究生：郑志军

导师：虞吉林 教授

专业：工程力学

中国科学技术大学 力学和机械工程系

2007年5月



# Study on the micro/nanoscale adhesive contact mechanical models

Zhijun Zheng

Supervisor:

Prof. Jilin Yu

Department of Modern Mechanics  
University of Science and Technology of China

May, 2007

*Submitted in partial fulfilment of the requirements for the degree of Ph.D.  
in Engineering Mechanics*




## 中国科学技术大学学位论文相关声明

本人声明所提交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

本人授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

作者签名：  \_\_\_\_\_

2007年5月4日



## 摘 要

在微纳米尺度下,材料的表面形貌和表面相互作用极大地影响了材料的接触行为。本文对连续介质接触力学模型作了进一步推广和补充,研究了具有任意表面形状和任意表面相互作用的轴对称弹性体的轴向吸附接触问题,其目的是提高完全自洽模型的实用性和 Maugis 模型的有效性。

对于具有任意表面形状和任意表面相互作用的轴对称弹性体,我们建立了表征表面变形和表面相互作用的协调关系以及载荷—位移关系,得到了无摩擦和无相对滑动两种情况下的完全自洽模型。为便于数值计算,我们将协调关系写成不含位移的形式,即写成以表面中心间距作为控制参数的形式,并将其无量纲化。我们发现,在无摩擦和无相对滑动两种情况下,协调关系和载荷—位移关系分别具有相同的无量纲形式,只是表征材料性质和表面形状无量纲参数  $\vartheta$  的定义有所不同。该参数在无相对滑动情况下是其在无摩擦情况下的  $1 - \beta^2$  倍,其中  $\beta$  为 Dundurs 常数。我们同时研究了二维无摩擦正向吸附接触问题,并建立了相应的自洽模型。

本文对完全自洽模型的数值计算方法进行了改进和规范,通过这一努力将有望改善该理论模型不实用的状况。采用自适应网格技术提高了计算效率和精度。采用表面中心间距控制法得到了完整载荷—位移曲线,该方法首先为 Greenwood 所采用,它不需要处理分歧的情况,我们进一步将协调关系改写成不含位移的形式更加方便了这种控制方法的使用。采用 Riemann-Stieltjes 积分,从本质上消除了 Greenwood 提到的奇异点的影响,避免了近似积分的处理,进一步简化了数值求解过程。采用 Newton-Raphson 迭代方法加快了收敛速度,提高了迭代效率,并分析了 Attard 和 Parker 采用松弛法给出错误结果的可能原因。

将完全自洽模型应用于具有幂次型表面和 Lennard-Jones 作用势的轴对称问题。结果表明突跳行为是实际问题中采用位移控制模式引起的。我们发现表面摩擦对变形起抑制作用。我们定义了扩展 Tabor 数  $\mu$ , 并发现了对于任意有效的形状指数  $n$  存在从 JKR- $n$  到 Bradley- $n$  的扩展 MYD 转变。

本文还将 Maugis 模型推广到具有任意有效的表面形状和任意形式的表面吸附作用的轴对称问题,得到了广义 Maugis 模型,研究了表面形状和表面吸附作用对接触模型的不同贡献。使用 Dugdale 势近似表面吸附作用得到了广义

M-D 模型, 在两个极端的条件下分别得到了广义 JKR 模型和广义 DMT 模型。将广义 M-D 模型应用于具有幂次型的表面, 得到了 M-D- $n$  模型, 并给出了拔出功从 JKR- $n$  到 DMT- $n$  的转变情况。基于 M-D- $n$  模型, 对 Johnson-Greenwood 吸附图进行了推广, 进而建立了以转变参数  $\Lambda$ 、无量纲载荷  $\tilde{P}$  和形状指数  $n$  为轴的三维吸附图, 指出了各近似理论模型的适用范围。

在近球体吸附接触的 M-D 模型中, 粘着应力  $\sigma_0$  通常被取为理论应力  $\sigma_{th}$  以匹配完全自洽模型。这种作法过于随意, 而文献中也没有其它更好的方案。本文在推广模型的基础上给出了一个更为合理的方案, 即以近似模型和精确模型在刚性极限下拔出功一致这一条件来确定粘着应力  $\sigma_0$  的值。我们首先讨论了具有幂次型表面的轴对称弹性体以 Dugdale 势近似 Lennard-Jones 作用势的吸附接触问题, 给出了粘着应力  $\sigma_0$  的新的建议值为  $k(n)\Delta\gamma/z_0$ , 其中系数  $k(n)$  与形状指数  $n$  相关,  $\Delta\gamma$  为吸附能,  $z_0$  为两个平行半空间的平衡间隔。特别地, 在近球体  $n = 2$  的情况下, 新的建议值可以被确定为  $0.588\Delta\gamma/z_0$  ( $\doteq 0.573\sigma_{th}$ )。使用该值的 M-D 模型与使用 Maugis 建议的理论应力  $\sigma_{th}$  ( $\doteq 1.026\Delta\gamma/z_0$ ) 给出的结果相比, 在载荷—位移曲线、JKR-DMT 转变、表面变形分布和表面压强分布等方面都更吻合于完全自洽模型的结果。这对于其它任意有效的形状指数  $n$  也有同样的结论。我们还给出了对应于更一般形式的 Lennard-Jones 作用势的粘着应力  $\sigma_0$ 。最后, 我们研究了理想球体和弹性半空间之间以 Dugdale 势近似 Lennard-Jones 作用势的吸附接触问题。

**关键词:** 吸附, 接触, 完全自洽模型, 广义 Maugis 模型, 拔出功, 三维吸附图, 粘着应力



## Abstract

In the micro/nano scale, the surface profile and surface interaction play an important role in the contact behavior of materials. The normal adhesive contact problem of arbitrary axisymmetric elastic objects with an arbitrary surface adhesive interaction is studied in this thesis. The continuum models for mechanical contacts are extended and supplemented to enhance the practicability of the full self-consistent model (FSCM) and the validity of the Maugis model.

For the arbitrary axisymmetric elastic objects with an arbitrary surface adhesive interaction, the surface deformation–interaction consistent relation and the load–displacement relation are derived and the FSCM is established under the frictionless or non-slipping condition. For convenience in numerical calculation, we rewrite the consistent relation with the surface central gap, instead of the displacement, as the control parameter. The two dimensionless relations under the non-slipping condition are found to be same as those under the frictionless condition, respectively, except the definition of a dimensionless parameter  $\vartheta$ , which characterizes the material properties and surface shape. This parameter under the non-slipping condition is  $1 - \beta^2$  times as that under the frictionless condition, where  $\beta$  is the Dundurs constant. The two-dimensional FSCM is also studied, but unfortunately the displacement can't be determined.

The full self-consistent numerical calculation based on a specific interaction model is further improved in several aspects. First, a variable-spacing technology is designed to improve the computational efficiency and accuracy. Second, a surface central gap control, which is the simplest one without the necessity of dealing with the solution bifurcation, is used to derive the full load–displacement curve as firstly used by Greenwood. Third, a Riemann-Stieltjes integral is employed to avoid the singularity pointed out by Greenwood. Fourth, the relaxation method that may lead to errors is replaced by a Newton-Raphson method to accelerate convergence and improve the efficiency of iterations. Through these improvements, the FSCM will be applied more effectively.

The FSCM is applied to the case of a power-law shape function and the

Lennard-Jones (L-J) potential. The numerical results show that the jumping-on and jumping-off are due to the displacement control in practice. It is shown that the surface friction restrains the deformation. An extended Tabor number  $\mu$  is defined and a transition from the extended Johnson-Kendall-Roberts (JKR) model to the extended Bradley model, named as an extended Muller-Yushchenko-Derjaguin (MYD) transition, is found.

The Maugis model is extended to that of arbitrary effective axisymmetric elastic objects with an arbitrary surface adhesive interaction. Based on the Dugdale model, a generalized Maugis-Dugdale (M-D) model is derived. Under two limit conditions, it is simplified to the generalized JKR model and the generalized Derjaguin-Muller-Toporov (DMT) model, respectively. The generalized M-D model is applied to the case of a power-law shape function and a continuous transition from the extended JKR model to the extended DMT model is found in this extended M-D model for an arbitrary shape index  $n$ . Based on the extended M-D model, a three-dimensional Johnson-Greenwood adhesion map is constructed with coordinates of the transition parameter  $\Lambda$ , the dimensionless load  $\tilde{P}$  and the shape index  $n$ .

In the original M-D model, the step cohesive stress  $\sigma_0$  is arbitrarily chosen to be the theoretical stress  $\sigma_{\text{th}}$  to match that of the L-J potential. An alternative and more reasonable one is proposed in this thesis. Using the Dugdale approximation to match the L-J potential in the adhesive contact of axisymmetric elastic objects in power-law is first discussed. A relation of the identical pull-off force at the rigid limit is required for the approximate and exact models. With this requirement, the stress  $\sigma_0$  is found to be  $k(n)\Delta\gamma/z_0$ , where  $k(n)$  is a coefficient,  $n$  shape index,  $\Delta\gamma$  the work of adhesion and  $z_0$  the equilibrium separation. Hence we have  $\sigma_0 \doteq 0.588\Delta\gamma/z_0$  ( $\doteq 0.573\sigma_{\text{th}}$ ), especially for  $n = 2$ . The prediction of the pull-off forces using this new value shows surprisingly better agreement with the MYD transition than that using  $\sigma_{\text{th}} \doteq 1.026\Delta\gamma/z_0$  and this is true for other values of shape index  $n$ . And then, for a more general relationship of the L-J potential, the step cohesive stress  $\sigma_0$  is also presented. Finally, a similar discussion is carried out in the adhesive contact between an ideal sphere and a half-space.

**Keywords:** adhesion, contact, full self-consistent model, generalized Maugis model, pull-off force, three-dimensional adhesion map, cohesive stress

## 目 录

摘要	i
Abstract	iii
目录	v
插图目录	ix
表格目录	xi
主要符号列表	xii
<b>第一章 绪论</b>	<b>1</b>
1.1 材料表面效应对接触行为的影响 . . . . .	1
1.2 吸附接触理论模型的发展和存在的问题 . . . . .	2
1.2.1 经典接触理论模型 . . . . .	2
1.2.2 自洽接触理论模型 . . . . .	3
1.2.3 Maugis 接触理论模型 . . . . .	5
1.3 本文工作目的和简介 . . . . .	7
<b>第二章 弹性半空间轴对称问题</b>	<b>9</b>
2.1 引言 . . . . .	9
2.2 弹性半空间轴对称问题简介 . . . . .	9
2.2.1 弹性轴对称问题的基本方程 . . . . .	9
2.2.2 弹性轴对称问题的 Love 解 . . . . .	11
2.2.3 使用 Hankel 变换求解半空间轴对称问题 . . . . .	12

2.3	混合边界条件下的解	13
2.3.1	使用积分变换表示的形式解	14
2.3.2	一类混合边界条件下的解	16
2.4	两种特殊的边界条件	20
2.4.1	纯应力边界条件	20
2.4.2	无摩擦边界条件	21
2.5	本章小结	23
<b>第三章</b>	<b>完全自洽模型的推广和应用</b>	<b>24</b>
3.1	引言	24
3.2	完全自洽模型	26
3.2.1	无摩擦情况	29
3.2.2	无相对滑动情况	30
3.2.3	无量纲形式	32
3.3	数值计算方法	33
3.3.1	数值计算方法的改进	33
3.3.2	数值计算方法的比较	34
3.4	幂次型表面的应用	36
3.4.1	算例	37
3.4.2	摩擦对接触行为的影响	39
3.4.3	扩展 MYD 转变	44
3.5	二维完全自洽模型	47
3.6	本章小结	51
<b>第四章</b>	<b>Maugis 接触模型的推广和应用</b>	<b>54</b>
4.1	引言	54
4.2	广义 Maugis 模型	55

4.2.1	广义 Maugis 模型的建立	55
4.2.2	广义 Maugis 模型的分解	59
4.3	特殊的吸附作用	60
4.3.1	广义 M-D 模型	60
4.3.2	广义 JKR 模型	60
4.3.3	广义 DMT 模型	61
4.4	特殊的表面形状	61
4.4.1	理想椭球体	61
4.4.2	幂次型表面	62
4.5	幂次型表面的应用	63
4.5.1	M-D- $n$ 模型	63
4.5.2	DMT- $n$ 到 JKR- $n$ 的转变	66
4.5.3	三维吸附图	68
4.6	本章小结	70
<b>第五章</b>	<b>用 Dugdale 近似匹配给定的作用势</b>	<b>71</b>
5.1	引言	71
5.2	幂次型轴对称表面吸附接触	72
5.2.1	用 Dugdale 近似来匹配 Lennard-Jones 作用势	72
5.2.2	用 Dugdale 近似来匹配更一般形式的 Lennard-Jones 势	79
5.3	理想球体和半空间的吸附接触	81
5.3.1	完全自洽模型的刚性极限	82
5.3.2	用 Dugdale 近似来匹配 Lennard-Jones 作用势	84
5.4	本章小结	85
<b>第六章</b>	<b>全文总结和展望</b>	<b>86</b>
6.1	吸附接触模型研究工作的总结	86

6.2 进一步工作的展望	88
<b>附录 A 数学公式和数学推导</b>	<b>91</b>
A.1 特殊函数	91
A.1.1 Gamma 函数和 Beta 函数	91
A.1.2 Bessel 函数	92
A.1.3 椭圆积分	92
A.1.4 超几何函数	94
A.2 积分变换	95
A.2.1 Fourier 余弦和正弦变换及其反演	95
A.2.2 $n$ 阶 Hankel 变换及其反演	95
A.2.3 Abel 变换及其反演	95
A.2.4 各积分变换之间常用关系式	95
A.3 Weber-Schafheitlin 型积分	96
A.3.1 $\lambda = 0$ 和 $\mu = \nu = 0$ 的情况	96
A.3.2 $\lambda = 0$ 和 $\mu = \nu = 1$ 的情况	97
<b>参考文献</b>	<b>99</b>
<b>致谢</b>	<b>109</b>
<b>作者简介和攻读博士学位期间发表的学术论文</b>	<b>110</b>

## 插图

1.1	Hertz、JKR 和 M-D 模型的接触压强分布 . . . . .	3
1.2	1990 年以来各吸附接触模型原始文献的年引用率统计情况 . . . . .	4
1.3	各接触模型的表面压强随表面间隔的变化情况 . . . . .	5
1.4	Johnson-Greenwood 吸附图 . . . . .	6
2.1	柱坐标系下轴对称变形体的微元的应力分量 . . . . .	10
3.1	轴对称弹性体沿轴向吸附接触问题及其等效问题的示意图 . . . . .	27
3.2	函数 $F(k)$ 和 $F_2(k)$ 及其相应的导数 $F'(k)$ 和 $F_2'(k)$ . . . . .	30
3.3	无量纲位移和载荷随表面中心间隔的变化 . . . . .	38
3.4	轴向载荷、特征半径和应变能释放率随位移的变化情况 . . . . .	38
3.5	变形量、压强和摩擦应力沿径向的分布情况 ( $n = 2, \vartheta = 1$ ) . . . . .	40
3.6	无相对滑动条件和无摩擦条件下的载荷—位移曲线 . . . . .	41
3.7	拔出力随 Tabor 数的变化情况 . . . . .	42
3.8	特征半径随载荷的变化 . . . . .	42
3.9	变形量、压强和摩擦应力沿径向的分布情况 ( $n = 2, \mu = 1, \beta = 0.5$ ) . . . . .	43
3.10	不同形状指数 $n$ 下的无量纲载荷—位移曲线 . . . . .	45
3.11	扩展 MYD 转变 . . . . .	46
3.12	二维无摩擦吸附接触问题之特征半宽度随载荷变化的情况 . . . . .	51
4.1	轴对称弹性体沿轴向吸附接触问题及其等效问题的接触过程示意图 . . . . .	57
4.2	不同形状指数 $n$ 下无量纲拔出力随转变参数的变化 . . . . .	67
4.3	不同形状指数 $n$ 下的二维吸附图 . . . . .	69
4.4	三维吸附图 . . . . .	69

---

5.1	DMT- $n$ 和 Bradley- $n$ 拔出力的比较 . . . . .	73
5.2	使用 Dugdale 近似匹配 Lennard-Jones 势的情况下的系数 $k(n)$ . . .	74
5.3	各接触模型的拔出力随 Tabor 数变化情况的比较 . . . . .	76
5.4	各接触模型的载荷—位移曲线的比较 . . . . .	77
5.5	表面变形和表面压强沿半径方向的分布情况 . . . . .	78
5.6	不同形状指数下无量纲拔出力随扩展 Tabor 数的变化 . . . . .	79
5.7	Bradley- $R$ 拔出点位移的数值解和渐近级数解的比较 . . . . .	83
5.8	Bradley- $R$ 拔出力的数值解和渐近级数解的比较 . . . . .	84



## 表 格

3.1 完全自治模型的数值计算方法的比较 . . . . .	35
4.1 扩展 M-D 模型中特殊函数在不同形状指数下的表达式 . . . . .	65
4.2 物理量和组合量的量纲 . . . . .	65
5.1 用 Dugdale 近似匹配 Lennard-Jones 作用势的相关参数 . . . . .	75

## 主要符号列表

$E^*$	等效弹性模量 ( $= (1/E_1^* + 1/E_2^*)^{-1}$ )	Equivalent elastic modulus
$E^{**}$	等效弹性模量 ( $= E^*/(1 - \beta^2)$ )	Equivalent elastic modulus
$E_i$	杨氏模量	Young modulus of Solid $i$
$E_i^*$	等效弹性模量 ( $= E_i/(1 - \nu_i^2)$ )	Equivalent elastic modulus of Solid $i$
$H(r)$	表面间距	Surface gap
$H_0$	表面中心间距	Surface central gap
$K_I$	I 型应力集中因子	Mode I stress intensity factor
$P$	载荷 / 接触力	Load / Contact force
$Q$	形状参数	Shape parameter
$R$	等效半径	Equivalent radius
$R_0$	参考半径	Reference radius
$a$	接触半径、接触半宽度	Contact radius / Half-width of contact
$c$	有效作用半径	Effective radius of action
$f(\varrho)$	表面形状函数	Surface shape function
$g(\varrho)$	表面吸附作用函数	Surface adhesive interaction function
$h(r)$	表面间隔 ( $= H(r) + z_0$ )	Surface separation
$h_0$	有效作用程	Effective range of action
$k(n)$	系数 ( $= \sigma_0/(\Delta\gamma/z_0)$ )	Coefficient
$m$	无量纲参数 ( $= c/a$ )	Dimensionless parameter
$n$	形状指数	Shape index
$p(r)$	表面压强 / 接触压强	Surface pressure / Contact pressure
$p^*(h)$	表面压强	Surface pressure
$p_0$	参考压强	Reference pressure
$p_s(H)$	表面压强	Surface pressure
$r$	半径	Radius
$u_r, u_z$	变形分量	Deformation components
$z(r)$	表面形状函数	Surface shape function

$z_0$	两平行半空间平衡间隔	Equilibrium separation
$z_i(r)$	表面形状函数	Surface shape function of Solid $i$
$-P_c$	拔出力	Pull-off force
$\Phi_i$	Love 应力函数	Love stress function of Solid $i$
$\beta$	Dundurs 常数	Dundurs constant
$\delta$	位移	Displacement
$\delta_t$	裂纹张开位移	Crack-opening displacement, COD
$\epsilon$	无量纲参数 ( $= z_0/R, = z_0/R_0$ )	Dimensionless parameter
$\lambda$	Maugis 数	Maugis number
$\lambda_i, \mu_i$	Lamé 常数	Lamé constants of Solid $i$
$\mathcal{G}$	应变能释放率	Strain energy release rate
$\mu$	(扩展) Tabor 数	(Extended) Tabor number
$\nu_i$	泊松比	Poisson ratio of Solid $i$
$\nu_i^*$	等效泊松比 ( $= \nu_i/(1 - \nu_i)$ )	Equivalent Poisson ratio of Solid $i$
$\sigma$	应力	Stress
$\sigma_0$	粘着应力	Cohesive stress
$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$	正应力分量	Normal stress components
$\sigma_{th}$	理论应力	Theoretical stress
$\tau$	剪应力	Shear stress
$\tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}$	剪应力分量	Shear stress components
$\Delta\gamma$	吸附能	Work of adhesion
$\Lambda$	转变参数	Transition parameter
$\epsilon$	应变	Strain
$\varrho$	无量纲半径 ( $= r/a$ )	Dimensionless radius
$\mathcal{L}$	长度的量纲	Dimension of length
$\mathcal{M}$	质量的量纲	Dimension of mass
$\mathcal{T}$	时间的量纲	Dimension of time
$\nabla^2$	Laplace 算子	Laplace operator / Laplacian
$D_z$	偏微分算子 ( $= \partial/\partial z$ )	Partial differential operator



## 第一章 绪论

### 1.1 材料表面效应对接触行为的影响

材料在微/纳米尺度下越发彰显出其神奇的性能和新颖的应用,这极大地促进了信息技术“更小、更快、更低廉”的产业化发展,小型化是纳米科学技术发展的一个重要推动力 [1]。随着尺度的减小,比表面积增大,材料的表面效应显著地影响其力学行为 [2]。一方面,基于连续介质假设的传统力学没有考虑材料实际表面形貌以及物体间表面力的影响,从而无法做出合理的解释。另一方面,建立在由 Schrödinger 方程控制的量子力学 (quantum mechanics, QM) 基础上的化学键理论的成功应用极大地发展了纳米力学 (nanomechanics, NM),这不仅是对传统连续介质力学 (continuum mechanics, CM) 的挑战,更是对牛顿力学基础的挑战。然而“自下而上”的定量研究在数学上存在着极大的困难,表现在大型计算方面往往束手无策,尽管随着计算机的发展有望突破这一束缚,但是在现有的条件下“自上而下”的研究仍吸引着人们的广泛兴趣。经过力学工作者的努力,在传统连续介质力学的基础上考虑尺度效应和表面效应的影响已经取得了极大的进展,从而显示出了从牛顿力学基础建立微/纳米力学的可能性。微/纳米力学已经成为当今力学研究的前沿和发展趋势。正如诺贝尔物理奖获得者 Rohrer 教授所指出的,“人类正在迎接纳米力学新时代”,“力学,特别是纳米力学 (在当代科技中) 的整体重要性将和微电子相媲美” [1]。

自然界有许多有趣的现象,如昆虫吸附在物体表面 [3, 4],壁虎在垂直壁面上甚至在天花板上行走 [5-7],细胞吸附探针或其它细胞 [8],噬菌体侵染大肠杆菌,绒毛除尘等。这些现象都不能为传统的 Hertz 接触理论 [9, 10] 所解释,因为传统接触理论考虑两个弹性体在外力作用下相互接触时,没有考虑材料表面效应对接触性能的影响。为此已经在连续介质力学的基础上发展出了诸多可以考虑材料表面效应的接触力学模型 [11-21]。然而这些模型无一例外地采用了近球形假设,这在应用上存在着很大的局限性。因而人们也已经就一些特殊表面形状扩展了相关的接触力学模型,如考虑到原子力显微镜 (atomic force microscope, AFM) [22] 的针尖形状、纳米压痕仪的压头形状 [23]、生物附着体的形状 [24],幂次型的轴对称表面被广泛采用。除表面形貌外,表面的吸附、摩擦、磨损、浸润等也是影响表面接触行为的重要因素,每考虑一种因素都会导致问题变得更加复杂。单就吸附作用而言,它可能源自不同的物理机理,种类繁多,

如氢键、毛细力、静电荷力、van der Waals 力以及其它种类的“化学”力等 [2]。接触模型从定量上研究了材料的接触性能, 无论对实验获取材料参数, 还是对指导材料设计 [25] 都很有帮助。

## 1.2 吸附接触理论模型的发展和存在的问题

### 1.2.1 经典接触理论模型

1882 年, Hertz [9] 首次研究了两个弹性球体正向无摩擦接触问题, 他假设接触区外部不存在相互作用, 而接触区内部的表面压强关于半径  $r$  的分布为椭圆形的:

$$p(r) = \frac{2E^*}{\pi R} \sqrt{a^2 - r^2}, \quad r \leq a, \quad (1.1)$$

式中,  $a$  为接触半径,  $R$  为等效半径,  $E^*$  为等效弹性模量, 如图 1.1 的点划线所示。Hertz 进而计算出了接触体的弹性变形和相互作用力, 建立了 Hertz 接触模型, 从而开创了接触力学的历史 [10]。在许多宏观接触问题中, 经典的 Hertz 模型得到了广泛的应用, 然而大量的实验研究表明, 随着接触尺度的减小, 接触体表面间的吸附作用不能再忽略 [26, 27]。1971 年, Johnson 等 [11] 采用能量方法建立了第一个考虑吸附作用的接触模型, 即著名的 JKR (Johnson-Kendall-Roberts) 模型。如图 1.1 的点线所示, JKR 模型的表面压强为:

$$p(r) = \frac{2E^*}{\pi R} \sqrt{a^2 - r^2} - \sqrt{\frac{2\Delta\gamma E^* a}{\pi(a^2 - r^2)}}, \quad r \leq a, \quad (1.2)$$

式中,  $\Delta\gamma$  为吸附能。实际上, Maugis 和 Barquins [12] 证实该模型采用了应力在接触区边缘奇异的假设, 它对应于在接触区边缘存在 I 型应力集中因子  $K_I = \sqrt{2\Delta\gamma E^*}$ 。1975 年, Derjaguin 等 [13] 假设吸附作用不会进一步改变接触体的轮廓, 而仍保持为 Hertz 变形时的轮廓, 不过吸附作用会导致载荷的下降, 从而建立了另一个著名的吸附接触模型, 即 DMT (Derjaguin-Muller-Toporov) 模型。然而该模型并不能满足表面变形和相互作用的协调条件 [28], 尽管后来他们又发展了积分表面吸附作用的直接“力”法, 建立了 IDMT (improved DMT) 模型 [14], 但改进的模型仍未能满足协调条件 [15]。

关于 JKR 和 DMT 拔出力的不同曾引起了极大的争议 [28–32], 这在 Tabor 数的引入后得到了澄清。Tabor 数  $\mu$  被解释为吸附引起的弹性变形量和表面力的有效作用程的比值, 即定义为:

$$\mu = (R\Delta\gamma^2/E^{*2}z_0^3)^{1/3}, \quad (1.3)$$

式中,  $z_0$  为两平行半空间的平衡间隔 [33]。实际上, JKR 模型适用于 Tabor 数较大的情况, 即软材料或强吸附, 而 DMT 模型适用于 Tabor 数较小的情况, 即硬材料或弱吸附。

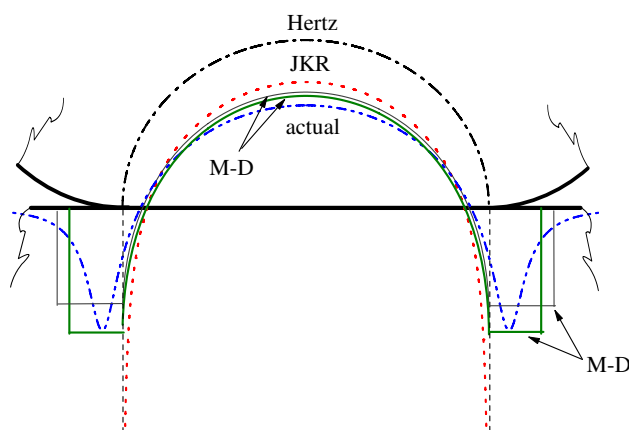


图 1.1: Hertz、JKR 和 M-D 模型的接触压强分布 [34, 35]

Fig. 1.1: Contact pressure distributions of the Hertz, JKR and M-D models [34, 35].

这两个吸附接触模型在许多领域得到了广泛的应用和扩展。如利用 AFM 测量材料参数 [36] 并同 JKR 模型 [37–39] 或 DMT 模型 [40] 预测的结果相比较, 不过在测量拔出力时这两个模型也常被误用 [41]。又如 JKR 理论已经被进一步拓展到椭球体接触问题 [42]、二维无滑动接触问题 [43–45]、具有弹性覆层的接触问题 [46, 47]、多层弹性系统的接触问题 [48]、粘弹性接触问题 [49, 50] 等研究。Shull [51] 在 2002 年使用 ISI Web of Science 统计了从 1982 年到 2000 年 JKR 模型的原始论文 [11] 的被引用率情况, 统计结果在后十年显示出了戏剧性的增长。我们进一步统计了从 1990 年以来各吸附接触模型的原始论文的年引用情况, 如图 1.2 所示。我们发现 JKR 模型的原始论文 [11] 的年引用率仍在持续地增长, DMT 模型的原始论文 [13] 的年引用率总体上也呈现增长的趋势, 虽不及前者的发展势头。然而稍后发展起来的吸附接触模型相应的情况与这两者相比却逊色不少, 正是这一现象促使我们开展了本文的相关工作。

### 1.2.2 自治接触理论模型

1977 年, 实验物理学家 Tabor [28] 注意到 DMT 模型不满足表面变形和相互作用的协调关系, 进而指出应根据接触力学原理使变形的形状协调于表面分布力。实际上, 如何正确表征表面变形和表面相互作用的协调关系是接触力学

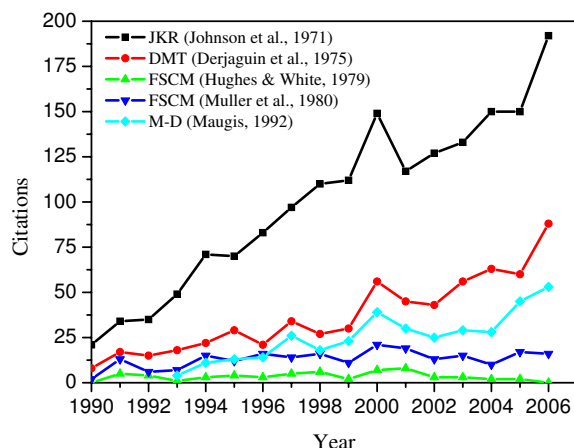


图 1.2: 1990 年以来各吸附接触模型原始文献的年引用率统计情况

Fig. 1.2: Number of yearly citations to the original papers corresponding to the adhesive contact models since 1990, as collected from the ISI Web of Science (available at <http://isiknowledge.com>) and similarly done by Shull [51] in 2002.

的核心问题。Tabor 的想法促使自洽模型迅速地发展起来, 吸附接触理论模型的研究进入了一个新的时期。1979 年及次年, Hughes 和 White [16–18] 相继建立了完全自洽模型 (full self-consistent model, FSCM) 和受约自洽模型 (restricted self-consistent model, RSCM), 然而他们使用的求解方法过于复杂, 很难加以推广和应用。从图 1.2 可见, 在所统计的论文里完全自洽模型的论文 [16] 的引用率是最低的, 而且没有任何增长的趋势。另外受约自洽模型 [18] 并未正式发表在杂志上, 所以我们未对它进行统计, 事实上它已经完全被下一节将要介绍的理论模型 [21] 所取代了。1980 年, Muller 等 [19, 20] 独立于 Hughes 和 White 的工作 [16, 17] 也建立了完全自洽模型, 但 Muller 等采用了可以较为方便地推广和应用的数值计算方法, 其中他们采用了 Lennard-Jones 作用势 [19] 或更一般形式的 Lennard-Jones 作用势 [20] 来表征材料的表面相互作用, 如图 1.3 (a-d) 的细实线所示。该模型也常被称为 MYD (Muller-Yushchenko-Derjaguin) 模型, 但考虑到该模型的数值计算方法已经经过多次改进 [52–55], 在本文中我们将不准备采用这一称呼, 而宁愿以 “MYD” 这一术语专指 MYD 转变, 即拔出力从 JKR 模型过渡到 Bradley 模型。自洽模型是连续介质力学范畴下最具准确性的理论模型, 遗憾的是它不能进行显式求解, 而需要借助复杂的数值计算才能给出结果, 因而缺乏实用性, 致使引用率不高。从图 1.2 可见, Muller 等的论文 [19] 的年引用率确实不高, 变化也比较平缓, 相关的应用如最佳吸附表面接触问题 [56]、近



椭球体吸附表面接触问题 [57] 等。如果提供更为方便的数值计算方法将有助于改善该模型的实用性，我们发现在现有的数值计算方法 [52–55] 中仍有某些方面可以加以改进，因此本文的一个任务是进一步改进和规范完全自洽模型的数值计算方法 [58]。

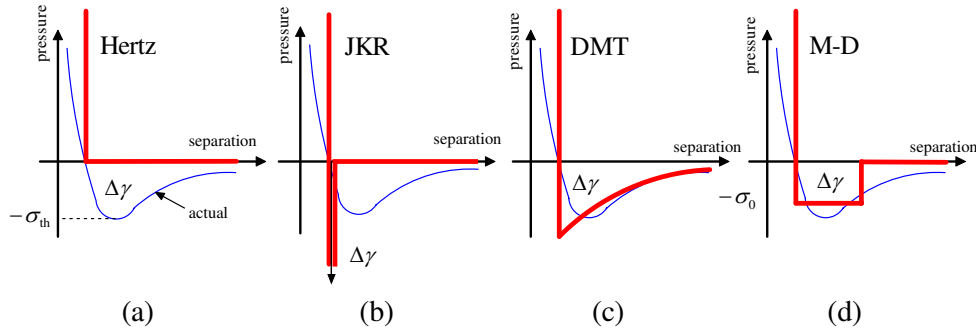


图 1.3: 各接触模型的表面压强随表面间隔的变化情况

(图中细实线为实际作用势，如 Lennard-Jones 作用势) [59, 60]

Fig. 1.3: Variation of surface pressure with surface separation for the (a) Hertz, (b) JKR, (c) DMT and (d) M-D models. (The light solid curve corresponds to the actual potential, for example the Lennard-Jones potential.) [59, 60]

### 1.2.3 Maugis 接触理论模型

二十世纪九十年代，断裂力学概念的引入对于吸附接触模型来说是一次重大的飞跃。1992 年，Maugis [21] 基于 Dugdale 势近似表面吸附作用，并使用应力非奇异条件和 Griffith 关系建立了近球体吸附接触的半解析理论模型，它避免了复杂的自协调迭代计算，但给出了从 JKR 到 DMT 的一致转变，其转变参数 (称为 Maugis 数) 定义为：

$$\lambda = \sigma_0 \left( 9R/2\pi\Delta\gamma E^{*2} \right)^{1/3}. \quad (1.4)$$

式中， $\sigma_0$  为粘着应力。该模型被称为 Maugis-Dugdale (M-D) 模型，它的接触压强为：

$$p(r) = \begin{cases} \frac{2E^*}{\pi R} \sqrt{a^2 - r^2} - \frac{2\sigma_0}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2 - r^2}}, & r \leq a, \\ -\sigma_0, & a \leq r \leq c, \end{cases} \quad (1.5)$$

如图 1.1 的实线所示。图 1.3 给出了上述各接触模型的表面压强随表面间隔的变化情况，并与实际作用势 (如 Lennard-Jones 作用势) 进行了比较。由图可见 M-D 模型采用的 Dugdale 势也是比较粗糙的 [34]。

1997 年, Johnson 和 Greenwood [34] 基于 M-D 模型建立了以 Maugis 数  $\lambda$  (或 Tabor 数  $\mu$ ) 和无量纲载荷  $P/\pi R\Delta\gamma$  为坐标轴的双参数吸附图, 如图 1.4 所示, 该图指出了各近似模型 (Hertz、Bradley、DMT、JKR 和 M-D 模型) 的有效适用范围。2004 年, Shi 和 Zhao 比较了各吸附接触模型, 并研究了无量纲载荷参数的影响 [61]。从图 1.2 统计结果可见, M-D 模型的原始文章 [21] 的年引用率有明显的增长趋势, 这表明 M-D 模型有良好的应用前景, 如将 M-D 模型扩展到具有幂次型表面的轴对称体的接触问题 [23, 62]、振荡载荷下的粘弹性吸附接触问题 [63]、粗糙表面弹塑性吸附接触问题 [64, 65]、具有毛细吸附的接触问题 [66]、二维无滑动接触问题 [43] 等的研究。

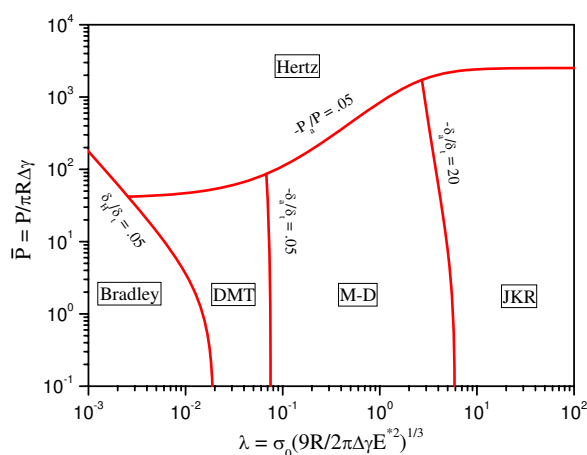


图 1.4: Johnson-Greenwood 吸附图 [34]

Fig. 1.4: Johnson-Greenwood adhesion map [34].

1998 年, Barthel [67] 将 Maugis 模型推广到更为一般的表面相互作用, 以线性、二次和指数等近似作用势为例进行讨论, 发现从 JKR 到 DMT 的转变对作用势的具体形式并不敏感。同年, Greenwood 和 Johnson [68] 还采用双 Hertz 型近似表面压强分布作了讨论, 结果显示它与 M-D 模型有同样效果。从这些研究中可以发现对于 Maugis 模型采用什么样的近似作用势可能不是那么重要, 因为该模型有效地近似考虑了表面变形与表面相互作用的协调关系, 而加深对 Dugdale 势的认识将有利于在实际问题中确定材料参数。然而在 M-D 模型中粘着应力  $\sigma_0$  并不是一个容易确定的材料参数。在 Maugis 的论文 [21] 中, 为匹配

Lennard-Jones 作用势, 粘着应力  $\sigma_0$  被取为理论应力  $\sigma_{th} \doteq 1.026\Delta\gamma/z_0$ , 它对应于  $\lambda \doteq 1.157\mu$ 。这种取法过于随意 [34], 不过文献中也没有其它更好的建议 [68]。实际上采用这样简单的作用势是不可能存在精确的粘着应力  $\sigma_0$  使之匹配于给定的作用势 [53], 那么如何有效的加以近似将有助于提高该模型的有效性, 因此我们将在这个方面做些有意义的尝试 [69]。

### 1.3 本文工作目的和简介

本研究首先将完全自洽模型和 Maugis 模型分别加以推广, 使之能够适用于具有任意表面形状和任意表面相互作用的轴对称弹性体的轴向吸附接触问题, 然后着重解决如何确定粘着应力  $\sigma_0$  这一重要参数的问题, 使之能够更好地应用于实际问题。在理论推导方面从一般到特殊, 并通过应用实例加深理解。

第二章作为后续接触问题研究的理论基础, 介绍并使用积分变换的方法推导了弹性半空间轴对称问题在边界上给定切向应力、在边界的某个圆域内给定正向位移和在圆域外给定正向应力的混合边值条件下的解, 并就纯应力和无摩擦两种特殊的边界条件分别进行了简化。

在第三章中, 利用弹性轴对称半空间在纯应力边界条件下的解, 研究了两个具有任意表面形状和任意相互作用的轴对称弹性体的轴向吸附接触问题。在无摩擦和无相对滑动两种情况下分别建立了完全自洽模型, 并归结到了相同的无量纲形式, 进而在控制方式、迭代方法和数值积分等方面对数值计算方法进行了改进和规范。将该一般理论应用到幂次型表面形状和 Lennard-Jones 作用势的问题, 计算得到了完整的载荷—位移曲线, 讨论了摩擦在接触过程中的作用, 并研究了拔出力等重要参数。本章最后研究了二维正向无摩擦吸附接触问题。

在第四章中, 对于任意有效的表面形状和任意形式的表面吸附, 利用弹性轴对称半空间在无摩擦边界条件下的解, 并利用应力非奇异条件和 Griffith 关系, 研究了两个轴对称弹性体的无摩擦轴向吸附接触问题, 建立了广义 Maugis 模型。将一般理论应用到特殊的吸附作用和特殊的表面形状, 给出了使用方便的理论式子, 并深入讨论了具有幂次型表面的情况。

在第五章中, 为了使 Maugis 模型尽可能地匹配给定作用势下的完全自洽模型, 我们将以推广的接触模型为基础, 从一般化的角度对 Maugis 模型补充了一个关系式, 从而给出粘着应力  $\sigma_0$  的新的建议值。进而讨论了具有幂次型表面的轴对称弹性体接触中采用 Dugdale 势分别近似匹配 Lennard-Jones 作用势和更加一般化的 Lennard-Jones 作用势的问题, 还讨论了理想球体和半空间接触中

采用 Dugdale 势近似匹配 Lennard-Jones 作用势的问题。

第六章对全文的研究工作进行总结，并指出进一步工作的发展方向。

## 第二章 弹性半空间轴对称问题

### 2.1 引言

弹性半空间轴对称变形问题的解是轴对称弹性体吸附接触模型的理论基础。在经典的连续介质接触理论中往往假定接触体的表面理想光滑 [10], 因而可以不考虑接触体表面间的摩擦对接触行为的影响, 以至于在求解半空间问题时可以直接忽略边界上的切向应力。本章将边界上任意形式的切向应力纳入弹性半空间的轴对称变形问题中, 介绍并采用积分变换的方法求解一类应力和位移的混合边值问题。

弹性轴对称问题的解可以表示成 Boussinesq-Galerkin 解、Papkovich-Neuber 解、Muki 解、Love 解等多种形式 [70–73]。这些解在许多著作都有介绍, 如 Sneddon 的著作 [71] 介绍了 Muki 解, Gladwell 的著作 [72] 介绍了 Papkovich-Neuber 解, Maugis 的著作 [73] 介绍了 Love 解, 将其中任意一种形式和半空间的边界条件联立即可进一步确定弹性半空间轴对称变形问题的解。弹性半空间混合边值问题首先为 Boussinesq [74] 所研究, 他考虑的特殊情况是刚性的平头圆柱和半空间的接触问题。随后, 许多特殊情况都得到了研究 [75, 76], 我们不准备罗列各种特殊情况的解, 因为采用积分变换的方法可以很规范地推导出相应的解。采用积分变换求解数学物理偏微分方程, 是由 D'Alembert、Daniel Bernoulli 和 Euler 在十八世纪中叶引进的分离变量法所奠基的 [72]。求解半空间问题通常采用 Hankel 变换的方法, 这或许是由 Harding 和 Sennett [77] 首次引进的 [72]。实际上, Hankel 变换是多维 Fourier 变换转换到极坐标下的形式 [72], 它可以很方便地处理轴对称问题。

本章首先介绍弹性轴对称问题的基本方程和 Love 解, 并介绍使用 Hankel 变换求解半空间轴对称问题的方法, 然后在此基础上推导含有切向应力的混合边值问题, 最后就纯应力和无切向应力两种边界条件的情况分别进行简化。

### 2.2 弹性半空间轴对称问题简介 [71–73]

#### 2.2.1 弹性轴对称问题的基本方程

在柱坐标系  $(r, \theta, z)$  中, 如图 2.1, 轴对称问题的变形场、应变场和应力场都只取决于径向坐标  $r$  和轴向坐标  $z$ 。对于弹性体  $i$  的无体力静态轴对称问题, 它

的微元有如下基本方程 [71–73]。

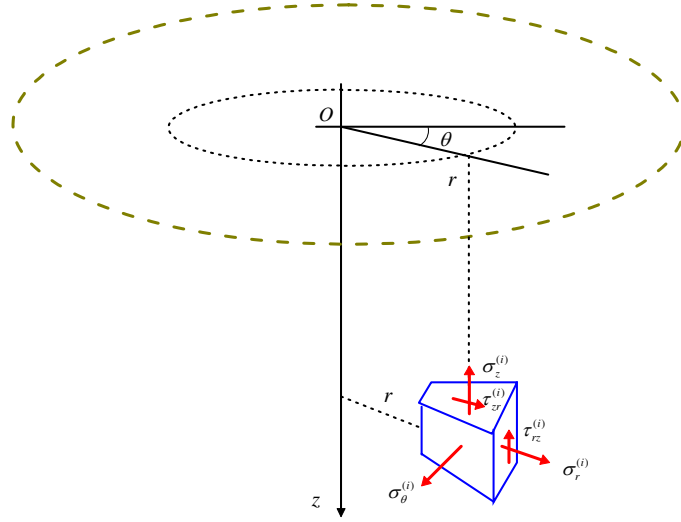


图 2.1: 柱坐标系下轴对称变形体的微元的应力分量 [73]

Fig. 2.1: The stress components of a small volume element of an axisymmetrically deformed solid in a cylindrical coordinate system [73].

(1) 应力平衡方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}^{(i)}}{\partial z} + \frac{\sigma_r^{(i)} - \sigma_\theta^{(i)}}{r} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z^{(i)}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}^{(i)}}{r} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

(2) 几何方程:

$$\begin{cases} \varepsilon_r^{(i)} = \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(i)} = 0, \\ \varepsilon_\theta^{(i)} = \frac{u_r^{(i)}}{r}, \quad \varepsilon_{rz}^{(i)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_z^{(i)} = \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\theta z}^{(i)} = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

(3) 本构关系:

$$\begin{cases} \varepsilon_r^{(i)} = \left[ \sigma_r^{(i)} - \nu_i (\sigma_\theta^{(i)} + \sigma_z^{(i)}) \right] / E_i, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(i)} = (1 + \nu_i) \tau_{r\theta}^{(i)} / E_i, \\ \varepsilon_\theta^{(i)} = \left[ \sigma_\theta^{(i)} - \nu_i (\sigma_z^{(i)} + \sigma_r^{(i)}) \right] / E_i, \quad \varepsilon_{rz}^{(i)} = (1 + \nu_i) \tau_{rz}^{(i)} / E_i, \\ \varepsilon_z^{(i)} = \left[ \sigma_z^{(i)} - \nu_i (\sigma_r^{(i)} + \sigma_\theta^{(i)}) \right] / E_i, \quad \varepsilon_{\theta z}^{(i)} = (1 + \nu_i) \tau_{\theta z}^{(i)} / E_i, \end{cases} \quad (2.3)$$

或者

$$\begin{cases} \sigma_r^{(i)} = \lambda_i \varepsilon^{(i)} + 2\mu_i \varepsilon_r^{(i)}, & \tau_{r\theta}^{(i)} = 2\mu_i \varepsilon_{r\theta}^{(i)}, \\ \sigma_\theta^{(i)} = \lambda_i \varepsilon^{(i)} + 2\mu_i \varepsilon_\theta^{(i)}, & \tau_{rz}^{(i)} = 2\mu_i \varepsilon_{rz}^{(i)}, \\ \sigma_z^{(i)} = \lambda_i \varepsilon^{(i)} + 2\mu_i \varepsilon_z^{(i)}, & \tau_{\theta z}^{(i)} = 2\mu_i \varepsilon_{\theta z}^{(i)}, \end{cases} \quad (2.3')$$

式中, 体积应变  $\varepsilon^{(i)} = \varepsilon_r^{(i)} + \varepsilon_\theta^{(i)} + \varepsilon_z^{(i)}$ , 杨氏模量  $E_i$ , 泊松比  $\nu_i$ , 以及 Lamé 常数  $\lambda_i = E_i \nu_i / [(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)]$  和  $\mu_i = E_i / 2(1 + \nu_i)$ 。

(4) 应力形式的协调方程:

$$\begin{cases} \nabla^2 \sigma_r^{(i)} - \frac{2}{r^2} (\sigma_r^{(i)} - \sigma_\theta^{(i)}) + \frac{1}{1 + \nu_i} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \Theta^{(i)} = 0, \\ \nabla^2 \sigma_\theta^{(i)} + \frac{2}{r^2} (\sigma_r^{(i)} - \sigma_\theta^{(i)}) + \frac{1}{1 + \nu_i} \frac{\partial}{r \partial r} \Theta^{(i)} = 0, \\ \nabla^2 \sigma_z^{(i)} + \frac{1}{1 + \nu_i} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Theta^{(i)} = 0, \\ \nabla^2 \tau_{rz}^{(i)} - \frac{1}{r^2} \tau_{rz}^{(i)} + \frac{1}{1 + \nu_i} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \Theta^{(i)} = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

式中, 应力第一不变量  $\Theta^{(i)} = \sigma_r^{(i)} + \sigma_\theta^{(i)} + \sigma_z^{(i)}$ , 柱坐标系下的 Laplace 算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

该协调方程也称为柱坐标系下不计体力的 Beltrami-Michell 方程, 它是通过将本构关系代入应变形式的协调方程并利用平衡方程得到的。

### 2.2.2 弹性轴对称问题的 Love 解

弹性轴对称问题的解有多种形式, 本文采用 Love 解 [70] 的形式。引入 Love 应力函数  $\Phi_i(r, z)$ , 它满足双调和方程:

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi_i = 0. \quad (2.5)$$

应力场可以表示为:

$$\begin{cases} \sigma_r^{(i)}(r, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_i \nabla^2 \Phi_i - \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r^2} \right), \\ \sigma_\theta^{(i)}(r, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_i \nabla^2 \Phi_i - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \right), \\ \sigma_z^{(i)}(r, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2 - \nu_i) \nabla^2 \Phi_i - \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} \right], \\ \tau_{rz}^{(i)}(r, z) = \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1 - \nu_i) \nabla^2 \Phi_i - \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} \right], \end{cases} \quad (2.6)$$

位移场可以表示为:

$$\begin{cases} 2\mu_i u_r^{(i)}(r, z) = -\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r \partial z}, \\ 2\mu_i u_z^{(i)}(r, z) = 2(1 - \nu_i) \nabla^2 \Phi_i - \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2}. \end{cases} \quad (2.7)$$

### 2.2.3 使用 Hankel 变换求解半空间轴对称问题

双调和方程 (2.5) 可以通过使用 Hankel 变换求解 [73]。

首先将  $\Phi_i(r, z)$  的零阶 Hankel 变换定义为  $\Phi_{0,i}^H(\xi, z)$ , 即写作:

$$\mathcal{H}_0[\Phi_i(r, z); r \rightarrow \xi] = \Phi_{0,i}^H(\xi, z). \quad (2.8)$$

进而可以导出  $\nabla^2 \Phi_i(r, z)$  的零阶 Hankel 变换 (参见 Gladwell 著作 [72] 的式 (5.6.20) 或 Maugis 著作 [73] 的式 (2.72)):

$$\mathcal{H}_0[\nabla^2 \Phi_i(r, z); r \rightarrow \xi] = (D_z^2 - \xi^2) \Phi_{0,i}^H(\xi, z), \quad (2.9)$$

式中,  $D_z = \partial/\partial z$ 。在上式中, 使用  $\nabla^2 \Phi_i(r, z)$  替换  $\Phi_i(r, z)$ , 并再次利用上述结果可以得到:

$$\mathcal{H}_0[\nabla^2 \nabla^2 \Phi_i(r, z); r \rightarrow \xi] = (D_z^2 - \xi^2)^2 \Phi_{0,i}^H(\xi, z). \quad (2.10)$$

在这样的变换下, 求解双调和方程 (2.5) 等价于求解  $\Phi_{0,i}^H(\xi, z)$  关于  $z$  的常微分方程:

$$(D_z^2 - \xi^2)^2 \Phi_{0,i}^H(\xi, z) = 0. \quad (2.11)$$

该方程的一般解为:

$$\Phi_{0,i}^H(\xi, z) = (A_i(\xi) + B_i(\xi)\xi z) e^{-\xi z} + (C_i(\xi) + D_i(\xi)\xi z) e^{\xi z}. \quad (2.12)$$

利用上述变换可以进一步把位移场和应力场表示出来 (参见 Maugis 著作 [73] 的式 (2.73-2.79)), 位移场为:

$$\begin{cases} 2\mu_i u_r^{(i)} = \mathcal{H}_1[\xi D_z \Phi_{0,i}^H; \xi \rightarrow r], \\ 2\mu_i u_z^{(i)} = \mathcal{H}_0[(1 - 2\nu_i) D_z^2 \Phi_{0,i}^H - 2(1 - \nu_i) \xi^2 \Phi_{0,i}^H; \xi \rightarrow r], \end{cases} \quad (2.13)$$



应力场为:

$$\begin{cases} \sigma_r^{(i)} = \mathcal{H}_0[\nu_i D_z^3 \Phi_{0,i}^H + (1 - \nu_i) \xi^2 D_z \Phi_{0,i}^H; r] - \frac{1}{r} \mathcal{H}_1[\xi D_z \Phi_{0,i}^H; \xi \rightarrow r], \\ \sigma_\theta^{(i)} = \mathcal{H}_0[\nu_i D_z^3 \Phi_{0,i}^H - \nu_i \xi^2 D_z \Phi_{0,i}^H; \xi \rightarrow r] + r^{-1} \mathcal{H}_1[\xi D_z \Phi_{0,i}^H; \xi \rightarrow r], \\ \sigma_z^{(i)} = \mathcal{H}_0[(1 - \nu_i) D_z^3 \Phi_{0,i}^H - (2 - \nu_i) \xi^2 D_z \Phi_{0,i}^H; \xi \rightarrow r], \\ \tau_{rz}^{(i)} = \mathcal{H}_1[\nu_i \xi D_z^2 \Phi_{0,i}^H + (1 - \nu_i) \xi^3 \Phi_{0,i}^H; \xi \rightarrow r]. \end{cases} \quad (2.14)$$

考虑到在无穷远处应力都变成零,  $\Phi_{0,i}^H(\xi, z)$  的解 (2.12) 重新写作:

$$\Phi_{0,i}^H(\xi, z) = (A_i(\xi) + B_i(\xi)\xi z) e^{-\xi z}. \quad (2.15)$$

它的  $k$  阶导数为:

$$D_z^k \Phi_{0,i}^H(\xi, z) = (-\xi)^k (A_i - kB_i + B_i \xi z) e^{-\xi z}. \quad (2.16)$$

代入位移场 (2.13) 和应力场 (2.14), 有:

$$\begin{cases} 2\mu_i u_r^{(i)} = -\mathcal{H}_1[\xi^2 (A_i - B_i + B_i \xi z) e^{-\xi z}; \xi \rightarrow r], \\ 2\mu_i u_z^{(i)} = -\mathcal{H}_0[\xi^2 (A_i + 2(1 - 2\nu_i)B_i + B_i \xi z) e^{-\xi z}; \xi \rightarrow r], \end{cases} \quad (2.17)$$

和

$$\begin{cases} \sigma_r^{(i)} = -\mathcal{H}_0[\xi^3 (A_i - (1 + 2\nu_i)B_i + B_i \xi z) e^{-\xi z}; \xi \rightarrow r] \\ \quad + r^{-1} \mathcal{H}_1[\xi^2 (A_i - B_i + B_i \xi z) e^{-\xi z}; \xi \rightarrow r], \\ \sigma_\theta^{(i)} = \mathcal{H}_0[2\nu_i \xi^3 B_i e^{-\xi z}; \xi \rightarrow r] \\ \quad - r^{-1} \mathcal{H}_1[\xi^2 (A_i - B_i + B_i \xi z) e^{-\xi z}; \xi \rightarrow r], \\ \sigma_z^{(i)} = \mathcal{H}_0[\xi^3 (A_i + (1 - 2\nu_i)B_i + B_i \xi z) e^{-\xi z}; \xi \rightarrow r], \\ \tau_{rz}^{(i)} = \mathcal{H}_1[\xi^3 (A_i - 2\nu_i B_i + B_i \xi z) e^{-\xi z}; \xi \rightarrow r], \end{cases} \quad (2.18)$$

式中, 函数  $A_i(\xi)$  和  $B_i(\xi)$  需要在特定的边界条件下才能确定出来。

### 2.3 混合边界条件下的解

本节利用积分变换进一步求解弹性半空间的这样一类混合边值问题, 它在边界上给定切向应力  $\tau_{rz}^{(i)}$ , 而在半径为  $a$  的圆域内给定正向位移  $u_z^{(i)}$ , 在圆域外给定正向应力  $\sigma_z^{(i)}$ , 记作:

$$\begin{cases} u_z^{(i)}(r, 0) = w_i(r), & r \leq a, \\ \sigma_z^{(i)}(r, 0) = \sigma_i(r), & r \geq a, \\ \tau_{rz}^{(i)}(r, 0) = \tau_i(r), & r \geq 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

### 2.3.1 使用积分变换表示的形式解

在边界  $z = 0$  上, 由式 (2.17) 和 (2.18) 可得径向位移和正向位移分别为:

$$\begin{cases} 2\mu_i u_r^{(i)}(r, 0) = -\mathcal{H}_1[\xi^2 (A_i - B_i); \xi \rightarrow r], \\ 2\mu_i u_z^{(i)}(r, 0) = -\mathcal{H}_0[\xi^2 (A_i + 2(1 - 2\nu_i)B_i); \xi \rightarrow r], \end{cases} \quad (2.20)$$

而正向应力和切向应力为:

$$\begin{cases} \sigma_z^{(i)}(r, 0) = \mathcal{H}_0[\xi^3 (A_i + (1 - 2\nu_i)B_i); \xi \rightarrow r] \\ \tau_{rz}^{(i)}(r, 0) = \mathcal{H}_1[\xi^3 (A_i - 2\nu_i B_i); \xi \rightarrow r] \end{cases} \quad (2.21)$$

我们记

$$\begin{cases} \alpha_i(\xi) = -\xi^3 (A_i(\xi) + (1 - 2\nu_i)B_i(\xi)), \\ \beta_i(\xi) = -\xi^3 (A_i(\xi) - 2\nu_i B_i(\xi)), \end{cases} \quad (2.22)$$

或者

$$\begin{cases} A_i(\xi) = -\xi^{-3} (2\nu_i \alpha_i(\xi) + (1 - 2\nu_i)\beta_i(\xi)), \\ B_i(\xi) = -\xi^{-3} (\alpha_i(\xi) - \beta_i(\xi)). \end{cases} \quad (2.22')$$

径向位移和正向位移可以写作:

$$\begin{cases} 2\mu_i u_r^{(i)}(r, 0) = \mathcal{H}_1[\xi^{-1} (2(1 - \nu_i)\beta_i(\xi) - (1 - 2\nu_i)\alpha_i(\xi)); \xi \rightarrow r], \\ 2\mu_i u_z^{(i)}(r, 0) = \mathcal{H}_0[\xi^{-1} (2(1 - \nu_i)\alpha_i(\xi) - (1 - 2\nu_i)\beta_i(\xi)); \xi \rightarrow r], \end{cases}$$

或者写作:

$$\begin{cases} E_i^* u_r^{(i)}(r, 0) = \mathcal{H}_1[\xi^{-1} (2\beta_i(\xi) - (1 - \nu_i^*)\alpha_i(\xi)); \xi \rightarrow r], \\ E_i^* u_z^{(i)}(r, 0) = \mathcal{H}_0[\xi^{-1} (2\alpha_i(\xi) - (1 - \nu_i^*)\beta_i(\xi)); \xi \rightarrow r], \end{cases} \quad (2.23)$$

式中, 等效弹性模量  $E_i^* = E_i/(1 - \nu_i^2) = 2\mu_i/(1 - \nu_i)$  和等效泊松比  $\nu_i^* = \nu_i/(1 - \nu_i)$ 。正向应力和切向应力写作:

$$\begin{cases} \sigma_z^{(i)}(r, 0) = -\mathcal{H}_0[\alpha_i(\xi); \xi \rightarrow r], \\ \tau_{rz}^{(i)}(r, 0) = -\mathcal{H}_1[\beta_i(\xi); \xi \rightarrow r]. \end{cases} \quad (2.24)$$

定义函数  $\Phi_i(s)$  的 Fourier 余弦变换<sup>1</sup> 和  $\Psi_i(s)$  的 Fourier 正弦变换分别对应于函数  $\alpha_i(\xi)$  和  $\beta_i(\xi)$ , 记作:

$$\begin{cases} \alpha_i(\xi) = \mathcal{F}_c[\Phi_i(s); s \rightarrow \xi] = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty \Phi_i(s) \cos(\xi s) ds, \\ \beta_i(\xi) = \mathcal{F}_s[\Psi_i(s); s \rightarrow \xi] = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty \Psi_i(s) \sin(\xi s) ds. \end{cases} \quad (2.25)$$

这两个式子的两边分别同乘以  $\xi^{-1}$ , 并作一阶 Hankel 变换 (A.35), 进而利用积分变换关系式 (A.45) 和 (A.46) 可得:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1[\xi^{-1}\alpha_i(\xi); \xi \rightarrow r] &= r^{-1}\mathcal{F}_c[\Phi_i(s); s \rightarrow 0] - r^{-1}\mathcal{A}_2[s\Phi_i(s); s \rightarrow r], \\ \mathcal{H}_1[\xi^{-1}\beta_i(\xi); \xi \rightarrow r] &= \mathcal{H}_1[\xi^{-1}\mathcal{F}_s[\Psi_i(s); s \rightarrow \xi]; \xi \rightarrow r] = r^{-1}\mathcal{A}_1[s\Psi_i(s); s \rightarrow r]. \end{aligned}$$

同理, 利用积分变换关系式 (A.43) 和 (A.44) 可得:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0[\xi^{-1}\alpha_i(\xi); \xi \rightarrow r] &= \mathcal{H}_0[\xi^{-1}\mathcal{F}_c[\Phi_i(s); s \rightarrow \xi]; \xi \rightarrow r] = \mathcal{A}_1[\Phi_i(s); s \rightarrow r], \\ \mathcal{H}_0[\xi^{-1}\beta_i(\xi); \xi \rightarrow r] &= \mathcal{H}_0[\xi^{-1}\mathcal{F}_s[\Psi_i(s); s \rightarrow \xi]; \xi \rightarrow r] = \mathcal{A}_2[\Psi_i(s); s \rightarrow r]. \end{aligned}$$

因此, 边界上的位移 (2.23) 可以重新写作:

$$\begin{cases} E_i^* u_r^{(i)}(r, 0) = 2r^{-1}\mathcal{A}_1[s\Psi_i(s); s \rightarrow r] - (1 - \nu_i^*)r^{-1}\mathcal{F}_c[\Phi_i(s); s \rightarrow 0] \\ \quad + (1 - \nu_i^*)r^{-1}\mathcal{A}_2[s\Phi_i(s); s \rightarrow r], \\ E_i^* u_z^{(i)}(r, 0) = 2\mathcal{A}_1[\Phi_i(s); s \rightarrow r] - (1 - \nu_i^*)\mathcal{A}_2[\Psi_i(s); s \rightarrow r]. \end{cases} \quad (2.26)$$

将式 (2.25) 的两边同乘以  $\xi$ , 并分别进行分部积分可得:

$$\begin{cases} \alpha_i(\xi)\xi = -\mathcal{F}_s[\Phi_i'(s); s \rightarrow \xi], \\ \beta_i(\xi)\xi = \sqrt{2/\pi}\Psi_i(0) + \mathcal{F}_c[\Psi_i'(s); s \rightarrow \xi], \end{cases} \quad (2.27)$$

其中, 已取  $\Phi_i(\infty) = \Psi_i(\infty) = 0$ , 这是由所有应力分量在无穷远处都趋于零的条件决定的。将式 (2.27a) 两边同乘以  $\xi^{-1}$ , 并作零阶 Hankel 变换 (A.35), 进而利用积分变换关系式 (A.44) 可得:

$$\mathcal{H}_0[\alpha_i(\xi); \xi \rightarrow r] = -\mathcal{H}_0[\xi^{-1}\mathcal{F}_s[\Phi_i'(s); s \rightarrow \xi]; \xi \rightarrow r] = -\mathcal{A}_2[\Phi_i'(s); s \rightarrow r].$$

同理, 对于式 (2.27b), 利用积分变换关系式 (A.45), 并考虑到  $\mathcal{H}_1[\xi^{-1}; \xi \rightarrow r] = r^{-1}$  以及  $\mathcal{F}_c[\Psi_i'(s); s \rightarrow 0] = -\sqrt{2/\pi}\Psi_i(0)$ , 可得:

$$\mathcal{H}_1[\beta_i(\xi); \xi \rightarrow r] = -r^{-1}\mathcal{A}_2[s\Psi_i'(s); s \rightarrow r].$$

<sup>1</sup>这里定义的函数  $\Phi_i(s)$  的符号  $\Phi$  采用斜体书写, 区别于 Love 应力函数  $\Phi_i(r, z)$  的符号  $\Phi$  采用正体书写。

因此, 边界上的应力 (2.24) 可以表示成:

$$\begin{cases} \sigma_z^{(i)}(r, 0) = \mathcal{A}_2[\Phi'_i(s); s \rightarrow r], \\ \tau_{rz}^{(i)}(r, 0) = r^{-1} \mathcal{A}_2[s\Psi'_i(s); s \rightarrow r]. \end{cases} \quad (2.28)$$

### 2.3.2 一类混合边界条件下的解

下面我们可以开始考虑在混合边界条件 (2.19) 下的解。

对于  $r \geq 0$ , 联合式 (2.19c) 和式 (2.28b), 我们有:

$$\tau_{rz}^{(i)}(r, 0) = r^{-1} \mathcal{A}_2[s\Psi'_i(s); s \rightarrow r] = \tau_i(r), \quad r \geq 0. \quad (2.29)$$

利用 Abel 逆变换 (A.41), 我们立即得到:

$$\Psi'_i(s) = s^{-1} \mathcal{A}_2^{-1}[t\tau_i(t); t \rightarrow s] = -\mathcal{A}_2[(t\tau_i(t))'; t \rightarrow s], \quad s \geq 0. \quad (2.30)$$

考虑到  $\Psi_i(\infty) = 0$ , 我们对上式两边分别积分, 并对右边交换积分顺序, 整理得:

$$\Psi_i(s) = \int_s^\infty \mathcal{A}_2[(t\tau_i(t))'; t \rightarrow \rho] d\rho = \sqrt{2/\pi} \int_s^\infty (t\tau_i(t))' \arccos(s/t) dt.$$

再考虑到  $\tau_i(\infty) = 0$ , 我们对上式进行分部积分, 并利用 Abel 变换 (A.40), 则有:

$$\Psi_i(s) = -\sqrt{2/\pi} \int_s^\infty \frac{s\tau_i(t)}{\sqrt{t^2 - s^2}} dt = -s \mathcal{A}_2[\tau_i(t); t \rightarrow s], \quad s \geq 0. \quad (2.31)$$

对于  $r \geq a$ , 联合式 (2.19b) 和式 (2.28a), 可得:

$$\sigma_z^{(i)}(r, 0) = \mathcal{A}_2[\Phi'_i(s); s \rightarrow r] = \sigma_i(r), \quad r \geq a. \quad (2.32)$$

同样利用 Abel 逆变换 (A.41), 我们立即得到:

$$\Phi'_i(s) = \mathcal{A}_2^{-1}[\sigma_i(t); t \rightarrow s] = -D_s \mathcal{A}_2[t\sigma_i(t); t \rightarrow s], \quad s \geq a, \quad (2.33)$$

式中,  $D_s = \partial/\partial s$ 。考虑到  $\Phi_i(\infty) = 0$ , 上式积分可得:

$$\Phi_i(s) = -\mathcal{A}_2[t\sigma_i(t); t \rightarrow s] = -\sqrt{2/\pi} \int_s^\infty \frac{t\sigma_i(t)}{\sqrt{t^2 - s^2}} dt, \quad s \geq a. \quad (2.34)$$

对于  $r \leq a$ , 联合式 (2.19a) 和式 (2.26b), 可得:

$$2\mathcal{A}_1[\Phi_i(s); s \rightarrow r] - (1 - \nu_i^*) \mathcal{A}_2[\Psi_i(s); s \rightarrow r] = E_i^* w_i(r), \quad r \leq a. \quad (2.35)$$

由式 (2.31), 上式左边第二项相关的 Abel 变换可以写作:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2[\Psi_i(s); s \rightarrow r] &= -\mathcal{A}_2[s\mathcal{A}_2[\tau_i(t); t \rightarrow s]; s \rightarrow r] \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_r^\infty \int_s^\infty \frac{s\tau_i(t)}{\sqrt{(s^2 - r^2)(t^2 - s^2)}} dt ds\end{aligned}$$

进一步交换积分顺序可得:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2[\Psi_i(s); s \rightarrow r] &= -\frac{2}{\pi} \int_r^\infty \tau_i(t) \int_r^t \frac{s}{\sqrt{(s^2 - r^2)(t^2 - s^2)}} ds dt \\ &= -\int_r^\infty \tau_i(t) dt.\end{aligned}\quad (2.36)$$

利用 Abel 逆变换 (A.38), 我们有:

$$\Phi_i(s) = \frac{1}{2} \mathcal{A}_1^{-1}[E_i^* w_i(t) - (1 - \nu_i^*) \int_t^\infty \tau_i(\rho) d\rho; t \rightarrow s], \quad s \leq a,$$

或者写作:

$$\Phi_i(s) = \frac{1}{2} E_i^* \left( \sqrt{2/\pi} w_i^*(0) + s \mathcal{A}_1[w_i^{*'}(t); t \rightarrow s] \right), \quad s \leq a, \quad (2.37)$$

式中,

$$w_i^*(t) = w_i(t) - \frac{1 - \nu_i^*}{E_i^*} \int_t^\infty \tau_i(\rho) d\rho. \quad (2.38)$$

这样我们得到函数  $\Phi_i(s)$  和  $\Psi_i(s)$  分别为:

$$\Phi_i(s) = \begin{cases} \sqrt{2/\pi} \phi_i(s), & s \leq a, \\ \sqrt{2/\pi} \varphi_i(s), & s \geq a, \end{cases} \quad (2.39)$$

和

$$\Psi_i(s) = \sqrt{2/\pi} \psi_i(s), \quad s \geq 0, \quad (2.40)$$

其中,

$$\begin{cases} \phi_i(s) = \frac{E_i^*}{\pi} \left[ w_i^*(0) + s \int_0^s \frac{w_i^{*'}(t)}{\sqrt{s^2 - t^2}} dt \right], \\ \varphi_i(s) = -\frac{2}{\pi} \int_s^\infty \frac{t\sigma_i(t)}{\sqrt{t^2 - s^2}} dt, \\ \psi_i(s) = -\frac{2}{\pi} \int_s^\infty \frac{s\tau_i(t)}{\sqrt{t^2 - s^2}} dt. \end{cases} \quad (2.41)$$

将它们代入式 (2.26) 和式 (2.28) 可进一步导出边界上的径向位移  $u_r^{(i)}(r, 0)$ 、圆域外的正向位移  $u_z^{(i)}(r, 0)$  和圆域内的正向应力  $\sigma_z^{(i)}(r, 0)$ , 以及边界上的正向合力  $P_i$ 。下面我们逐一进行推导。

## (1) 边界上的径向位移

首先, 我们利用附录的式 (A.56) 的推导, 可得:

$$\mathcal{A}_1[s\psi_i(s); s \rightarrow r] = \int_0^r \frac{s\psi_i(s)}{\sqrt{r^2 - s^2}} ds = -r \int_0^\infty t\tau_i(t)W_{1,1}^0(t, r) dt, \quad r \geq 0,$$

式中, Weber-Schafheitlin 型积分  $W_{1,1}^0(t, r)$  有多种表示形式, 见式 (A.55)。其次, 我们可以得到:

$$\mathcal{F}_c[\Phi_i(s); s \rightarrow 0] = \int_0^a \phi_i(s) ds + \int_a^\infty \varphi_i(s) ds,$$

其中将式 (2.41) 代入并交换积分顺序整理得:

$$\begin{aligned} \int_0^a \phi_i(s) ds &= \frac{a}{\pi} E_i^* w_i^*(0) + \frac{E_i^*}{\pi} \int_0^a w_i^{*'}(t) \sqrt{a^2 - t^2} dt, \\ \int_a^\infty \varphi_i(s) ds &= -\frac{2}{\pi} \int_a^\infty t\sigma_i(t) \arccos(a/t) dt. \end{aligned}$$

最后, 分两种情况讨论可得:

$$\mathcal{A}_2[s\Phi_i(s); s \rightarrow r] = \begin{cases} \int_r^a \frac{s\phi_i(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds + \int_a^\infty \frac{s\varphi_i(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds, & r \leq a, \\ \int_r^\infty \frac{s\varphi_i(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds, & r \geq a, \end{cases}$$

其中将式 (2.41) 代入并交换积分顺序等操作后整理可得:

$$\begin{aligned} \int_r^a \frac{s\phi_i(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds &= \frac{1}{\pi} E_i^* w_i^*(0) \sqrt{a^2 - r^2} + \frac{E_i^*}{\pi} \int_r^a \int_0^s \frac{s^2 w_i^{*'}(t)}{\sqrt{(s^2 - t^2)(s^2 - r^2)}} dt ds, \\ \int_a^\infty \frac{s\varphi_i(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds &= -\frac{2}{\pi} \int_a^\infty t\sigma_i(t) \arctan \sqrt{\frac{a^2 - t^2}{r^2 - a^2}} dt, \\ \int_r^\infty \frac{s\varphi_i(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds &= -\int_r^\infty t\sigma_i(t) dt. \end{aligned}$$

因此, 将以上结果代入式 (2.26a) 即得边界上的径向位移:

$$\begin{aligned} u_r^{(i)}(r, 0) &= \frac{2}{E_i^* r} \int_0^r \frac{s\psi_i(s)}{\sqrt{r^2 - s^2}} ds - \frac{1 - \nu_i^*}{E_i^* r} \left( \int_0^a \phi_i(s) ds + \int_a^\infty \varphi_i(s) ds \right) \\ &+ \frac{1 - \nu_i^*}{E_i^* r} \begin{cases} \left( \int_r^a \frac{s\phi_i(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds + \int_a^\infty \frac{s\varphi_i(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds \right), & r \leq a, \\ \int_r^\infty \frac{s\varphi_i(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds, & r \geq a. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.42)$$

## (2) 圆域外的正向位移

类似于上面的推导, 我们可以得到:

$$\mathcal{A}_1[\Phi_i(s); s \rightarrow r] = \int_0^a \frac{\phi_i(s)}{\sqrt{r^2 - s^2}} ds + \int_a^r \frac{\varphi_i(s)}{\sqrt{r^2 - s^2}} ds, \quad r \geq a,$$

$$\mathcal{A}_2[\Psi_i(s); s \rightarrow r] = \int_r^\infty \frac{\psi_i(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds, \quad r \geq 0,$$

其中,

$$\int_0^a \frac{\phi_i(s)}{\sqrt{r^2 - s^2}} ds = \frac{E_i^*}{\pi} w_i^*(0) \arcsin(a/r) + \frac{E_i^*}{\pi} \int_0^a w_i^{*'}(t) \arctan \sqrt{\frac{a^2 - t^2}{r^2 - a^2}} dt,$$

$$\int_a^r \frac{\varphi_i(s)}{\sqrt{r^2 - s^2}} ds = -\frac{2}{\pi} \int_a^r \int_s^\infty \frac{t\sigma_i(t)}{\sqrt{(r^2 - s^2)(t^2 - s^2)}} dt ds,$$

$$\int_r^\infty \frac{\psi_i(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = -\int_r^\infty \tau_i(t) dt.$$

因此, 由式 (2.26a), 我们有圆域外的正向位移为:

$$\begin{aligned} u_z^{(i)}(r, 0) &= \frac{2}{E_i^*} \int_0^a \frac{\phi_i(s)}{\sqrt{r^2 - s^2}} ds + \frac{2}{E_i^*} \int_a^r \frac{\varphi_i(s)}{\sqrt{r^2 - s^2}} ds \\ &\quad - \frac{1 - \nu_i^*}{E_i^*} \int_r^\infty \frac{\psi_i(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds, \quad r \geq a. \end{aligned} \quad (2.43)$$

## (3) 圆域内的正向应力

类似地, 由式 (2.28a), 我们有圆域内的正向应力为

$$\sigma_z^{(i)}(r, 0) = \int_r^a \frac{\phi_i'(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds + \frac{\varphi_i(a) - \phi_i(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \int_a^\infty \frac{\varphi_i'(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds, \quad r \leq a, \quad (2.44)$$

其中,

$$\int_r^a \frac{\phi_i'(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = \frac{E_i^*}{\pi} \int_r^a \int_0^s \frac{(tw_i^{*'}(t))'}{\sqrt{(s^2 - r^2)(s^2 - t^2)}} dt ds,$$

$$\int_a^\infty \frac{\varphi_i'(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds = -\frac{2}{\pi} \int_a^\infty \frac{t\sigma_i(t)}{r^2 - t^2} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{t^2 - a^2}} dt.$$

#### (4) 边界上的正向合力

边界上的正向合力定义为:

$$P_i = - \int_0^{\infty} \sigma_z^{(i)}(r, 0) 2\pi r dr. \quad (2.45)$$

将式 (2.28a) 代入上式, 并交换积分顺序, 可得:

$$P_i = - \int_0^{\infty} \mathcal{A}_2[\Phi_i'(s); s \rightarrow r] 2\pi r dr = -2\sqrt{2\pi} \int_0^{\infty} \Phi_i'(s) s ds.$$

对上式采用分部积分, 并考虑到  $\Phi_i(\infty) = 0$ , 可以得到:

$$P_i = 2\sqrt{2\pi} \int_0^{\infty} \Phi_i(s) ds = 2\pi \int_0^a \phi_i(s) ds + 2\pi \int_a^{\infty} \varphi_i(s) ds, \quad (2.46)$$

其中利用交换积分顺序等数学运算可得:

$$2\pi \int_0^a \phi_i(s) ds = 2aE_i^* w_i^*(0) + 2E_i^* \int_0^a w_i^{*'}(t) \sqrt{a^2 - t^2} dt,$$

$$2\pi \int_a^{\infty} \varphi_i(s) ds = -4 \int_a^{\infty} t\sigma_i(t) \arccos(a/t) dt.$$

因此, 我们得到了边界上的正向合力:

$$P_i = 2E_i^* \left( aw_i(0) + \int_0^a w_i^{*'}(t) \sqrt{a^2 - t^2} dt \right) - 4 \int_a^{\infty} t\sigma_i(t) \arccos(a/t) dt - 2(1 - \nu_i^*) \left( a \int_0^{\infty} \tau_i(\rho) d\rho - \int_0^a \tau_i(t) \sqrt{a^2 - t^2} dt \right). \quad (2.47)$$

## 2.4 两种特殊的边界条件

### 2.4.1 纯应力边界条件

我们考虑的第一种特殊的边界条件是纯应力边界条件, 它在边界上给定正向应力和切向应力, 记为:

$$\begin{cases} \sigma_z^{(i)}(r, 0) = \sigma_i(r), & r \geq 0, \\ \tau_{rz}^{(i)}(r, 0) = \tau_i(r), & r \geq 0. \end{cases} \quad (2.48)$$

这个边界条件相当于把混合边界条件 (2.19) 中的  $a$  看作为零。由式 (2.34) 和 (2.31), 我们立即有:

$$\begin{cases} \Phi_i(s) = -\mathcal{A}_2[t\sigma_i(t); t \rightarrow s] = -\sqrt{2/\pi} \int_s^{\infty} \frac{t\sigma_i(t)}{\sqrt{t^2 - s^2}} dt, & s \geq 0, \\ \Psi_i(s) = -s\mathcal{A}_2[\tau_i(t); t \rightarrow s] = -\sqrt{2/\pi} \int_s^{\infty} \frac{s\tau_i(t)}{\sqrt{t^2 - s^2}} dt, & s \geq 0. \end{cases} \quad (2.49)$$



而边界上的正向合力 (2.47) 改写为:

$$P_i = - \int_0^{\infty} \sigma_i(t) 2\pi t dt, \quad (2.50)$$

这个式子和将边界条件 (2.48a) 直接代入定义式 (2.45) 是一致的。边界上的径向位移 (2.42) 改写为:

$$u_r^{(i)}(r, 0) = - \frac{2}{E_i^*} \int_0^{\infty} t \tau_i(t) W_{1,1}^0(t, r) dt + \frac{1 - \nu_i^*}{E_i^* r} \int_0^r t \sigma_i(t) dt, \quad (2.51)$$

式中, Weber-Schafheitlin 型积分  $W_{1,1}^0(t, r)$  的各种表示形式参见附录的式 (A.55)。边界上的正向位移 (2.43) 改写为<sup>2</sup>:

$$u_z^{(i)}(r, 0) = - \frac{2}{E_i^*} \int_0^{\infty} t \sigma_i(t) W_{0,0}^0(t, r) dt + \frac{1 - \nu_i^*}{E_i^*} \int_r^{\infty} \tau_i(t) dt, \quad (2.52)$$

式中, Weber-Schafheitlin 型积分  $W_{0,0}^0(t, r)$  的各种表示形式参见附录的式 (A.53), 相关的推导如附录的式 (A.54) 所示。

### 2.4.2 无摩擦边界条件

我们考虑的第二种特殊边界条件是无摩擦边界条件, 即为:

$$\begin{cases} u_z^{(i)}(r, 0) = w_i(r), & r \leq a, \\ \sigma_z^{(i)}(r, 0) = \sigma_i(r), & r \geq a, \\ \tau_{rz}^{(i)}(r, 0) = 0, & r \geq 0. \end{cases} \quad (2.53)$$

该边界问题的解可以通过叠加 Sneddon 方法 [79] 和 Lowengrub-Sneddon 方法 [80] 分别给出的解来得到 [81]。本文已经采用积分变换的方法得到了更一般的解, 因此对于无摩擦情况, 我们有  $\Psi_i(s) = 0$  和

$$\Phi_i(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} E_i^* \left( \sqrt{2/\pi} w_i(0) + s \mathcal{A}_1[w_i'(t); t \rightarrow s] \right), & s \leq a, \\ - \mathcal{A}_2[t \sigma_i(t); t \rightarrow s], & s \geq a. \end{cases} \quad (2.54)$$

边界上的正向合力 (2.47) 改写为:

$$P_i = 2E_i^* \left[ a w_i(0) + \int_0^a w_i'(t) \sqrt{a^2 - t^2} dt \right] - 4 \int_a^{\infty} t \sigma_i(t) \arccos(a/t) dt. \quad (2.55)$$

<sup>2</sup>参考文献 [10] 第 77 页公式 (3.98a) 的第二项分母多输入了一个  $\pi$ 。参考文献 [56] 的式 (A3) 和式 (A4), 以及参考文献 [78] 的式 (47-50) 和式 (55-57) 因此需要作相应的修改。

圆域外的正向位移 (2.43) 改写为:

$$u_z^{(i)}(r, 0) = \frac{2}{\pi} w_i(0) \arcsin(a/r) + \frac{2}{\pi} \int_0^a w_i'(t) \arctan \sqrt{\frac{a^2 - t^2}{r^2 - a^2}} dt - \frac{4}{\pi E_i^*} \int_a^r \int_s^\infty \frac{t \sigma_i(t)}{\sqrt{(r^2 - s^2)(t^2 - s^2)}} dt ds, \quad r \geq a. \quad (2.56)$$

圆域内的正向应力 (2.44) 改写为:

$$\sigma_z^{(i)}(r, 0) = -\frac{E_i^*}{\pi \sqrt{a^2 - r^2}} \left[ w_i(0) + a \int_0^a \frac{w_i'(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} + \frac{2}{E_i^*} \int_a^\infty \frac{t \sigma_i(t) dt}{\sqrt{t^2 - a^2}} \right] + \frac{E_i^*}{\pi} \int_r^a \int_0^s \frac{(t w_i'(t))'}{\sqrt{(s^2 - r^2)(s^2 - t^2)}} dt ds - \frac{2}{\pi} \int_a^\infty \frac{t \sigma_i(t)}{r^2 - t^2} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{t^2 - a^2}} dt, \quad r \leq a. \quad (2.57)$$

边界上的径向位移可由式 (2.42) 简化得到, 考虑到其形式比较复杂, 而且在本文余下部分里没有用到, 这里不再赘述。

当  $\sigma_i(r) = 0$  时, 上述式子将退化到 Sneddon 方法 [79] 给出的形式:

$$P_i = 2\pi \int_0^a \phi_i(s) ds = 2E_i^* \left( a w_i(0) + \int_0^a w_i'(t) \sqrt{a^2 - t^2} dt \right), \quad (2.58)$$

$$u_z^{(i)}(r, 0) = \frac{2}{E_i^*} \int_0^a \frac{\phi_i(s)}{\sqrt{r^2 - s^2}} ds, \quad r \geq a, \quad (2.59)$$

$$\sigma_z^{(i)}(r, 0) = \frac{-\phi_i(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \int_r^a \frac{\phi_i'(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds, \quad r \leq a, \quad (2.60)$$

式中,  $\phi_i(s)$  定义为

$$\phi_i(s) = \frac{E_i^*}{\pi} \left[ w_i(0) + s \int_0^s \frac{w_i'(t)}{\sqrt{s^2 - t^2}} dt \right]. \quad (2.61)$$

而当  $w_i(r) = 0$  时, 上述式子将退化到 Lowengrub-Sneddon 方法 [80] 给出的形式:

$$P_i = 2\pi \int_a^\infty \varphi_i(s) ds = -4 \int_a^\infty t \sigma_i(t) \arccos(a/t) dt, \quad (2.62)$$

$$u_z^{(i)}(r, 0) = \frac{2}{E_i^*} \int_a^r \frac{\varphi_i(s)}{\sqrt{r^2 - s^2}} ds, \quad r \geq a, \quad (2.63)$$

$$\sigma_z^{(i)}(r, 0) = \frac{\varphi_i(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \int_a^\infty \frac{\varphi_i'(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds, \quad r \leq a, \quad (2.64)$$

式中,  $\varphi_i(s)$  定义为

$$\varphi_i(s) = -\frac{2}{\pi} \int_s^\infty \frac{t \sigma_i(t)}{\sqrt{t^2 - s^2}} dt. \quad (2.65)$$

## 2.5 本章小结

本章作为后续章节研究两个弹性轴对称体正向吸附接触问题的理论基础,介绍并使用积分变换的方法推导了一类混合边界条件下的弹性半空间轴对称变形问题的解。

首先,介绍了轴对称弹性体微元在柱坐标系下的基本方程,包括平衡方程、几何方程、本构关系和应力形式的协调方程;引入 Love 应力函数介绍了弹性空间轴对称问题的 Love 解,包括位移场和应力场;还介绍了 Hankel 变换求解弹性半空间轴对称问题,并将解表示成含两个待定函数的形式。

其次,对于在边界上给定切向应力,而在某个圆域内给定正向位移并在圆域外给定正向应力的混合边值问题,采用积分变换的方法,其中涉及 Hankel 变换、Fourier 正弦和余弦变换、Abel 变换,求解了边界上的径向位移、圆域外的正向位移和圆域内的正向应力,以及边界上的正向合力。该问题的解可以用以研究考虑表面摩擦的轴对称弹性体的正向吸附接触问题。

最后,就纯应力边界条件和无摩擦边界条件两种特殊的边界条件,将解进行了简化,为推广完全自洽模型和 Maugis 模型进而研究表面形状、表面摩擦和吸附作用对接触行为的影响作了必要的准备工作。

## 第三章 完全自洽模型的推广和应用

### 3.1 引言

二十世纪七十年代末,伴随着一场著名的争议 [28–32],弹性近球体轴向吸附接触的自洽模型逐渐发展起来 [16–20]。自洽模型的实质是建立和求解表面变形和表面相互作用的协调关系。尽管在此之前弹性变形和相互作用的协调行为已广为人知 [16],但由于数学上求解非线性积分方程存在极大的困难,自洽模型的求解和应用至今都还是一个重大的挑战。一方面,从 JKR 模型极高的引用率 [51] 来看,自洽模型越发显得不够吸引人注意,如图 1.2。其原因是 JKR 模型是显式的,在某种程度上已经具有较高的精度,而自洽模型虽然在连续介质范畴内是最为准确的模型,但它需要借助复杂的数值计算方法来迭代求解,很难直接应用到实际问题中。另一方面,经典接触模型往往假设接触体的表面理想光滑 [10],接触表面之间不存在摩擦作用,也往往只对近球体等一些较为简单的几何外形加以讨论,从而限制了理论模型的可扩展性。因此,我们将在扩展完全自洽模型的基础上,进一步改进和规范自洽模型的数值计算方法,以期改善自洽模型不够实用的现状。

1977 年,实验物理学家 Tabor 发表了一份关于表面问题中涉及的相关理论问题的报告 [28]。正是这份报告以及其后所引发的争议 [29–32] 促使了吸附接触自洽模型理论的发展。现在我们知道,有两种类型的自洽模型,按照 Hughes [18] 采用的术语,一类称为完全自洽模型 (FSCM),一类称为受约自洽模型 (RSCM)。有限元方法 [82, 83] 和分子动力学模拟/原子模拟 [84–87] 也应属于自洽理论的范畴,但我们宁愿把它们归到自洽数值方法中。下面我们着重回顾完全自洽模型和受约自洽模型的发展历程。

Tabor 的报告 [28] 指出 DMT 模型 [13] 把表面力和 Hertz 弹性方程结合起来使用的尝试是很有意思的,但是该模型忽略了接触区外的吸附力对变形的影响,进而一针见血地指出变形体的形状同表面力的分布应根据接触力学原理进行自洽处理。这一想法随即在 1979 年促使 Hughes 和 White [16–18] 应用轴对称半空间的 Green 函数来近似接触体的解,从而建立了近球体吸附接触的完全自洽模型。不过其进一步的渐近求解方法过于复杂,很难推广和应用,该解法与从另外一个方面发展起来的数值解法 [19, 20] 相比似乎已经被遗忘了。Hughes [18] 还采用 Hankel 变换 [71] 的方法建立了受约自洽模型,该模型使用 Hertz 理

论模型来计算接触体之间相互作用的势函数的排斥部分引起的变形,而进一步的变形和势函数的吸附部分满足自洽关系。然而,该模型求解的工作量不亚于完全自洽模型,它基本上被 Maugis 模型 [21] 所取代。1998 年,Barthel [67] 就多种相互作用势对受约自洽模型和 Maugis 模型分别进行了推广和比较,他指出前者采用的数值解法如果处理不当将导致错误的结果,而且正确的结果基本上能从 Maugis 模型得到,只是在高精度要求时 Maugis 模型才不能用。事实上,只要对 Maugis 模型进一步补充,在高精度下仍能达到要求。我们将在第 4 章进一步推广 Maugis 模型,并在第 5 章对 Maugis 模型补充一个关系式,使之能够近似匹配给定的作用势。

Tabor [28] 对 DMT 模型的见解,引起了 Derjaguin 等 [29] 与他的分歧。1978 年,Derjaguin 等 [29] 指出 DMT 和 JKR 模型都有其应用的领域,因而坚持认为 DMT 模型不是错误的。同年,Tabor [30] 指出 Derjaguin 等 [29] 误认为他说 JKR 模型“总是正确的”,并重申 DMT 模型的错误是因为处理的表面应力分布和变形不协调。随后的讨论 [31, 32] 已经转到 JKR 模型合理性的焦点上。1980 年,Muller 等 [19] 独立于 Hughes 和 White [16–18] 的工作也建立了完全自洽模型,并采用 Lennard-Jones 作用势建立了数值计算方法,从而证明了从 JKR 极限到 DMT 极限(实际上是 Bradley 极限)的转变。该转变被广泛称为 MYD 转变,而转变参数正是 Tabor [28] 基于 JKR 模型给出的一个无量纲参数,称为 Tabor 数。与 Hughes 和 White [16–18] 的自洽模型和求解方法相比,Muller 等 [19, 20] 的完全自洽模型和数值计算方法更容易推广和应用,因此后者比前者有更强的生命力,这在图 1.2 中可以反映出来。由于当时计算机硬件的限制,Muller 等 [19] 未能给出较为精确和丰富的结果,后来的一些研究者 [52–55] 已经在这些方面做了改进和提高,不过这个方面的工作还有待于进一步改进。

1992 年,Attard 和 Parker [52, 88] 采用表面中心位置控制法(即把表面当作不变体时两表面中心的表观间距,相当于相对位移控制法)对接触体表面位移采用松弛法迭代求解完全自洽模型。他们指出在高 Tabor 数下得到的拔出力不唯一,而是依赖于其计算过程,这个结论显然是错误的,但它出错的原因令人困惑 [53, 55]。1997 年,Greenwood [53] 既采用位移控制法也采用了变形后的表面中心间距控制法做了更加详细的计算,其中首次使用表面中心间距控制法得到了完整的载荷—位移曲线,他还着重分析了几个方面的因素试图找出 Attard 和 Parker 计算错误的原因。不过,这几个因素很可能不是主要的原因,我们将在第 3.3 节继续讨论这个问题。2000 年,Attard 继续使用完全自洽模型试图揭示吸附滞后的本源,他采用的数值计算方法是通过控制迭代误差来说明滞后和加卸载过程有关。这有些令人莫名其妙,实际上通过 Greenwood 的 S 型载荷—位移曲

线我们已经知道滞后是因为实验中高 Tabor 数的接触体在采用位移控制法时不可避免地出现的。同年, Feng [55, 89] 更为全面地改进了完全自洽模型的数值计算方法。他采用载荷—位移曲线中的弧长 (arc-length) 控制法也得到了完整的载荷—位移曲线, 采用的 Newton-Raphson 迭代加快了收敛速度, 并在高 Tabor 数下发现了二次滞后的现象。

本文将建立在近球体的完全自洽模型推广到具有任意表面形状和吸附作用的轴对称弹性体沿轴向吸附接触的问题, 给出了无摩擦和无相对滑动两种情况下完全自洽模型的统一的无量纲形式。改进了数值计算方法, 并讨论了已有数值计算方法中存在的问题。将推广的模型应用于近球体接触问题, 研究了摩擦对接触行为的影响, 并应用于具有幂次型表面的轴对称体的接触问题, 给出了载荷—位移曲线, 得到了拔出力等重要参数。最后研究了二维无摩擦接触问题。

### 3.2 完全自洽模型

我们考虑两个具有任意表面形状的轴对称弹性体沿轴向吸附接触的问题, 如图 3.1(a) 所示。在柱坐标系中, 未变形体的几何形状可以分别表示成半径  $r$  的函数  $z_1(r)$  和  $z_2(r)$ , 如图虚线所示, 并取  $z_1(0) = z_2(0) = 0$ 。如果接触体的变形量相对表面曲率半径小得多, 那么在小变形假设下, 弹性接触体的变形场和应力场分布情况通常以弹性半空间的结果来近似。在上一章中我们已经利用 Hankel 变换方法求出了半空间轴对称问题的解, 将其应用到这两个轴对称弹性体, 边界上的变形和相互作用之间的协调关系将可以被建立起来。实际上, 这个问题可以等效为一个刚性压头和一个弹性半空间的接触问题, 如图 3.1(b) 所示。我们着重推导和求解用于表征接触行为的载荷—位移关系, 这个关系一旦建立, 说明边界上的变形和相互作用情况已经清楚, 那么原问题的变形场和应力场分布情况将可以被完全求解出来。

原问题和等效问题之间的关系由以下这些式子来表征。在等效问题中, 刚性压头的表面方程写作:

$$z(r) = z_1(r) + z_2(r), \quad (3.1)$$

其中,  $z(0) = 0$ 。弹性半空间的材料参数由等效弹性模量  $E^*$  [10] 和 Dundurs 常数  $\beta$  [90] 来表征, 它们同原问题的接触体 ( $i = 1, 2$ ) 各自的等效弹性模量  $E_i^* = E_i/(1 - \nu_i^2)$  和等效泊松比  $\nu_i^* = \nu_i/(1 - \nu_i)$  之间的关系如下:

$$1/E^* = 1/E_1^* + 1/E_2^*, \quad (3.2)$$

$$\beta = [(1 - \nu_1^*)/E_1^* - (1 - \nu_2^*)/E_2^*] / (2/E_1^* + 2/E_2^*). \quad (3.3)$$



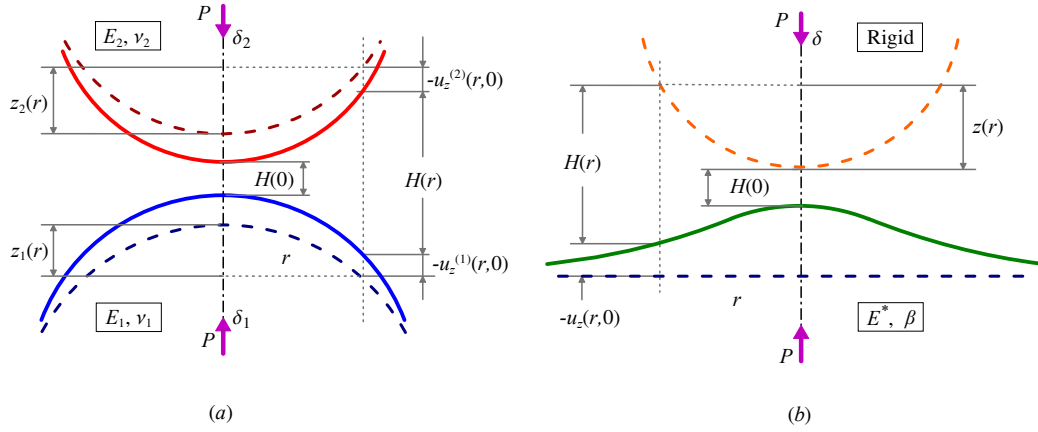


图 3.1: 轴对称弹性体沿轴向吸附接触问题 (a) 及其等效问题 (b) 的示意图  
(粗实线表示变形后的表面, 虚线表示未变形的表面)

Fig. 3.1: Schematic representations of (a) the adhesive contact problem of two axisymmetric elastic objects and (b) its equivalent problem. Solid curves represent the deformed surfaces and dashed curves represent the undeformed surfaces.

不失一般性, 我们记原问题中相对较软的接触体为 1 号, 而记相对较硬的接触体为 2 号, 使得 Dundurs 常数  $\beta \geq 0$ 。考虑到原问题中两个弹性体边界上的轴向正应力和径向剪应力分别平衡, 边界上的变形通过各自的变形和应力协调关系可以被确定。因此, 我们记等效弹性半空间边界上的位移和应力为:

$$\begin{cases} u_r(r, 0) = u_r^{(1)}(r, 0) - u_r^{(2)}(r, 0), \\ u_z(r, 0) = u_z^{(1)}(r, 0) + u_z^{(2)}(r, 0), \\ \sigma_z(r, 0) = \sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0), \\ \tau_{rz}(r, 0) = \tau_{rz}^{(1)}(r, 0) = -\tau_{rz}^{(2)}(r, 0). \end{cases} \quad (3.4)$$

根据原问题和等效问题边界上的轴向正应力和径向剪应力各自的关系 (3.4c) 和 (3.4d), 纯应力边界条件 (2.48) 可以改写为:

$$\begin{cases} \sigma_z(r, 0) = \sigma(r), \quad r \geq 0, \\ \tau_{rz}(r, 0) = \tau(r), \quad r \geq 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

式中,  $\sigma(r) = \sigma_1(r) = \sigma_2(r)$  和  $\tau(r) = \tau_1(r) = -\tau_2(r)$ 。将式 (2.51) 和 (2.52) 分别代入式 (3.4a) 和 (3.4b), 并利用纯应力边界条件 (3.5), 我们可以得到等效弹性

半空间边界上的径向位移和轴向位移分别为:

$$u_r(r, 0) = -\frac{2}{E^*} \int_0^\infty t\tau(t)W_{1,1}^0(t, r) dt + \frac{2\beta}{E^*r} \int_0^r t\sigma(t) dt, \quad (3.6)$$

$$u_z(r, 0) = -\frac{2}{E^*} \int_0^\infty t\sigma(t)W_{0,0}^0(t, r) dt + \frac{2\beta}{E^*} \int_r^\infty \tau(t) dt, \quad (3.7)$$

式中,  $W_{0,0}^0(t, r)$  和  $W_{1,1}^0(t, r)$  是 Weber-Schafheitlin 型积分, 其定义式和等价的表达式分别见附录的式 (A.53) 和 (A.55)。

在半径  $r$  处的表面间距由下面这个式子计算得到:

$$H(r) \equiv [u_z(r, 0)] = -\delta + z(r) + u_z(r, 0), \quad (3.8)$$

式中,  $\delta = \delta_1 + \delta_2$  为两个接触体在轴线上相距很远的两点之间的相对位移, 并假定不发生变形情况下两接触体紧挨时  $\delta = 0$ , 而分离时  $\delta < 0$ , 即  $\delta$  增大表示两接触体相互靠近, 反之表示两接触体相互分离。由式 (A.53e) 可得  $W_{0,0}^0(t, 0) = (2/\pi t)\mathbf{K}(0) = 1/t$ , 而且已取  $z(0) = 0$ , 因而表面中心间距可以写作:

$$H_0 \equiv H(0) = -\delta - \frac{2}{E^*} \int_0^\infty \sigma(t) dt + \frac{2\beta}{E^*} \int_0^\infty \tau(t) dt. \quad (3.9)$$

上式以位移  $\delta$  为参量表示表面中心间距, 将它重新改写一下, 我们可以得到以表面中心间距  $H_0$  作为参量来表示的位移  $\delta$ :

$$\delta = -H_0 - \frac{2}{E^*} \int_0^\infty \sigma(t) dt + \frac{2\beta}{E^*} \int_0^\infty \tau(t) dt. \quad (3.10)$$

进而在半径  $r$  处的表面间距也可以写成关于表面中心间距  $H_0$  作为参量的形式:

$$H(r) = H_0 + z(r) - \frac{2}{E^*} \int_0^\infty \sigma(t) (tW_{0,0}^0(t, r) - 1) dt - \frac{2\beta}{E^*} \int_0^r \tau(t) dt. \quad (3.11)$$

与文献比较, 上面这个式子有三个重要的不同: 第一, 文献中一般采用位移参量来表示表面间距, 这里我们采用表面中心间距参量来表示, 这一变化的目的是在数值计算方法中可以方便地采用新的控制参量; 第二, 文献中往往只考虑无摩擦接触问题, 即不包含最后一项。第三, 我们在附录中给出了 Weber-Schafheitlin 型积分  $W_{0,0}^0(t, r)$  的诸多表示形式 (A.53), 其中式 (A.53e) 的形式曾为 Muller 等 [19, 20] 和 Feng [55] 所采用, 而式 (A.53c) 的形式为 Attard 等 [52, 54] 和 Greenwood [53] 所采用, 但我们将利用 (A.53h) 来克服他们遇到的奇异性问题。关于这些方面的进一步分析我们将会在下文继续展开。

为建立自洽模型, 通常假设表面轴向相互作用只决定于当地的表面间距:

$$\sigma(r) = -p_s(H(r)), \quad (3.12)$$



并指定其某种特殊的形式。积分表面轴向相互作用即得载荷：

$$P = \int_0^{\infty} p_s(H(r)) 2\pi r dr. \quad (3.13)$$

而如何考虑表面切向相互作用将是一项比较复杂的工作，对于有限摩擦的情况我们建议采用有限元方法求解，这里我们将深入讨论无摩擦和无相对滑动两种极端情况。

### 3.2.1 无摩擦情况

在文献中，通常假设接触体的表面理想光滑，接触体的表面之间不存在摩擦力 [10]。在这样的情况下，表面间距 (3.11) 式不再含有最后一项，它和表面相互作用 (3.12) 式直接联立即可得到协调关系：

$$H(r) = H_0 + z(r) + \frac{2}{E^*} \int_0^{\infty} p_s(H(t)) (tW_{0,0}^0(t, r) - 1) dt. \quad (3.14)$$

这个式子和 Dundurs 常数  $\beta$  没有关系。利用式 (A.53h)，我们将上式改写成如下形式：

$$H(r) = H_0 + z(r) + \frac{2r}{E^*} \int_{t=0}^{t=\infty} p_s(H(t)) dF(t/r), \quad (3.15)$$

式中，

$$F(k) = \frac{1}{\pi} \left[ (1+k)\mathbf{E} \left( \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \right) - (1-k)\mathbf{K} \left( \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \right) - \pi k \right], \quad (3.16)$$

其导数为：

$$F'(k) = \frac{2k}{\pi(1+k)} \mathbf{K} \left( \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \right) - 1. \quad (3.16')$$

函数  $F(k)$  对任意正数  $k$  都是连续且有限的，如图 3.2 所示，但它的导数  $F'(k)$  存在一个奇异点，位于  $k = 1$  的地方。这对应于 Greenwood [53] 指出的  $\mathbf{K}(2\sqrt{k}/(1+k))$  在  $k \rightarrow 1$  时的奇异性。尽管 Greenwood [53]、Attard [54] 以及 Feng [55] 采用了近似方法处理该奇异点，不过我们注意到函数  $F(k)$  的连续性和有界性后将不再沿用他们的任何一种近似方法，而采用求解更为方便的 Riemann-Stieltjes 积分 [91] 方法。因为当  $k \rightarrow 1$  时，虽然  $\mathbf{K}(2\sqrt{k}/(1+k)) \rightarrow \infty$ ，但是  $(1-k)\mathbf{K}(2\sqrt{k}/(1+k)) \rightarrow 0$ ，即有  $F(k) \rightarrow \pi/2 - 1$ 。又因为表面压强是处处连续且有限的，所以能够保证 Riemann-Stieltjes 积分的存在性。因此，我们可以有效地避免奇异点带来的影响，进而建立更为方便和准确的数值计算方法。

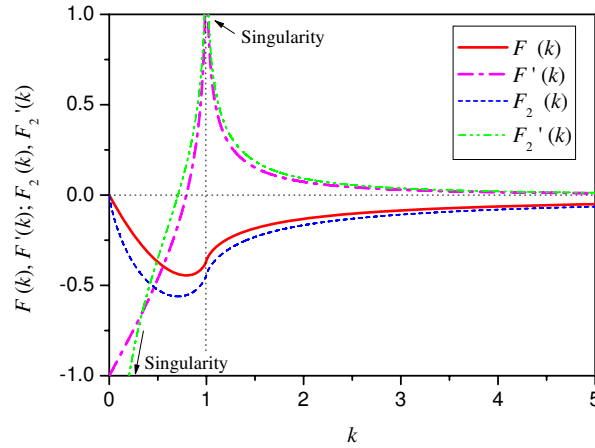


图 3.2: 函数  $F(k)$  和  $F_2(k)$  及其相应的导数  $F'(k)$  和  $F_2'(k)$

Fig. 3.2: The functions of  $F(k)$  and  $F_2(k)$  and their corresponding derivations  $F'(k)$  and  $F_2'(k)$ .

通过求解完全自洽关系 (3.15), 进而可以确立载荷—位移关系, 载荷由式 (3.13) 给出, 位移由式 (3.10) 改写得到:

$$\delta = -H_0 + \frac{2}{E^*} \int_0^\infty p_s(H(t)) dt. \quad (3.17)$$

### 3.2.2 无相对滑动情况

我们假设两个接触体在边界上径向位移处处相同, 即假定接触体表面之间没有任何的相对滑动, 其等效弹性半空间的径向位移恒等于零:

$$u_r(r, 0) = 0, \quad r \geq 0. \quad (3.18)$$

我们对式 (3.6) 采用 Hankel 变换  $\mathcal{H}_1[u_r(r, 0), r \rightarrow \rho]$ , 并利用上式, 可得:

$$0 = -\frac{2}{E^*} \int_0^\infty r \int_0^\infty t \tau(t) W_{1,1}^0(t, r) dt J_1(r\rho) dr + \frac{2\beta}{E^*} \int_0^\infty \int_0^r t \sigma(t) dt J_1(r\rho) dr.$$

将函数  $W_{1,1}^0(t, r)$  的定义式 (A.55a) 代入上式, 并对上式右边两项分别交换积分顺序, 可得:

$$0 = -\frac{2}{E^*} \int_0^\infty t \tau(t) \int_0^\infty J_1(\xi t) W_{1,1}^1(\xi, \rho) d\xi dt + \frac{2\beta}{E^*} \int_0^\infty t \sigma(t) \int_t^\infty J_1(r\rho) dr dt.$$

式中,

$$W_{1,1}^1(\xi, \rho) = \int_0^\infty r J_1(\xi r) J_1(r\rho) dr = \xi^{-1} \delta(\xi - \rho),$$

以及

$$\int_t^\infty J_1(r\rho) dr = \rho^{-1} J_0(t\rho),$$

见式 (A.52) 和 (A.13)。因此，我们可以得到：

$$0 = -\frac{2}{E^*} \int_0^\infty t\tau(t)\rho^{-1} J_1(\rho t) dt + \frac{2\beta}{E^*} \int_0^\infty t\sigma(t)\rho^{-1} J_0(t\rho) dt.$$

上式两边同乘于  $\rho$ ，并再次使用 Hankel 变换，相当于  $\mathcal{H}_1[\rho\mathcal{H}_1[u_r(r, 0); r \rightarrow \rho]; \rho \rightarrow s]$ ，进而交换积分顺序可得：

$$0 = -\frac{2}{E^*} \int_0^\infty t\tau(t)W_{1,1}^1(t, s) dt + \frac{2\beta}{E^*} \int_0^\infty t\sigma(t)W_{0,1}^1(t, s) dt.$$

再次利用式 (A.52) 和 (A.13)，即有  $W_{0,1}^1(t, s) = -D_s W_{0,0}^0(t, s)$ ，因此，我们最后得到：

$$\tau(s) = \beta \int_0^\infty t\sigma(t)W_{0,1}^1(t, s) dt = -\beta \frac{d}{ds} \int_0^\infty t\sigma(t)W_{0,0}^0(t, s) dt. \quad (3.19)$$

该式表明在无相对滑动的条件下表面摩擦力的分布决定于表面的轴向相互作用。从 0 到  $r$  积分上式，可得：

$$\int_0^r \tau(s) ds = -\beta \int_0^\infty \sigma(t)(tW_{0,0}^0(t, r) - 1) dt. \quad (3.20)$$

将这个式子代入式 (3.11)，我们得到表面间距：

$$H(r) = H_0 + z(r) - \frac{2(1 - \beta^2)}{E^*} \int_0^\infty \sigma(t)(tW_{0,0}^0(t, r) - 1) dt. \quad (3.21)$$

或者写作：

$$H(r) = H_0 + z(r) + \frac{2r}{E^{**}} \int_{t=0}^{t=\infty} p_s(H(t)) dF(t/r). \quad (3.22)$$

式中， $E^{**} = E^*/(1 - \beta^2)$ ，而函数  $F(k)$  定义在式 (3.16)。这样我们导出了无相对滑动情况下的完全自洽关系 (3.22)。与无摩擦情况的自洽关系 (3.15) 相比，仅在第三项的系数有所区别。当 Dundurs 常数  $\beta$  为零时，二者形式上相同，这点表明使用相同材料做成的接触体，接触表面上既没有摩擦力也没有相对的滑动。

对式 (3.19) 从 0 到  $\infty$  积分，我们有：

$$\int_0^\infty \tau(s) ds = \beta \int_0^\infty \sigma(t) dt. \quad (3.23)$$

将该式代入 (3.10)，可以得到位移：

$$\delta = -H_0 - \frac{2}{E^{**}} \int_0^\infty \sigma(t) dt = -H_0 + \frac{2}{E^{**}} \int_0^\infty p_s(H(t)) dt. \quad (3.24)$$

考虑到  $\int_0^\infty \sigma(t) dt$  与  $r$  无关, 式 (3.19) 可以改写为:

$$\tau(r) = -\beta \frac{d}{dr} \int_0^\infty \sigma(t)(tW_{0,0}^0(t, r) - 1) dt, \quad (3.25)$$

结合式 (3.21), 可以得到:

$$\tau(r) = \frac{1}{2}\beta E^{**} \frac{d}{dr} (H(r) - z(r)) = \frac{1}{2}\beta E^{**} \frac{d}{dr} u_z(r, 0). \quad (3.26)$$

该式在 Dundurs 常数  $\beta = 0$  时才恒为零。

至此我们得到了无相对滑动条件下的完全自洽关系 (3.22) 以及载荷—位移关系 (3.13) 和 (3.24)。在 Dundurs 常数  $\beta = 0$  时, 这些关系式和无摩擦条件下给出的关系是一致的。

### 3.2.3 无量纲形式

为便于数值计算, 运用量纲分析 [92, 93], 我们将上述方程无量纲化。如果表征表面形状的特征参数是长度量  $R_0$ , 表征相互作用的特征参数是压强量  $p_0$  和长度量  $z_0$ , 那么这三个特征参数中有两个独立的量纲, 一个是长度量纲, 一个是压强量纲。进一步分析可知, 本问题中所有的物理量的量纲都可以表示成这两个量纲的组合形式。因此, 我们取参考量  $R_0$  和  $p_0$  作为基本量, 并定义一个无量纲参数  $\epsilon$  来表征参考量  $z_0$  相对基本量  $R_0$  的大小:

$$\epsilon = z_0/R_0. \quad (3.27)$$

对于量纲为长度的物理量, 我们引入如下无量纲量:

$$\bar{r} = r/R_0, \quad \bar{z} = z/z_0, \quad \bar{H} = H/z_0. \quad (3.28)$$

无量纲化的表面形状方程是  $\bar{r}$  和  $\epsilon$  的函数, 记为:

$$\bar{z} = f_{\bar{z}}(\bar{r}, \epsilon). \quad (3.29)$$

对于量纲为压强的物理量, 除等效弹性模量外, 定义无量纲参数:

$$\bar{p}_s = p_s/p_0, \quad \bar{\sigma} = \sigma/p_0, \quad \bar{\tau} = \tau/p_0. \quad (3.30)$$

无量纲化的表面相互作用是  $\bar{H}$  的函数, 记为:

$$\bar{p}_s = f_{\bar{p}_s}(\bar{H}), \quad (3.31)$$

而无量纲化的表面间距是  $\bar{r}$ 、 $\epsilon$  和  $\vartheta$  的函数, 记为:

$$\bar{H} = f_{\bar{H}}(\bar{r}, \epsilon, \vartheta), \quad (3.32)$$

其中, 无量纲参数  $\vartheta$  在无摩擦条件下定义为:

$$\vartheta = R_0 p_0 / z_0 E^*, \quad (3.33)$$

而在无相对滑动的条件下定义为:

$$\vartheta = R_0 p_0 / z_0 E^{**}. \quad (3.34)$$

这样无摩擦条件下的自洽关系 (3.15) 和无相对滑动条件下的自洽关系 (3.22) 都可以写成如下无量纲形式:

$$\bar{H} = \bar{H}_0 + \bar{z} + 2\vartheta \bar{r} \int_{\bar{t}=0}^{\bar{t}=\infty} \bar{p}_s dF(\bar{t}/\bar{r}). \quad (3.35)$$

无摩擦条件下的位移 (3.17) 和无相对滑动条件下的位移 (3.24) 也可以写成统一的形式:

$$\bar{\delta} \equiv \delta / z_0 = -\bar{H}_0 + 2\vartheta \int_0^{\infty} \bar{p}_s d\bar{r}. \quad (3.36)$$

载荷 (3.13) 的无量纲化表示为:

$$\bar{P} \equiv P / \pi R_0^2 p_0 = 2 \int_0^{\infty} \bar{p}_s \bar{r} d\bar{r}. \quad (3.37)$$

对于无相对滑动的情况, 表面的摩擦应力 (3.26) 的无量纲化表示为:

$$\bar{\tau} = \frac{\beta}{\vartheta} \frac{d}{d\bar{r}} (\bar{H} - \bar{z}). \quad (3.38)$$

### 3.3 数值计算方法

#### 3.3.1 数值计算方法的改进

为提高计算效率和精度, 我们采用变网格技术, 随时根据表面相互作用的情况重新划分网格, 使得表面相互作用随半径变化较为突兀的地方网格相对较密些。取有效区间  $[0, \bar{r}_{\max}]$  来近似实际区间  $[0, \infty)$ , 并划分成  $N$  个小区间  $[\bar{r}_{i-1}, \bar{r}_i]$ , 第  $i$  个小区间的间隔  $\Delta\bar{r}_i = \bar{r}_i - \bar{r}_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, N$ 。其中,  $\bar{r}_{\max}$  的取法可以参考 Feng [55] 对近球体处理方法的讨论, 我们在下面的内容中具体讨论某个应用问题时再回到这一点。

因为函数  $F(\bar{t}/\bar{r})$  在  $\bar{t}/\bar{r} \geq 0$  上是连续有界的, 所以我们对于自洽关系式 (3.35) 中的积分采用 Riemann-Stieltjes 积分 [91] 来计算。这样我们无需特别处理 Greenwood [53] 提到的奇异点, 避免了像 Feng [55] 采用二重积分近似处理的情况。我们定义自洽关系式 (3.35) 的残量和 Jacobi 矩阵分别为:

$$\bar{\Phi}_i = \bar{H}_i - \bar{H}_0 - \bar{z}_i - 2\vartheta\bar{r}_i \sum_{j=1}^N \bar{p}_s(\bar{H}(\bar{\xi}_j))(F(\bar{r}_j/\bar{r}_i) - F(\bar{r}_{j-1}/\bar{r}_i)), \quad (3.39)$$

$$\bar{J}_{ij} = \partial\bar{\Phi}_i/\partial\bar{H}_j, \quad (3.40)$$

式中,  $\bar{\xi}_j$  为  $[\bar{r}_{j-1}, \bar{r}_j]$  上的某一点, 我们取  $\bar{H}(\bar{\xi}_j) = (\bar{H}_{j-1} + \bar{H}_j)/2$ 。

以表面中心间距  $\bar{H}_0 = \bar{H}(0)$  作为控制参数, 采用 Newton-Raphson 迭代方法

$$\{\bar{H}_i^{k+1}\} = \{\bar{H}_i^k\} - [\bar{J}_{ij}^k]^{-1} \{\bar{\Phi}_j^k\}, \quad (3.41)$$

式中, 上标  $k$  和  $k+1$  表示迭代步, 迭代直到  $\max_i |(\bar{H}_i^{k+1} - \bar{H}_i^k)/\bar{H}_i^k| < 10^{-6}$ 。迭代的初始值可以取  $\bar{H}_i^0 = \bar{H}_0 + \bar{z}_i$ , 最好的方案是取上一控制步迭代后的解, 通过少量的迭代步即得到收敛的解。进而可以得到对应于  $\bar{H}_0$  的位移和载荷:

$$\bar{\delta} = -\bar{H}_0 + 2\vartheta \sum_{j=1}^N \bar{p}_s(\bar{H}(\bar{\xi}_j)) (\bar{r}_j - \bar{r}_{j-1}), \quad (3.42)$$

$$\bar{P} = \sum_{j=1}^N \bar{p}_s(\bar{H}(\bar{\xi}_j)) (\bar{r}_j^2 - \bar{r}_{j-1}^2). \quad (3.43)$$

改变  $\bar{H}_0$  到  $\bar{H}_0 - \Delta\bar{H}_0$  即可进行下一个迭代过程, 进而得到完整的载荷-位移曲线。理论上  $\bar{H}_0$  的最小值为  $-1$ , 计算中  $\bar{H}_0$  从一个较大的数逐渐减少并接近  $-1$ , 自动调节  $\Delta\bar{H}_0$  的大小使得曲线的细节完整地呈现。

### 3.3.2 数值计算方法的比较

与文献中的数值计算方法 [19, 20, 52-55] 相比, 我们采用的数值计算方法在如下方面作了改进和规范, 如表 3.1 所示: 一、采用自适应网格, 在计算中可以根据表面相互作用分布的特点重新划分网格。因为不合适的网格将导致不能很好的定义压强峰值 Greenwood [53]。二、采用 Riemann-Stieltjes 积分求自洽关系中的积分项, 不用特别处理 Greenwood [53] 提到的奇异点, 因为我们给出的新关系式 (3.35) 不再含有奇异点。三、采用表面中心间距控制方式 [53], 避免了 Feng [55] 采用弧长控制法时需要处理可能存在分歧的情况, 使计算过程大为

简化。与 Greenwood [53] 的控制方程相比, 我们给出的自洽关系 (3.35) 中不含位移, 处理起来更为简便。四、采用 Newton-Raphson 迭代加速了迭代求解。与松弛法相比, 现在的迭代方法还可以避免出现像 Attard 和 Parker [52] 所给出错误结果的情况。

表 3.1: 完全自洽模型的数值计算方法的比较

Table 3.1: Comparison of the numerical methods of the full self-consistent model.

参考文献	网格	控制方式	迭代方案	奇异点	存在主要问题
Muller等 <sup>[19, 20]</sup>	不均匀	趋近量	松弛法	未提及	不够精确
Attard等 <sup>[52]</sup>	均匀	中心位置	松弛法	未提及	计算结果不对
Greenwood <sup>[53]</sup>	均匀	中心间距	松弛法	近似处理	需大量迭代
Attard <sup>[54]</sup>	均匀	中心位置	松弛法	近似积分	收敛控制怪异
Feng <sup>[55]</sup>	(不)均匀	弧长	NR 迭代	二重积分近似	需处理的分歧
本文	自适应	中心间距	NR 迭代	RS 积分	

注: 趋近量或中心位置控制法和本文提到的位移控制法是等价的控制方法。

NR = Newton-Raphson, RS = Riemann-Stieltjes.

Greenwood [53] 分析了 Attard 和 Parker [52] 给出错误结果可能的因素, 但仍未能解除疑惑。一、Attard 和 Parker 声明计算对网格不敏感, 除了在软体强吸附的情况下, 并已经使用到 1500 个均匀的网格了, 然而他使用 200 个均匀的网格就可以给出正确的结果了。二、他还指出自洽关系中的积分存在一个奇异点, Attard 和 Parker 没有给出处理的方法, 不过直接去掉这个奇异点也没产生错误的结果。三、他的迭代收敛步数达到二万步之多, 而 Attard 和 Parker 迭代一千来步就已经收敛了。实际上, 我们发现更关键的因素是 Attard 和 Parker [52] 采用的松弛法迭代表面位移可能存在问题, 错误的松弛因子 (他们取的松弛因子有时高达 0.2) 导致表面上部分点的位移过大, 以至于表面上部分点已经穿透, 虽然 Greenwood [53] 也使用了松弛法, 但他迭代的是表面的间距, 这样可以很容易地避免穿透的发生。在 Greenwood [53] 的工作中, 采用了足够小的松弛因子 (小到 0.005), 相应地增加了迭代步数, 从而给出了正确的结果。

### 3.4 幂次型表面的应用

我们将上述完全自洽模型应用到幂次型表面。表面形状方程为：

$$z(r) = r^n/nQ, \quad (3.44)$$

式中,  $n$  为形状指数, 如  $n = 2$  为近球形、 $n = 1$  为锥形;  $Q$  为形状参数, 当  $n \neq 1$  时, 通常记  $Q = R^{n-1}$ 。表面相互作用满足 Lennard-Jones 力定律 [19, 52-55]:

$$p_s(H) = \frac{8\Delta\gamma}{3z_0} [(H/z_0 + 1)^{-9} - (H/z_0 + 1)^{-3}], \quad (3.45)$$

式中,  $z_0$  表示两个平行的半空间平衡时的表面间隔。

取  $R_0 = (Qz_0)^{1/n}$  和  $p_0 = \Delta\gamma/z_0$ , 则无量纲形式的表面形状方程和表面相互作用分别写作:

$$\bar{z} \equiv z/z_0 = \bar{r}^n/n, \quad (3.46)$$

$$\bar{p}_s \equiv p_s/(\Delta\gamma/z_0) = \frac{8}{3} [(\bar{H} + 1)^{-9} - (\bar{H} + 1)^{-3}]. \quad (3.47)$$

式中,  $\bar{r} = r/(Qz_0)^{1/n}$ 。将这两个式子代入自洽关系 (3.35), 我们有:

$$\bar{H} = \bar{H}_0 + \bar{r}^n/n + 2\vartheta\bar{r} \int_{\bar{t}=0}^{\bar{t}=\infty} \frac{8}{3} [(\bar{H} + 1)^{-9} - (\bar{H} + 1)^{-3}] dF(\bar{t}/\bar{r}), \quad (3.48)$$

式中, 除了形状指数  $n$  外, 只出现一个表征材料性能和几何形状的无量纲参数  $\vartheta$ , 而不出现无量纲参数  $\epsilon$ 。这与 Muller [20] 关于近球体的讨论是一致的。对于理想球体将不会出现这样的情况, 无量纲参数  $\epsilon$  将会出现在无量纲自洽关系中。

对于无摩擦情况, 无量纲参数  $\vartheta$  写作:

$$\vartheta = Q^{1/n} \Delta\gamma/E^* z_0^{(2n-1)/n}, \quad (3.49)$$

而对于无相对滑动的情况, 无量纲参数  $\vartheta$  写作:

$$\vartheta = Q^{1/n} \Delta\gamma/E^{**} z_0^{(2n-1)/n}. \quad (3.50)$$

或者我们定义另一种形式的无量纲参数:

$$\mu = (Q\Delta\gamma^n/E^{*n} z_0^{(2n-1)})^{1/(2n-1)}, \quad (3.51)$$

使得:

$$\vartheta = \begin{cases} \mu^{(2n-1)/n}, & \text{在无摩擦情况下,} \\ (1 - \beta^2)\mu^{(2n-1)/n}, & \text{在无相对滑动情况下.} \end{cases} \quad (3.52)$$



对于  $n = 2$ ，参数  $\mu$  即为 Tabor 数 [2, 28, 53]，对于任意的形状指数  $n$ ，我们称无量纲参数  $\mu$ ，即(3.51)式，为扩展 Tabor 数。

对于同一形状指数  $n$ ，无量纲载荷—位移曲线只取决于无量纲参数  $\vartheta$ ，而且对于确定的无量纲参数  $\vartheta$ ，无摩擦情况和无相对滑动情况的无量纲载荷—位移是一样的。但在无相对滑动情况下，对于同一形状指数  $n$  和同一扩展 Tabor 数  $\mu$ ，无量纲载荷—位移曲线还与 Dundurs 常数  $\beta$  有关。

### 3.4.1 算例

我们以近球形 ( $n = 2$ ) 为例，首先探讨无量纲参数  $\vartheta = 1$  的情况。取网格数  $N = 500$ ，近似有效半径  $\bar{r}_{\max} = 10$ ，如同 Feng [55] 所取，不过区别其弧长控制法，我们采用的是表面中心间距控制法 [53]。如图 3.3 所示，对于确定的表面中心间距  $\bar{H}_0$ ，位移  $\bar{\delta}$  和载荷  $\bar{P}$  均有单一值与之对应，也就是说，位移和载荷是表面中心间距的单值函数。这使得我们在计算中采用表面中心间距作为控制参数时，不需要像 Feng [55] 采用弧长控制法时需要处理的分歧。从图中可以看出表面中心间距关于位移或载荷却不是单值的函数，这对于较大的 Tabor 数都一样。在实验中一般只能采用位移控制法：当弹性体相距很远的时候，变形很小可以忽略，位移和表面中心间距仅差一个符号，即  $\bar{\delta} \doteq -\bar{H}_0$ ；当弹性体继续趋近，由于表面吸附的作用，弹性体发生变形，表面间距急剧变小，甚至在位移  $\bar{\delta}$  为  $-1.6291$  的情况下，表面中心间距  $\bar{H}_0$  从  $0.6470$  直接变成  $0.01991$ ，如图从 A 点突跳到 A' 点 (jumping-on)；接着，由于表面间距的突然变小，表面相互作用中的斥力项不再可以忽略，致使表面中心间距随位移的减小而缓慢地减小。分离过程大体是趋近过程的逆过程，只是发生突跳时的位移有所不同，当位移  $\bar{\delta}$  为  $-1.7433$  时，表面中心间距  $\bar{H}_0$  从  $0.06950$  变到  $1.1624$ ，如图从 B 点突跳到 B' 点 (jumping-off)。这就是加卸载过程中的滞后 (hysteresis) 现象，如图 3.4 的载荷—位移曲线所示，其中完整的 S 型曲线是采用表面中心间距控制法得到的。载荷的最小值点，对应于图中的 C 点，不考虑负号其大小为  $1.6696$ ，该值称为拔出力 (pull-off force)。

在图 3.4 中，无量纲的载荷—位移曲线，既可以是无摩擦条件下的情况，对应于  $\mu = 1$  和任意的  $\beta$ ，也可以是无相对滑动条件下的情况，对应于  $(1 - \beta^2)\mu^{3/2} = 1$ 。二者只有在  $\beta = 0$  时才有相同的  $\mu$ ，而对于  $\beta \neq 0$  两个条件对应的  $\mu$  不一样。因此这里只能说明  $\vartheta$  相同时，两种条件下的无量纲的载荷—位移曲线一样；但对于相同的材料，即  $\mu$  和  $\beta$  相同，无摩擦和无相对滑动两种条件下的  $\vartheta$  是不一样的，无量纲的载荷—位移曲线将不再重合。比较后者才能反映

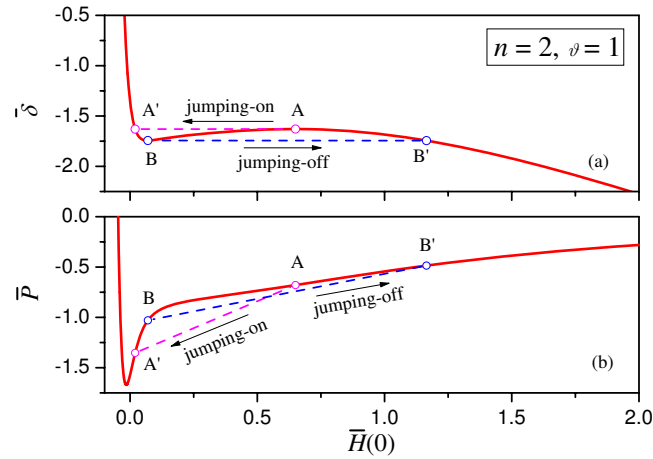


图 3.3: 无量纲位移和载荷随表面中心间隔的变化

Fig. 3.3: Variation of dimensionless displacement and load with dimensionless separation for the special case of  $n = 2$  and  $\mu = 1$ .

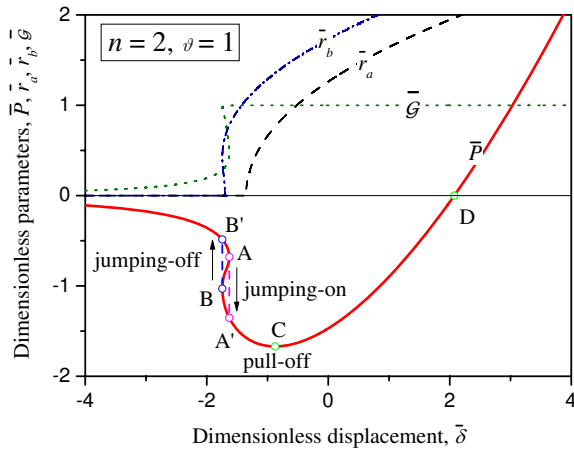


图 3.4: 轴向载荷、特征半径和应变能释放率随位移的变化情况

Fig. 3.4: Variation of normal load, characteristic radii and strain energy release rate with displacement for the special case of  $n = 2$  and  $\mu = 1$ .

出摩擦对接触行为的影响，这将在下一节中讨论。

在图 3.4 中，我们同时给出了两个特征半径  $\bar{r}_a$  和  $\bar{r}_b$  [87]，以及应变能释放率  $\bar{\mathcal{G}}$ ，三个无量纲参数随位移  $\bar{\delta}$  的变化情况，其中特征半径  $\bar{r}_a$  对应于表面轴向相互作用为零时的半径，即  $\bar{p}_s(\bar{H}(\bar{r}_a)) = 0$ ，而特征半径  $\bar{r}_b$  对应于表面轴向相互作用为极小值时的半径，即  $\bar{p}_s(\bar{H}(\bar{r}_b)) = -\sigma_{th}/(\Delta\gamma/z_0) = -16/9\sqrt{3}$ ，应变能释放率的无量纲形式为：

$$\bar{\mathcal{G}} \equiv \mathcal{G}/\Delta\gamma = \int_{\bar{t}=\bar{r}_a}^{\bar{t}=\infty} \bar{\sigma}(\bar{t}) d\bar{H}(\bar{t}). \quad (3.53)$$

结果表明，当  $\bar{r}_a > 0$  时，应变能释放率和表面能相等，即  $\mathcal{G} = \Delta\gamma$ ，这个关系式即为 Griffith 关系 [94]，也正是 Maugis 理论 [21] 的基本假设。

如图 3.5 实线所示，我们给出了对应于载荷—位移曲线上六个特征点的表面变形和相互作用随半径  $\bar{r}$  的变化情况，除上述提到的 A, A', B, B' 和 C 点外，还有一点 D 对应于零载荷 (zero-load) 状态。计算中，采用表面中心间距控制法，逐渐减小表面中心间距获得完整的过程信息，上述六个点按计算的顺序依次为 B', A, B, A', C 和 D。而对于实际的位移控制法，趋近过程经过的状态为 B', A, A', C 和 D，由图 3.5 (a) 可见，半空间表面上所有的点先逐渐隆起，在 A 位置突然跳到 A' 位置，然后接触区内部逐渐被压下去，接触区外的受吸引作用仍保持隆起，不过高度在下降，接触区边缘表现出堆积 (pile-up) 现象，由图 3.5 (b) 可见，表面中心压强先变小后变大；拔出过程经过的状态为 D, C, A', B 和 B'，从 B 位置突然断掉。对无相对滑动的情况，由图 3.5 (c) 可见，在趋近过程中，在接触区内部，摩擦应力幅度逐渐变大，而接触区外部，摩擦应力数值上先增大后减小。

对于无摩擦情况，我们将 M-D 模型 [21] 给出的变形和压强分布情况以虚线画在图 3.5 (a) 和 (b) 中进行比较。如同 Maugis 所取，粘着应力  $\sigma_0$  取为理论应力  $\sigma_{th}$ ，其中 Lennard-Jones 作用势给出理论应力  $\sigma_{th} \doteq 1.026\Delta\gamma/z_0$ 。由图可见一致性较好，只在接触区边缘 M-D 模型给出的变形量稍稍偏大，这是因为接触区外的分布载荷被限制到一个更小的范围，如图 3.5 (b) 所示。然而，Maugis 将粘着应力  $\sigma_0$  取为理论应力  $\sigma_{th}$  带有很大的任意性 [34]。我们提出这样一个问题：对于其他任意形状的表面将粘着应力  $\sigma_0$  取为理论应力  $\sigma_{th}$  是否合理？这个问题我们将在第五章中进行详细讨论 [69]。

### 3.4.2 摩擦对接触行为的影响

我们继续以近球形 ( $n = 2$ ) 为例，并取 Tabor 数  $\mu = 1$  和 Dundurs 常数

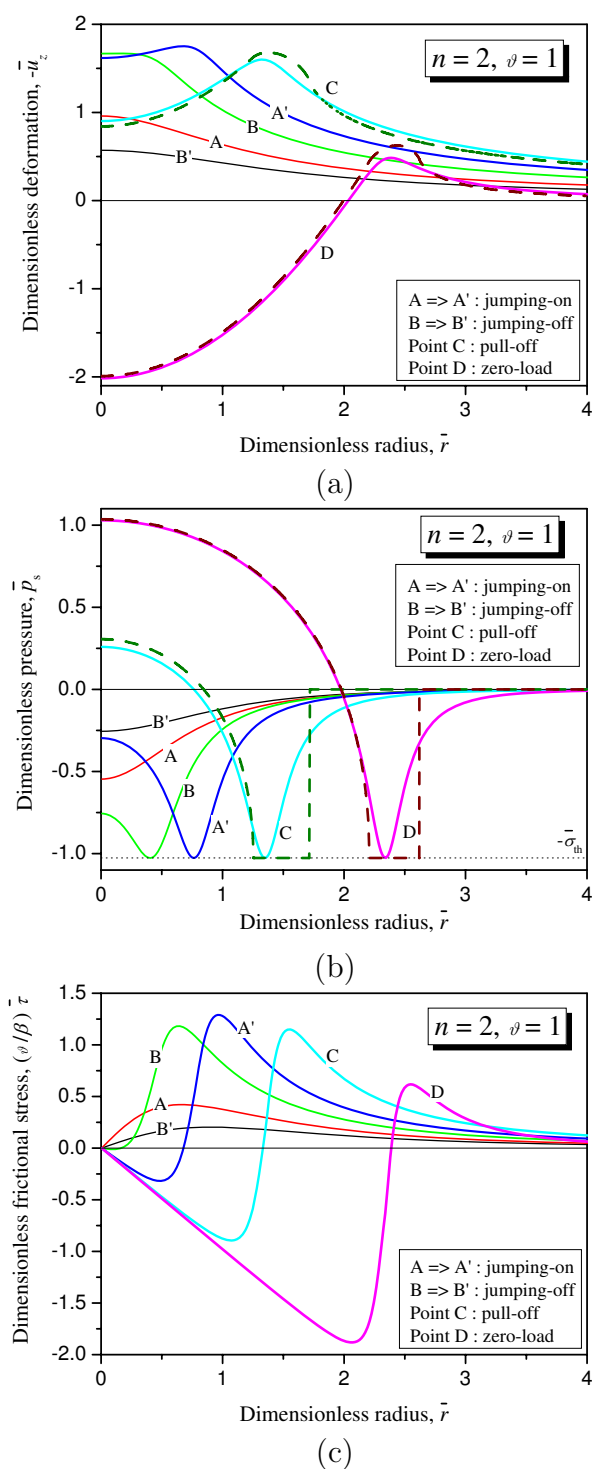


图 3.5: (a) 变形量、(b) 压强和 (c) 摩擦应力沿径向的分布情况

(实线对应于 FSCM 的结果，虚线对应于 M-D 模型的结果)

Fig. 3.5: Distributions of (a) deformation, (b) pressure and (c) frictional stress for the special case of  $n = 2$  and  $\nu = 1$ . (Solid and dashed curves correspond to those derived from the FSCM and the M-D model, respectively.)

$\beta = 0.5$ , 通过比较无相对滑动情况和无摩擦情况的计算结果, 来探讨摩擦对接触行为的影响。

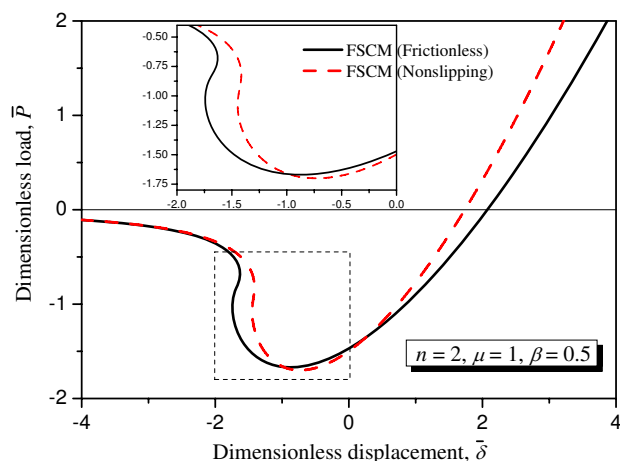


图 3.6: 无相对滑动条件和无摩擦条件下的载荷—位移曲线

Fig. 3.6: Dimensionless load–displacement curves for the special case of  $n = 2$ ,  $\mu = 1$  and  $\beta = 0.5$  under the non-slipping condition and the frictionless condition, respectively.

图 3.6 给出了无相对滑动条件和无摩擦条件下的无量纲载荷—位移曲线。通过比较图中两条曲线, 可以归纳出如下异同点。第一, 接触体相距较远时, 两条曲线几乎重合。此时, 两者未相互接触, 在径向上的变形本该不受无相对滑动条件的制约, 但采用无相对滑动条件时引入的摩擦很小, 对结果不会造成大的影响。第二, 无摩擦条件下的滞后现象比无相对滑动条件下的滞后现象显著, 表面摩擦力表现出对变形的抑制作用。第三, 无相对滑动条件下的拔出力比无摩擦条件下的拔出力稍有增大, 但不显著。无相对滑动条件下的无量纲拔出力是  $-\bar{P}_c = 1.7002$ , 无摩擦条件下的无量纲拔出力是  $-\bar{P}_c = 1.6696$ , 二者的相对误差不到 2%。对于更一般的 Tabor 数如图 3.7 所示, 图中同时还给出了使用 M-D 模型 ( $\sigma_0 = \sigma_{th} \doteq 1.026\Delta\gamma/z_0$ ) 预测的无摩擦情况下的拔出力。从图中可见, 完全自洽模型在无摩擦和无相对滑动两种条件下给出的结果对于所有的 Tabor 数差别都不显著, 而 M-D 模型给出的结果在中等大小的 Tabor 数时, 严重偏离完全自洽模型给出的结果。这促使我们重新审视 M-D 模型, 在后面章节将着重就无摩擦情况作进一步讨论和分析。第四, 接触体进入挤压状态时, 载荷—位移曲线的斜率在无相对滑动的条件下比无摩擦的条件下来得大, 即考虑摩擦使得刚度变大, 这同样反映了摩擦对变形的抑制作用。

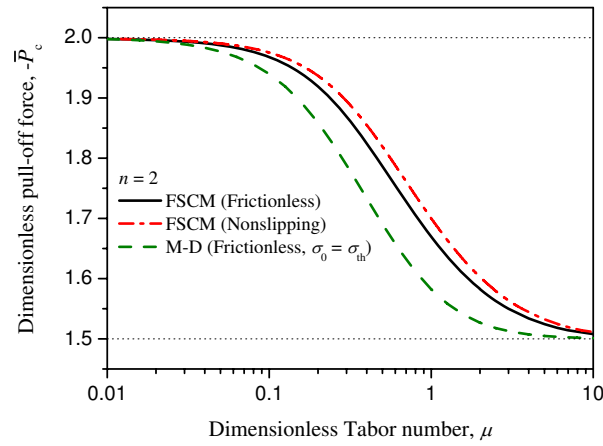


图 3.7: 拔出力随 Tabor 数的变化情况

Fig. 3.7: Variation of the dimensionless pull-off force with the Tabor number for the special cases of  $n = 2$  and  $\beta = 0.5$ .

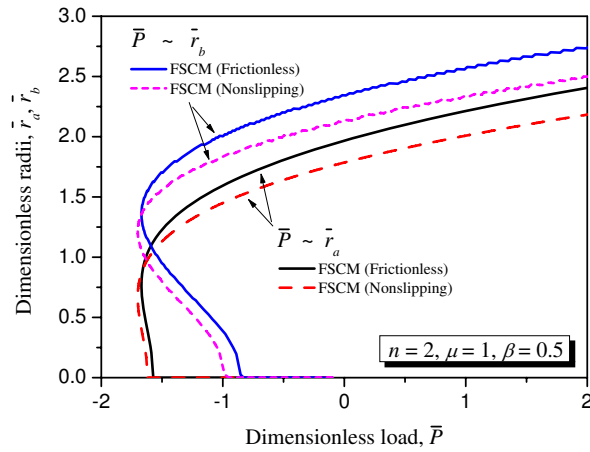


图 3.8: 特征半径随载荷的变化

Fig. 3.8: Variation of characteristic radii with normal load for the special case of  $n = 2$ ,  $\mu = 1$  and  $\beta = 0.5$ .

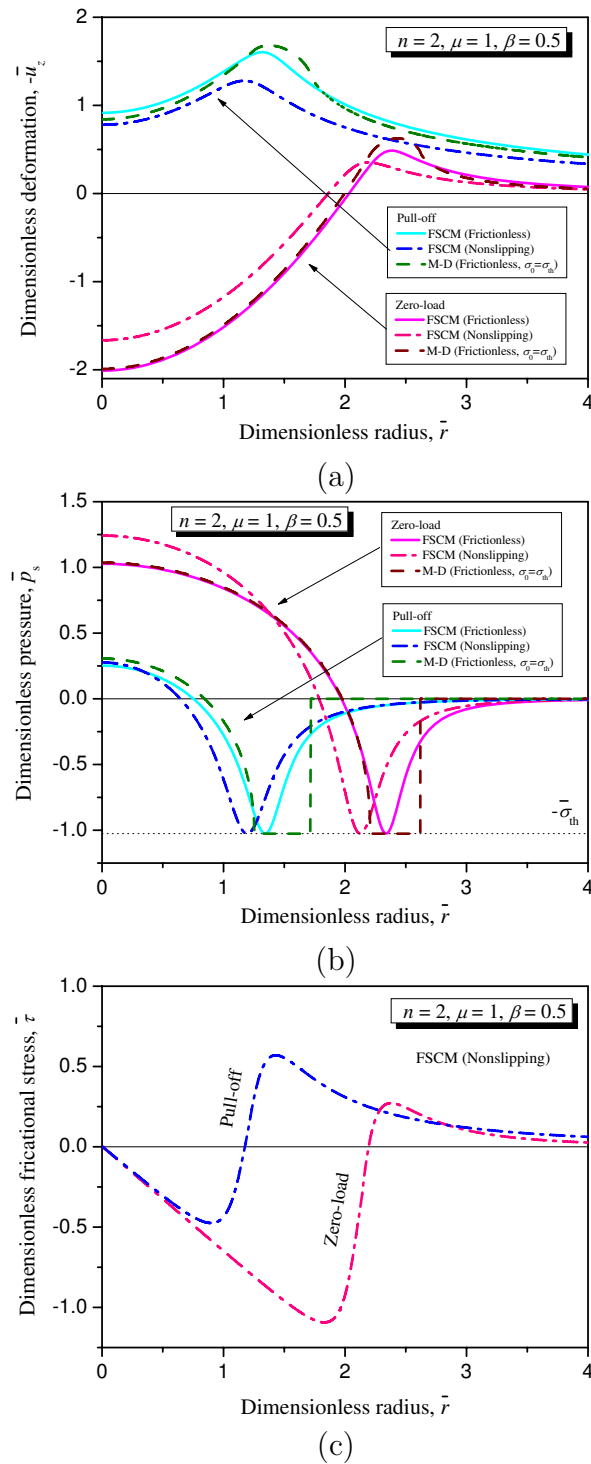


图 3.9: 拔出位置和零载荷位置上 (a) 变形量、(b) 压强和 (c) 摩擦应力沿径向的分布情况

Fig. 3.9: Distributions of (a) normal deformation, (b) local pressure and (c) frictional stress for the special case of  $n = 2$ ,  $\mu = 1$  and  $\beta = 0.5$  at the points corresponding to pull-off and zero-load, respectively.



图 3.8 给出了相应的特征半径  $\bar{r}_a$  和  $\bar{r}_b$  随载荷的变化情况。图中显示, 两个特征半径在无滑动条件下都比在无摩擦条件下来得小, 这正是对上述提到的表面摩擦力抑制变形的进一步说明。以拔出点和零载荷两个位置为例, 如图 3.9 所示, 我们给出了轴向变形、表面压强和表面摩擦应力在半径上的分布情况。在拔出点和零载荷对应的位置上, 无相对滑动条件下轴向变形的幅度都确实比无摩擦条件下来得小。在无相对滑动条件下, 接触区附近摩擦应力随半径的变化很明显: 靠里存在一个负最大值, 其数值随着压入量的增大而增大; 靠外存在一个正最大值, 其数值随着压入量的增大而缓慢减小。如果摩擦应力的最大值有所限制, 显而易见在压入量较大的时候, 表面的相对滑动将会不可避免地发生。

### 3.4.3 扩展 MYD 转变

本节对更一般的形状指数  $n$  就无摩擦情况作进一步讨论。网格数仍取  $N = 500$ , 而近似有效半径  $\bar{r}_{\max}$  由下面的方案确定。忽略有效区间外部的变形, 并只考虑相互作用中的吸附项, 那么被忽略掉的载荷可以近似估计为:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\text{Res}} &= 2 \int_{\bar{r}_{\max}}^{\infty} \bar{p}_s(\bar{H}(\bar{r})) \bar{r} d\bar{r} \\ &\approx -\frac{16n^3 \bar{r}_{\max}^{2-3n}}{3(3n-2)} {}_2F_1\left(3, 3 - \frac{2}{n}; 4 - \frac{2}{n}; -\frac{1 + \bar{H}_0}{\bar{r}_{\max}^n/n}\right), \end{aligned} \quad (3.54)$$

式中,  ${}_2F_1(\cdot)$  为超几何函数 (A.26)。当  $\bar{H}_0 \rightarrow -1$  时, 上式中超几何函数的值为 1。形状指数  $n$  必须不小于  $2/3$ , 否则不收敛。计算中, 应检查这个忽略量相对拔出力是否足够小。对于近球形 ( $n = 2$ ) 的情况, Feng [55] 取  $\bar{r}_{\max} = 10$ , 对于任意有效的  $n$ , 我们取  $\bar{z}(\bar{r}_{\max}) = 50$ 。

我们对  $n = 1, 1.5, 2$  和  $3$  四种情况分别计算了若干种不同的扩展 Tabor 数  $\mu$ , 相应的无量纲载荷—位移曲线如图 3.10 所示。通过分析比较图中的曲线, 我们可以归纳出三个主要方面的特征。第一, 滞后现象对于任意的形状指数  $n$  都有可能发生。在扩展 Tabor 数不太大的情况下, 对于任意的形状指数  $n$  都没有滞后现象存在, 而随着扩展 Tabor 数的增加, 将不同程度地出现滞后。对于同一形状指数  $n$ , 扩展 Tabor 数越大, 滞后越明显。第二, 拔出力对应点的位移随扩展 Tabor 数反映出一定的规律。当  $n = 1.5$  时, 对于任意的扩展 Tabor 数, 拔出力对应点的位移都为零; 当  $n < 1.5$  时, 拔出力对应点的位移不再为零, 而是随着  $\mu$  的增加显著地增大; 而当  $n > 1.5$  时, 拔出力对应点的位移也不再为零, 它是随着  $\mu$  的增加显著地减小。第三, 拔出力的大小随扩展 Tabor 数的变化也反映出一定的规律。为更好地说明问题, 我们将无量纲拔出力随扩展 Tabor 数的变化画在图 3.11 中。当  $\mu$  较小时, 随着  $\mu$  的减少, 对于任意的形状指数  $n$ , 无



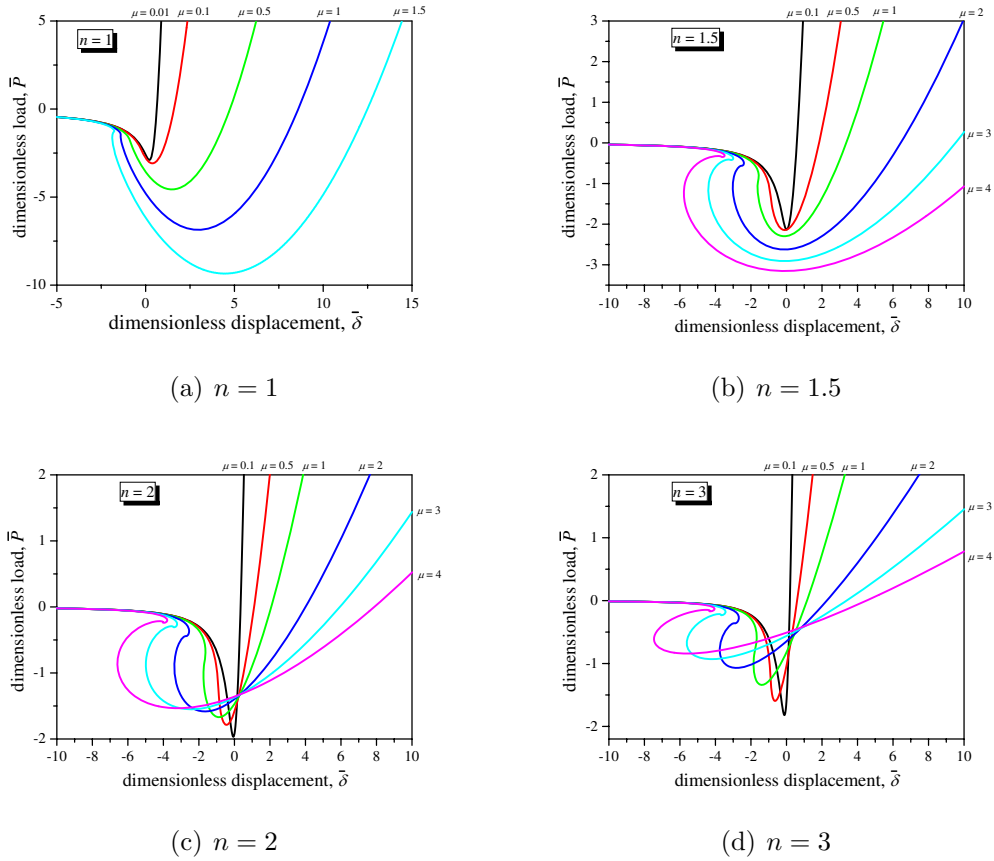


图 3.10: 不同形状指数  $n$  下的无量纲载荷—位移曲线

Fig. 3.10: Dimensionless load-displacement curves for  $n = 1, 1.5, 2$  and  $3$  with several special values of  $\mu$ , respectively.

量纲拔出力分别趋于常数。当  $\mu$  较大时，随着  $\mu$  的增加，无量纲拔出力的变化和  $n$  密切相关：若  $n < 2$ ，无量纲拔出力随  $\mu$  的增加显著地增加；若  $n > 2$ ，无量纲拔出力随  $\mu$  的增加显著地减少。特别要指出的是，从  $n = 1.5$  的情况看，当  $\mu$  适中的时候，无量纲拔出力随着  $\mu$  的变化并不是单调的。我们知道对于  $n = 2$  的情况，无量纲拔出力随着  $\mu$  的增加从 2 下降到 1.5，它们分别对应于 Bradley 极限和 JKR 极限。对于任意的  $n$ ，我们也可以有类似的讨论。

一方面，假设材料为刚性的，这可以通过将上述理论取  $E^* = \infty$ ，很容易地可以积分得到用位移表示的载荷的解析式：

$$\bar{P} = \frac{16n^{2/n}}{3n} \left[ \mathbf{B} \left( 9 - \frac{2}{n}, \frac{2}{n} \right) (1 - \bar{\delta})^{-9+2/n} - \mathbf{B} \left( 3 - \frac{2}{n}, \frac{2}{n} \right) (1 - \bar{\delta})^{-3+2/n} \right], \quad (3.55)$$

式中， $\mathbf{B}(\cdot)$  为 Beta 函数 (A.4)。当  $n = 2$  时，上式退化到 Bradley 方程。这个名

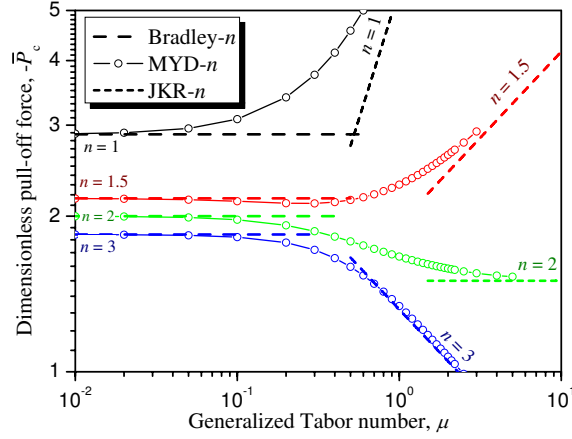


图 3.11: 扩展 MYD 转变

Fig. 3.11: The extended MYD transition.

称首先由 Greenwood [53] 采用, 因为他考虑到虽然 Bradley [26] 仅给出了  $\delta = 0$  的情况, 而 Derjaguin [27] 正视了  $\delta$  的变化, 但为避免和 DMT 模型 [13] 的方程相混淆, 他建议采用 Bradley 方程这一名称。鉴于此, 对于任意的形状指数  $n$ , 我们称上式为扩展 Bradley 方程。由极值条件  $d\bar{P}/d\delta = 0$ , 扩展 Bradley 方程的拔出力 (简记为 Bradley- $n$  拔出力) 可以确定为:

$$-\bar{P}_c^{\text{Bradley-}n} = \frac{32n^{2/n}}{9n-2} \mathbf{B}\left(3 - \frac{2}{n}, \frac{2}{n}\right) (168\mathbf{B}\left(4 - \frac{2}{n}, 6\right))^{(3n-2)/6n}. \quad (3.56)$$

当  $n = 1, 1.5, 2$  和  $3$  时, 分别给出  $2.8798, 2.1655, 2$  和  $1.8433$ , 这正是上述  $\mu \rightarrow 0$  时无摩擦 FSCM 的极限常数。

另一方面, 扩展 JKR 理论 [23, 78] 给出

$$P = \mathbf{B}\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{1}{2}\right) E^* Q^{-1} a^{n+1} - \sqrt{8\pi E^* \Delta \gamma} a^3. \quad (3.57)$$

对应的拔出力 [23, 24] (简记为 JKR- $n$  拔出力) 为:

$$-\bar{P}_c^{\text{JKR-}n} = \frac{2n-1}{n+1} \left( \frac{3\sqrt{2\pi}}{n\mathbf{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)} \right)^{3/(2n-1)} \sqrt{2\pi} (Q^3 \Delta \gamma^{n+1} E^{*(n-2)})^{1/(2n-1)}. \quad (3.58)$$

其无量纲形式写作:

$$-\bar{P}_c^{\text{JKR-}n} = \frac{2(2n-1)}{(n+1)\sqrt{2\pi}} \left( \frac{3\sqrt{2\pi}}{n\mathbf{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)} \right)^{3/(2n-1)} \mu^{(2-n)/n}. \quad (3.59)$$

当  $n = 2$  时, 扩展 JKR 拔出力与  $\mu$  无关; 当  $n < 2$  时, 扩展 JKR 拔出力正比于  $\mu$  的正幂次; 当  $n > 2$  时, 正比于  $\mu$  的负幂次。将扩展的 Bradley 理论和 JKR 理论给出的拔出力也画在图 3.11 中, 我们发现, 对于任意的形状指数  $n$ , 如同  $n = 2$  的情况, 在扩展 Tabor 数  $\mu$  较小时, 随着  $\mu$  的减少, 扩展 MYD 拔出力从下方趋近于扩展 Bradley 极限, 而  $\mu$  较大时, 随着  $\mu$  的增大, 扩展 MYD 拔出力从上方趋近于扩展 JKR 极限。对于任意的形状指数  $n$ , 扩展 MYD 拔出力从扩展 Bradley 极限过渡到扩展 JKR 极限。

### 3.5 二维完全自洽模型

完全自洽模型可以进一步扩展到非轴对称接触问题, 如扁球体的接触等问题 [57] 和二维接触问题等。本节研究二维无摩擦正向吸附接触问题。考虑在弹性半空间  $i$  边界上的带形域  $-L \leq x \leq L$  内作用有正向应力  $\sigma_i(x)$ , 则其边界上的正向位移可以写作 [10, p.20, Eq.2.24b]:

$$u_z^{(i)}(x, 0) = \frac{2}{\pi E_i^*} \int_{-L}^L \sigma_i(s) \ln |x - s| ds + C_2^{(i)}(\delta_i), \quad (3.60)$$

式中, 等效弹性模量  $E_i^* = E_i/(1 - \nu_i^2)$ , 弹性模量  $E_i$ , 泊松比  $\nu_i$ , 其中  $C_2^{(i)}(\delta_i)$  与远场的位移  $\delta_i$  有关, 但形式无法确定。

现在考虑表面形状分别为  $z_1(x)$  和  $z_2(x)$  的两个弹性体正向无摩擦吸附接触的平面应变问题。如同前面轴对称接触问题的讨论, 该问题可以等效为一个刚性压头和一个弹性半空间的平面应变接触问题, 压头的表面形状为  $z(x) = z_1(x) + z_2(x)$ , 其中  $z(0) = 0$ , 弹性半空间的等效弹性模量为  $E^* = (1/E_1^* + 1/E_2^*)^{-1}$ 。原问题与等效问题在边界上的正向应力和正向位移的关系分别为:

$$\sigma(x) \equiv \sigma_1(x) = \sigma_2(x), \quad (3.61)$$

$$u_z(x, 0) \equiv u_z^{(1)}(x, 0) + u_z^{(2)}(x, 0). \quad (3.62)$$

那么等效问题边界上的正向位移可以写作:

$$u_z(x, 0) = \frac{2}{\pi E^*} \int_{-L}^L \sigma(s) \ln |x - s| ds + C_2(\delta), \quad (3.63)$$

式中,  $C_2(\delta) = C_2^{(1)}(\delta_1) + C_2^{(2)}(\delta_2)$ , 其中两个接触体的相对位移  $\delta = \delta_1 + \delta_2$ 。当  $x = 0$  时, 边界上的正向位移为:

$$u_z(0, 0) = \frac{2}{\pi E^*} \int_{-L}^L \sigma(s) \ln |s| ds + C_2(\delta). \quad (3.64)$$

接触体的表面间距定义为：

$$H(x) \equiv [u_z(x, 0)] = -\delta + z(x) + u_z(x, 0). \quad (3.65)$$

那么原点处的表面间距为：

$$H_0 \equiv H(0) = -\delta + u_z(0, 0). \quad (3.66)$$

联立这两个式中，消去相对位移  $\delta$ ，可以得到以原点表面间距  $H(0)$  为参数表示的表面间距  $H(x)$ ，即：

$$H(x) = H_0 + z(x) + u_z(x, 0) - u_z(0, 0). \quad (3.67)$$

将边界上的正向位移代入上式，我们立即得到：

$$H(x) = H_0 + z(x) + \frac{2}{\pi E^*} \int_{-L}^L \sigma(s) \ln \left| \frac{x-s}{s} \right| ds. \quad (3.68)$$

对于给定的原点表面间距  $H(0)$  和正向相互作用  $\sigma(x)$ ，表面间距  $H(x)$  将可以被确定。同样假设正向相互作用  $\sigma(x)$  只与当地的表面间距有关，记为：

$$\sigma(x) = -p_s(H(x)). \quad (3.69)$$

我们可以将表面间距进一步写作：

$$H(x) = H_0 + z(x) + \frac{2x}{E^*} \int_{-L}^L p_s(H(s)) dG(s/x), \quad (3.70)$$

式中，函数  $G(k)$  定义为：

$$G(k) = \frac{1}{\pi} [k \ln |k| + (1-k) \ln |1-k|], \quad (3.71)$$

它的导数为：

$$G'(k) = -\frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{1-k}{k} \right|. \quad (3.71')$$

函数  $G(k)$  处处连续，并关于  $k = 1/2$  对称，而当  $k \rightarrow \infty$  时，有  $G(k) \rightarrow \infty$ 。但它的导数  $G'(k)$  在  $k = 0$  和  $k = 1$  处均存在奇异性。因为我们考虑的问题对于  $k$  来说是有限的，所以  $G(k)$  也是有限的，则我们如同轴对称接触问题一样，可以同样可以采用 Riemann-Stieltjes 积分来求相应的积分。因此式 (3.70) 为二维接触问题的自洽关系，完全类似于前面建立的数值计算方法可以进行迭代求解，进而我们可以确定载荷为：

$$P = \int_{-L}^L p_s(H(x)) dx, \quad (3.72)$$

但是相对位移  $\delta$  无法确定。

我们已经建立了二维问题的完全自洽模型，它的数值计算方法完全类似于轴对称问题完全自洽模型的情况。利用该模型，可以研究二维粗糙表面接触问题，甚至是分形表面接触问题，也可以研究二维最佳吸附表面接触问题，当然其它表面形状的接触问题也可以研究。以下我们进一步研究关于  $x = 0$  对称的二维接触问题，对相应的模型作进一步简化以使相应的数值计算方法更为简便。

对于关于  $x = 0$  对称的二维问题，表面方程满足  $z(x) = z(-x)$ ，表面间距满足  $H(x) = H(-x)$ ，表面相互作用满足  $p_s(H(x)) = p_s(H(-x))$ ，因此自洽关系 (3.70) 可以重新写作：

$$H(x) = H_0 + z(x) + \frac{2x}{E^*} \int_0^L p_s(H(s)) dF_2(s/x), \quad (3.73)$$

其中，函数  $F_2(k)$  定义为：

$$F_2(k) = \frac{1}{\pi} \left[ (1+k) \ln \left| \frac{k}{1+k} \right| - (1-k) \ln \left| \frac{k}{1-k} \right| \right], \quad (3.74)$$

它的导数为：

$$F_2'(k) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{k^2}{1-k^2} \right|. \quad (3.74')$$

二维情况下的函数  $F_2(k)$  和轴对称情况下的函数  $F(k)$ ，即式 (3.16)，有类似的性质，如图 3.2。导数  $F'(k)$  在  $k = 1$  存在奇异性，而导数  $F_2'(k)$  在  $k = 0$  和  $k = 1$  都存在奇异性。载荷 (3.72) 重新写作：

$$P = 2 \int_0^L p_s(H(x)) dx. \quad (3.75)$$

现在我们将二维完全自洽模型 (2D-FSCM) 应用于抛物形表面和 Lennard-Jones 作用势的情况，并同二维 JKR (2D-JKR) 模型 [35, 95] 的情况相比较。表面方程为：

$$z(x) = x^2/2R, \quad (3.76)$$

其无量纲形式为：

$$\bar{z}(\bar{x}) \equiv z(x)/z_0 = \bar{x}^2/2, \quad (3.77)$$

式中， $\bar{x} \equiv x/\sqrt{Rz_0}$ 。取有效范围  $-\bar{x}_{\max} \leq \bar{x} \leq \bar{x}_{\max}$ ，二维自洽关系的无量纲形式为：

$$\bar{H}(\bar{x}) \equiv H(x)/z_0 = \bar{H}(0) + \bar{z}(\bar{x}) + 2\theta\bar{x} \int_0^{\bar{x}_{\max}} \bar{p}_s(\bar{H}(\bar{s})) dF_2(\bar{s}/\bar{x}), \quad (3.78)$$

式中, 关联材料性质和表面形状参数的无量纲参数  $\vartheta$  定义为:

$$\vartheta = R^{1/2} \Delta\gamma / E^* z_0^{3/2}. \quad (3.79)$$

无量纲载荷为:

$$\bar{P} \equiv P/2\Delta\gamma R^{1/2} z_0^{-1/2} = \int_0^{\bar{x}_{\max}} \bar{p}_s(\bar{H}(\bar{x})) d\bar{x} \quad (3.80)$$

对于刚性圆柱和弹性半空间的二维接触问题, Barquins [95] 已经得到了JKR型的接触模型, 其接触压强写作:

$$p(x) = \frac{E^*}{2R} \sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{\frac{2E^* \Delta\gamma a}{\pi(a^2 - x^2)}}, \quad (3.81)$$

式中,  $a$  为接触半宽度 (the half-width of contact)。圆柱单位长度上的外载荷为:

$$P = \int_{-a}^a p(x) dx = \pi E^* a^2 / 4R - \sqrt{2\pi E^* \Delta\gamma a}. \quad (3.82)$$

接触压强的无量纲形式写作:

$$\tilde{p}(\tilde{x}) \equiv p(x) / (\Delta\gamma E^{*2} / R)^{1/3} = \frac{1}{2} \sqrt{\tilde{a}^2 - \tilde{x}^2} - \sqrt{\frac{2\tilde{a}}{\pi(\tilde{a}^2 - \tilde{x}^2)}}, \quad (3.83)$$

式中, 无量纲横坐标  $\tilde{x} = x / (R\Delta\gamma / E^*)^{1/3}$ , 相应地接触半宽度的无量纲形式为  $\tilde{a} = a / (R\Delta\gamma / E^*)^{1/3}$ 。受压区的半宽度的无量纲形式记为  $\tilde{a}_0$ , 即当  $\tilde{x} = \pm\tilde{a}_0$  时, 有  $\tilde{p}(\pm\tilde{a}_0) = 0$ 。无量纲载荷写作:

$$\tilde{P} \equiv P/2(R\Delta\gamma^2 E^*)^{1/3} = \pi\tilde{a}^2/8 - \sqrt{\pi\tilde{a}/2}, \quad (3.84)$$

相应的无量纲拔出力为:

$$-\tilde{P}_c^{2D-JKR} = 3(\pi/2)^{1/3}/4 \doteq 0.8718. \quad (3.85)$$

以上定义两种无量纲形式之间的关系由无量纲参数  $\vartheta$  来关联:

$$\tilde{x} = \bar{x}\vartheta^{-1/3}, \quad (3.86)$$

$$\tilde{P} = \bar{P}\vartheta^{1/3}. \quad (3.87)$$

为方便比较我们将使用第一种无量纲形式计算的二维完全自洽模型的结果转化为第二种无量纲形式。对于  $\vartheta = 0.1, 0.2, 0.5, 1$  和  $2$  五种情况, 二维完全自洽模型给出了特征半宽度随载荷变化的情况, 如图 3.12 所示, 其中  $\bar{x}_{\max}$  取

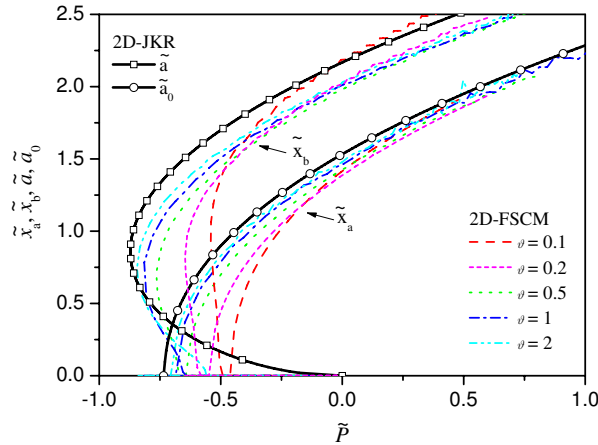


图 3.12: 二维无摩擦吸附接触问题之特征半宽度随载荷变化的情况 (带有空心圆圈或方框的实线对应于二维 JKR 模型 [95]的结果, 其它的曲线对应于二维完全自洽模型的结果)

Fig. 3.12: Variation of characteristic half-width with normal load obtained from the two-dimensional FSCM is presented for the special cases of  $\vartheta = 0.1, 0.2, 0.5, 1$  and  $2$ . The results are also compared with the JKR-like solutions presented by Barquins [95].

10, 网格数  $N = 500$ , 半宽度  $\tilde{x}_a = \bar{x}_a \vartheta^{-1/3}$  对应于  $\bar{p}_s(\bar{H}(\pm \bar{x}_a)) = 0$ , 而半宽度  $\tilde{x}_b = \bar{x}_b \vartheta^{-1/3}$  对应于  $\bar{p}_s(\bar{H}(\pm \bar{x}_b)) = -\bar{\sigma}_{th}$ , 这些特征半宽度的定义类似于我们在轴对称问题中关于特征半径的定义。使用二维 JKR 模型计算的特征半宽度随载荷变化的曲线也同时画在图 3.12 中。由图可见, 当无量纲参数  $\vartheta$  不断增大时, 二维完全自洽模型给出的  $\tilde{P} - \tilde{x}_a$  和  $\tilde{P} - \tilde{x}_b$  曲线分别不断趋近于二维 JKR 模型给出的  $\tilde{P} - \tilde{a}_0$  和  $\tilde{P} - \tilde{a}$  曲线。由此可见, 当  $\vartheta \rightarrow \infty$  时二维完全自洽模型的极限模型为二维 JKR 模型。类似于轴对称问题易知, 当  $\vartheta \rightarrow 0$  时二维完全自洽模型的极限模型为二维 Bradley 模型, 这可以很容易地得到, 考虑到其形式较为复杂, 也没有新的结论, 所以这里略去推导, 直接给出相应的拔出力, 即:

$$-\bar{P}_c^{2D-Bradley} = -\tilde{P}_c^{2D-Bradley} \vartheta^{-1/3} = \frac{192\sqrt{2}\pi}{17(7293^{5/12})} \doteq 1.2330. \quad (3.88)$$

### 3.6 本章小结

本章研究了具有任意表面形状和任意相互作用的轴对称弹性体的轴向吸附接触问题, 建立了以表面中心间距为参数的自洽关系和载荷—位移关系, 得到



了无摩擦和无相对滑动两种情况下的完全自洽模型。将这两种情况下的模型无量纲化,并引入表征材料性质和表面形状的无量纲参数 $\vartheta$ ,我们可以得到形式上分别一致的无量纲自洽关系和无量纲载荷—位移关系,其中无量纲参数 $\vartheta$ 在无相对滑动情况下是其在无摩擦情况下的 $1 - \beta^2$ 倍, $\beta$ 为 Dundurs 常数。

在网格划分、控制方式、数值积分和迭代方法等方面,对完全自洽模型的数值计算方法进行了改进,并澄清了文献中存在的问题。采用自适应网格技术提高了计算效率和精度。采用表面中心间距控制法,得到了完整载荷—位移曲线。与 Greenwood [53] 的自洽关系不同,我们给出了形式上不含位移的自洽关系,更加方便了表面中心间距控制方法的使用。与 Feng [55] 的弧长控制法相比,表面中心间距控制法避免了在迭代求解过程中需要处理分歧的情况。采用 Riemann-Stieltjes 积分,从本质上消除了奇异点的影响。采用 Newton-Raphson 迭代方法加快了收敛速度,提高了迭代效率。该迭代方法的使用还避免了出现像 Attard 和 Parker [52] 给出错误结果的情况,他们采用松弛法求解迭代表面位移,过大的松弛因子很可能是他们给出高 Tabor 数下拔出力不单一这一错误结果的关键因素。

将完全自洽模型应用于具有幂次型表面和 Lennard-Jones 作用势的轴对称体,定义了扩展 Tabor 数,并以算例的形式进行了研究。

以形状指数  $n = 2$  和无量纲参数  $\vartheta = 1$  为例,给出了载荷和位移分别随表面中心间距变化的情况,以及载荷、特征半径和应变能释放率分别随位移变化的情况,从而指出了突跳行为是实际采用位移控制模式引起的,并证实了在接触过程中应变能释放率  $\mathcal{G}$  和吸附能  $\Delta\gamma$  相等这一 Griffith 关系。在该算例中还给出了突跳、拔出力以及零载荷分别对应的点的表面位移、压强和摩擦应力的分布情况。

以形状指数  $n = 2$ 、Tabor 数  $\mu = 1$  和 Dundurs 常数  $\beta = 0.5$  为例,给出了无相对滑动和无摩擦两种情况下的无量纲载荷—位移曲线,通过比较发现摩擦作用对变形起抑制作用,并以特征半径随载荷的变化情况、以及在拔出力和零载荷分别对应的点的表面位移、压强和摩擦应力的分布情况来进一步说明。对于全范围 Tabor 数  $\mu$  计算了无量纲拔出力,并与 M-D 模型给出的无量纲拔出力进行了比较。结果显示考虑摩擦对于拔出力改变不大,对于中等的 Tabor 数 M-D 拔除力与无摩擦的 FSCM 拔出力相差较大,这表明有必要对 M-D 模型进一步研究,使之更好地吻合于完全自洽模型的结果。

以形状指数  $n = 1, 1.5, 2$  和  $3$  为例,分别计算了若干 Tabor 数  $\mu$ ,给出了无摩擦情况下的无量纲载荷—位移曲线,并分析了曲线的特征。该计算中还给出



了无量纲拔出功随 Tabor 数  $\mu$  的变化情况, 发现了从 JKR- $n$  到 Bradley- $n$  的扩展 MYD 转变。实际上对于更一般的表面形状也将存在类似的转变。

最后我们就二维无摩擦正向吸附接触问题建立了相应的完全自洽模型, 并以抛物形表面和 Lennard-Jones 作用势为例进行了讨论。在二维完全自洽模型中, 相对位移无法确定, 不过类似于轴对称问题的处理, 我们可以给出载荷随表面间距的变化情况, 进而得到特征半宽度等参数。通过这些讨论对进一步研究摩擦问题或粗糙表面的接触问题是有益的。

## 第四章 Maugis 接触模型的推广和应用

### 4.1 引言

弹性近球体吸附接触行为作为接触力学的基础,已经得到了广泛的研究 [73, 96],从不同的近似角度建立了多种理论模型,从而展示了连续介质模型在接触力学领域的重要作用,也为接触力学的研究提供了重要的概念和方法。如何正确表征变形和相互作用之间的协调关系是接触力学模型成功的关键。断裂力学概念的引入 [12, 21] 使得接触力学理论模型的研究上了一个全新的台阶。接触模型从定量上研究了材料的接触性能,无论对实验获取力学参数和吸附性能,还是对指导材料设计都很有帮助。

在接触力学中引入断裂力学概念可以追溯到二十世纪七十年代。1971年,Johnson 等 [11] 将弹性近球体吸附接触问题类比于 Griffith 裂纹问题的处理,考虑弹性变形能、表面能和机械能的平衡,基于热动力学方法首次成功地给出了吸附接触模型—JKR 模型。1978年,Maugis 和 Barquins [12] 假设接触区的边缘存在 I 型应力集中因子,将断裂力学原理应用到接触力学领域,表明通过使用 Griffith 关系,即应变能释放率  $\mathcal{G}$  和表面能  $\Delta\gamma$  相等,可以得到和 JKR 模型相同的结果。

而未运用断裂力学概念的 DMT 模型是不太成功。1975年,Derjaguin 等 [13] 建立的 DMT 模型给出吸附力的大小在点接触时为  $2\pi R\Delta\gamma$ ,但随着趋近量的增大该值迅速下降到  $\pi R\Delta\gamma$ 。1977年,Tabor [28] 指出 DMT 模型忽略了接触区外的吸附力对变形的影响,未能满足变形和表面相互作用之间的协调关系,需要进一步研究改进。1983年,Muller 等 [14] 采用直接“力”法得到 IDMT 模型,其吸附力从  $2\pi R\Delta\gamma$  开始随着趋近量的增大而变大 [15],这个结果同样被确定为错误的。事实上,这两种方法都不满足变形和表面相互作用之间的协调关系。在进一步的研究中,Maugis [21] 再次应用断裂力学概念将 DMT 模型的吸附力修正为随着趋近量的增大保持为常量  $2\pi R\Delta\gamma$ 。

我们已经在上一章的引言中全面回顾了自洽模型的发展,这里不再赘述。虽然自洽模型是连续介质范畴内最为精确的理论模型,但它需要进行大量的数值计算才能给出结果,这给拟合试验数带来了很大的困难,从而限制了它的实际应用。从这一点讲,人们并没有完全满意近球体的弹性吸附接触模型所取得

的成功,方便实用的近似模型仍然具有强大的吸引力。

1992年, Maugis [21] 基于 Dugdale 势近似表面吸附作用并运用断裂力学概念,通过使用应力无奇异的条件和 Griffith 关系,建立了一个近似理论模型。该模型被称为 M-D 模型,它具有半解析的形式,可以避免复杂的自协调迭代计算,并得到了从 JKR 模型到 DMT 模型的一致转变。1997年, Johnson 和 Greenwood [34] 基于 M-D 模型建立了以无量纲参数  $\lambda$  (或 Tabor 数  $\mu$ ) 和无量纲载荷  $P/\pi R\Delta\gamma$  表示的双参数吸附图,从而指出了各近似模型的有效适用范围。

在微纳米尺度下,表面效应,包括吸附、摩擦、磨损以及表面形貌,将极大地影响材料的接触行为 [2]。对于无摩擦轴向接触问题,这里主要讨论表面形状和吸附作用对接触行为的影响。事实上,上述所有的模型是基于抛物型表面来近似球体而建立的,对于理想球体直接采用上述近似模型是不合适的, Gao 等人 [97] 对理想球体的接触模型进行了修正。考虑到原子力显微镜 (AFM) 针尖 [22]、纳米压头 [23]、生物附着体 [24] 的表面形状,更加一般化的幂次型方程也被用来近似接触体未变形时的表面形状。1996年, Carpick 等 [22] 将 JKR 模型推广到形状指数为整数的幂次型表面,研究了 AFM 针尖和材料的接触行为。2001年, Goryacheva 和 Makhovskaya [62] 将 M-D 模型推广到形状指数为偶数的幂次型表面。2004年, Borodich 和 Galanov [23] 将 JKR 模型和 DMT 模型都推广到任意的幂次型表面,并指出 Goryacheva 和 Makhovskaya [62] 关于 M-D 模型的推广可以是任意的形状指数。表面吸附作用是表面效应对接触性能影响的又一个重要因素,它可能源自不同的物理机理,种类繁多,如毛细力、氢键、静电荷力、van der Waals 力、“化学”力等 [2]。1998年, Barthel [67] 采用线性、二次和幂次等多种近似作用势,将 Maugis 模型加以推广,结果表明从 JKR 到 DMT 的转变对作用势的形式并不敏感。

本章将 Maugis 模型推广到具有任意有效表面形状和任意表面相互作用的情况,分析了表面形状和表面相互作用分别对模型的影响以及它们之间的耦合关系。利用 Dugdale 模型来近似表面吸附作用,从而推广了 M-D 模型,并考察了其极限形式。最后将推广的理论应用于常见的表面形状。

## 4.2 广义 Maugis 模型

### 4.2.1 广义 Maugis 模型的建立

我们考虑两个任意有效表面的轴对称弹性体的无摩擦轴向接触问题,它们的表面方程至少需要满足  $z'(r) \geq 0$  的条件,使得它们的中心部分首先进入接触,

在接触过程中接触半径  $a$  连续地变化, 接触区内部是完全接触的。如图 4.1(a) 所示, 虚线为弹性体未变形时的表面形状, 在柱坐标系下半径为  $r$  处轴向高度分别为  $z_1(r)$  和  $z_2(r)$ , 并取  $z_1(0) = z_2(0) = 0$ 。粗实线为弹性体变形后的表面形状, 两表面在半径为  $a$  的圆域内完全接触, 即表面间距为:

$$H(r) \equiv [u_z(r, 0)] = \begin{cases} 0, & r \leq a, \\ -\delta + z(r) + u_z(r, 0), & r \geq a, \end{cases} \quad (4.1)$$

式中,  $\delta \equiv \delta_1 + \delta_2$  为两弹性体的相对位移, 表面方程和表面总变形分别为:

$$\begin{aligned} z(r) &\equiv z_1(r) + z_2(r), \\ u_z(r, 0) &\equiv u_z^{(1)}(r, 0) + u_z^{(2)}(r, 0). \end{aligned}$$

那么接触区内部总的变形为  $u_z(r, 0) = w(r) \equiv w_1(r) + w_2(r) = \delta - z(r)$ 。

将两弹性体分别近似看作半空间, 在相同半径上具有相同的表面相互作用:

$$\sigma_z(r, 0) \equiv \sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0),$$

其中, 在接触区外部的相互作用为  $\sigma_1(r) = \sigma_2(r) = -p_a(r)$ 。将式 (2.57) 代入上式, 对于任意的半径成立的条件是:

$$E_1^* w_1(r) = E_2^* w_2(r). \quad (4.2)$$

联合 (2.56) 式知, 两弹性体的表面变形和总变形之间满足如下关系:

$$u_z^{(i)}(r, 0) = \frac{1}{E_i^*} E^* u_z(r, 0), \quad i = 1, 2 \quad (4.3)$$

式中, 等效弹性模量为  $E^* = (1/E_1^* + 1/E_2^*)^{-1}$ 。式 (4.3) 表明我们可以将两个轴对称弹性体简化成一个刚性压头和一个弹性半空间的接触问题, 如图 4.1(b) 所示, 更具体的细节我们已经在上一章讨论了。

表面轴向正应力可以写作:

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, 0) = & -\frac{E^*}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}} \left[ w(0) + a \int_0^a \frac{w'(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt + \frac{2}{E^*} \int_a^\infty \frac{t\sigma(t)}{\sqrt{t^2 - a^2}} dt \right] \\ & + \frac{E^*}{\pi} \int_r^a \int_0^s \frac{(tw'(t))'}{\sqrt{(s^2 - r^2)(s^2 - t^2)}} dt ds \\ & - \frac{2}{\pi} \int_a^\infty \frac{t\sigma(t)}{r^2 - t^2} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{t^2 - a^2}} dt, \quad r \leq a. \end{aligned}$$

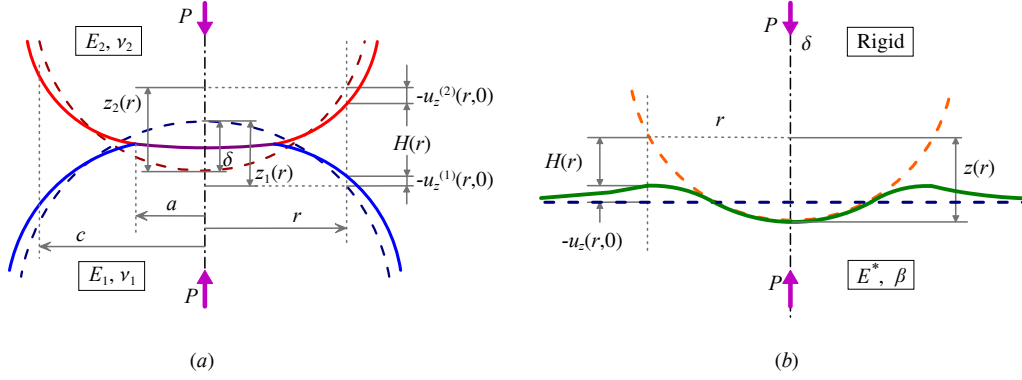


图 4.1: 轴对称弹性体沿轴向吸附接触问题 (a) 及其等效问题 (b) 的接触过程示意图

(粗实线表示变形后的表面, 虚线表示未变形的表面)

Fig. 4.1: Schematic representations of (a) the adhesive contact problem of two axisymmetric elastic objects and (b) its equivalent problem. Solid curves represent the deformed surfaces and dashed curves represent the undeformed surfaces.

或者写作

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, 0) = & -\frac{E^*}{\pi\sqrt{a^2-r^2}} \left[ \delta - a \int_0^a \frac{z'(t)}{\sqrt{a^2-t^2}} dt - \frac{2}{E^*} \int_a^\infty \frac{tp_a(t)}{\sqrt{t^2-a^2}} dt \right] \\ & - \frac{E^*}{\pi} \int_r^a \int_0^s \frac{(tz'(t))'}{\sqrt{(s^2-r^2)(s^2-t^2)}} dt ds \\ & + \frac{2}{\pi} \int_a^\infty \frac{tp_a(t)}{r^2-t^2} \sqrt{\frac{a^2-r^2}{t^2-a^2}} dt, \quad r \leq a. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Maugis [21, 73] 假设在半径  $a$  上应力非奇异, 即满足条件:

$$\lim_{r \rightarrow a} \sqrt{2\pi(a-r)} \sigma_z(r, 0) = 0. \quad (4.5)$$

那么位移必须为:

$$\delta = a \int_0^a \frac{z'(t)}{\sqrt{a^2-t^2}} dt + \frac{2}{E^*} \int_a^\infty \frac{tp_a(t)}{\sqrt{t^2-a^2}} dt. \quad (4.6)$$

相应的合力 ( $P \equiv P_1 = P_2$ )、轴向正应力和轴向位移为:

$$P = 2E^* \int_0^a \frac{t^2 z'(t)}{\sqrt{a^2-t^2}} dt + 4a \int_a^\infty \frac{tp_a(t)}{\sqrt{t^2-a^2}} dt + 4 \int_a^\infty tp_a(t) \arccos(a/t) dt, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, 0) = & -\frac{E^*}{\pi} \int_r^a \int_0^s \frac{(tz'(t))'}{\sqrt{(s^2-r^2)(s^2-t^2)}} dt ds \\ & + \frac{2}{\pi} \int_a^\infty \frac{tp_a(t)}{r^2-t^2} \sqrt{\frac{a^2-r^2}{t^2-a^2}} dt, \end{aligned} \quad r \leq a, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} u_z(r, 0) = & \frac{2}{\pi} \delta \arcsin(a/r) - \frac{2}{\pi} \int_0^a z'(t) \arctan \sqrt{\frac{a^2-t^2}{r^2-a^2}} dt \\ & + \frac{4}{\pi E^*} \int_a^r \int_s^\infty \frac{tp_a(t)}{\sqrt{(r^2-s^2)(t^2-s^2)}} dt ds, \end{aligned} \quad r \geq a. \quad (4.9)$$

一方面, 式 (4.1)、(4.8) 和 (4.9) 表明表面间隔决定于表面相互作用的分布情况。另一方面, 接触体在半径为  $r$  处通常被近似看作间隔为  $H(r)$  的两个半空间, 从而假定表面相互作用只依赖于表面的间隔, 即  $p_a(r) = p_s(H(r))$ 。因此, 表面间隔和表面相互作用存在自洽关系, 如果采用 Hughes [18] 的术语, 该模型可以称为受约自洽模型 (RSCM)。该模型需要进行大量的数值迭代求解, 因此采用有效的算法是该模型成功的关键, 倘若数值计算方法处理不当将可能导致错误的结果。实际上该模型在推广和应用方面的研究并不是很多, 而完全自洽模型 (FSCM) 似乎更受青睐, 原因是后者并不加区别接触区和非接触区, 它认为相互作用体之间具有可以不断靠近但又总是有间距的特质, 这使得它可以获取相互作用体从很远的地方开始靠近的完整行为。

由于断裂力学概念的引入, 具有半解析解的模型显示出巨大的理论和应用价值, 因此以下我们着重讨论这样的模型。在两球体吸附接触问题的研究中, Maugis [21] 假定表面相互作用可以划分成接触区 ( $r < a$ )、内聚力作用区 ( $a < r < c$ ) 和无相互作用区 ( $a > c$ ), 其中在内聚力作用区, 选择一个相对合理的相互作用随半径的分布形式  $p_a(r)$ , 并满足基于能量平衡条件的 Griffith 关系, 即应变能释放率  $\mathcal{G}$  等于表面能  $\Delta\gamma$ :

$$\mathcal{G} \equiv - \int_{r=a}^{r=c} p_a(r) dH(r) = \Delta\gamma \quad (4.10)$$

我们将这一思想推广到更加一般的轴对称体, 并称之为广义 Maugis 模型, 对于给定的接触半径  $a$ , 利用关系式 (4.10) 可以通过数值计算给出半径  $c$ , 进而由式 (4.6) 和 (4.7) 可以得到位移和载荷。与 RSCM 或 FSCM 相比, 该模型是半解析的, 需要的计算量大大减少。该模型的一个重要意义是可以用来在实验中拟合数据 [67], 并选择简单而且合适的模型预测进一步的实验结果, 甚至指导材料表面几何形状的设计。

### 4.2.2 广义 Maugis 模型的分解

广义 Maugis 模型是以接触半径  $a$  为参数的, 它要求接触体在接触区域内完全接触, 因此接触体至少需要满足  $z'(r) \geq 0$  的条件。考虑到表面形状和表面吸附作用对理论模型的不同贡献, 我们可以将其形式上分解成两个独立的部分:

$$\delta \equiv \delta_H + \delta_a, \quad (4.11)$$

$$P \equiv P_H + P_a, \quad (4.12)$$

$$\sigma_z(r, 0) \equiv \sigma_H(\varrho) + \sigma_a(\varrho), \quad (4.13)$$

$$u_z(r, 0) \equiv w_H(\varrho) + w_a(\varrho), \quad (4.14)$$

式中,  $\varrho = r/a$ 。其中, 第一部分不考虑吸附作用对接触性能的影响, 称为广义 Hertz 模型, 它对应于在 Sneddon [79] 方法的解的基础上施加了 Hertz 关于接触区边缘应力有限的条件, 用下标 H 表示, 记作:

$$\delta_H = \int_0^1 \frac{f'(\ell)}{\sqrt{1-\ell^2}} d\ell, \quad (4.15)$$

$$P_H = 2E^*a \int_0^1 \frac{\ell^2 f'(\ell)}{\sqrt{1-\ell^2}} d\ell, \quad (4.16)$$

$$\sigma_H(\varrho) = -\frac{E^*}{\pi a} \int_{\varrho}^1 \int_0^{\varsigma} \frac{(\ell f'(\ell))'}{\sqrt{(\varsigma^2 - \ell^2)(\varsigma^2 - \varrho^2)}} d\ell d\varsigma, \quad \varrho \leq 1, \quad (4.17)$$

$$w_H(\varrho) = \frac{2}{\pi} \delta_H \operatorname{arccsc} \varrho - \frac{2}{\pi} \int_0^1 f'(\ell) \arctan \sqrt{\frac{1-\ell^2}{\varrho^2-1}} d\ell, \quad \varrho \geq 1, \quad (4.18)$$

第二部分为吸附作用对接触行为的影响, 用下标 a 表示, 记作:

$$\delta_a = \frac{2a}{E^*} \int_1^m \frac{\ell g(\ell)}{\sqrt{\ell^2-1}} d\ell, \quad (4.19)$$

$$P_a = 4a^2 \int_1^m \ell g(\ell) \left( \frac{1}{\sqrt{\ell^2-1}} + \operatorname{arcsec} \ell \right) d\ell, \quad (4.20)$$

$$\sigma_a(\varrho) = \frac{2}{\pi} \int_1^m \frac{\ell g(\ell)}{\varrho^2 - \ell^2} \sqrt{\frac{1-\varrho^2}{\ell^2-1}} d\ell, \quad \varrho \leq 1, \quad (4.21)$$

$$w_a(\varrho) = \frac{2}{\pi} \delta_a \operatorname{arccsc} \varrho + \frac{4a}{\pi E^*} \int_1^{\min(\varrho, m)} \int_{\varsigma}^m \frac{\ell g(\ell)}{\sqrt{(\ell^2 - \varsigma^2)(\varrho^2 - \varsigma^2)}} d\ell d\varsigma, \quad \varrho \geq 1, \quad (4.22)$$

以及关联表面形状和表面吸附作用影响的关系式 (4.10), 可以改写作:

$$-\int_1^m g(\varrho) (f'(\varrho) + w'_H(\varrho) + w'_a(\varrho)) d\varrho = \Delta\gamma \quad (4.23)$$

式中, 表面方程为  $f(\varrho) = z(r)$ , 吸附作用为  $g(\varrho) = p_a(r)$ , 参数  $m = c/a$ 。



### 4.3 特殊的吸附作用

#### 4.3.1 广义 M-D 模型

在两近球体吸附接触问题的研究中, Maugis [21] 采用 Dugdale 模型 [98] 来近似表面相互作用, 即接触区外的吸附作用为常量  $-\sigma_0$ , 作用范围从半径  $a$  到半径  $c$ 。对于任意有效的表面形状, 我们同样采用 Dugdale 模型来近似表面相互作用, 在下一章中我们将会对其合理性给出说明。由式 (4.19)-(4.22) 可以得到:

$$\delta_a = -\frac{2\sigma_0 a}{E^*} \sqrt{m^2 - 1}, \quad (4.24)$$

$$P_a = -2\sigma_0 a^2 \left( m^2 \operatorname{arcsec} m + \sqrt{m^2 - 1} \right), \quad (4.25)$$

$$\sigma_a(\varrho) = \frac{2}{\pi} \sigma_0 \arctan \sqrt{(m^2 - 1)/(1 - \varrho^2)}, \quad \varrho \leq 1, \quad (4.26)$$

$$w_a(\varrho) = -\frac{4\sigma_0 a}{\pi E^*} \left[ \sqrt{m^2 - 1} \operatorname{arccsc} \varrho + \int_1^{\min(\varrho, m)} \sqrt{(m^2 - \varsigma^2)/(\varrho^2 - \varsigma^2)} d\varsigma \right], \quad \varrho \geq 1, \quad (4.27)$$

式中,  $m = c/a$  由式 (4.23) 来确定, 它可以进一步整理成:

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_0}{\Delta\gamma} \left[ f(m) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{f'(\ell)}{\sqrt{1 - \ell^2}} d\ell \operatorname{arcsec} m - \frac{2}{\pi} \int_0^1 f'(\ell) \arctan \sqrt{\frac{1 - \ell^2}{m^2 - 1}} d\ell \right] \\ & + \frac{4\sigma_0^2 a}{\pi \Delta\gamma E^*} \left( \sqrt{m^2 - 1} \operatorname{arcsec} m + 1 - m \right) = 1. \end{aligned} \quad (4.28)$$

因此, 对于任意有效的表面形状, 我们得到了广义 M-D 模型。

#### 4.3.2 广义 JKR 模型

当  $m \rightarrow 1$  时, 吸附是近程的 (或者接触体很软), 吸附起主导作用, 式 (4.28) 中的第一项相对第二项可以忽略, 因此我们有:

$$m^2 - 1 \rightarrow \pi \Delta\gamma E^* / 2\sigma_0^2 a. \quad (4.29)$$

进而可以得到:

$$\delta_a \simeq -\sqrt{2\pi \Delta\gamma a / E^*}, \quad (4.30)$$

$$P_a \simeq -\sqrt{8\pi E^* \Delta\gamma a^3}, \quad (4.31)$$

以及

$$\sigma_a(\varrho) \simeq \sqrt{\frac{2E^* \Delta\gamma}{\pi a (1 - \varrho^2)}}, \quad \varrho \leq 1. \quad (4.32)$$



那么在  $r \rightarrow a$  处存在一个应力集中因子:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow a} \sqrt{2\pi(a-r)} \sigma_z(r, 0) = \sqrt{2E^* \Delta\gamma}. \quad (4.33)$$

吸附部分的贡献形式上与 JKR 模型 [11] 是一致的, Yao 和 Gao [78] 通过对 JKR 模型的直接推广得到了对应于任意有效表面形状的广义 JKR 模型, 它是广义 M-D 模型的一个极限形式。

### 4.3.3 广义 DMT 模型

当  $m \rightarrow \infty$  时, 吸附是长程的, 接触体相对来说很硬, 模量很大, 通过比较式 (4.28) 中的各项量级可知:

$$f(m) \rightarrow \Delta\gamma/\sigma_0. \quad (4.34)$$

由此确定出参数  $m$ , 进而可以得到:

$$\delta_a \simeq -(2\sigma_0 a/E^*) m, \quad (4.35)$$

$$P_a \simeq -\pi\sigma_0 a^2 m^2. \quad (4.36)$$

对于近球形表面  $f(\rho) = a^2 \rho^2/2R$ , 其中等效半径  $R = (1/R_1 + 1/R_2)^{-1}$ , 由式 (4.34) 我们有  $m \rightarrow \sqrt{2R\Delta\gamma/\sigma_0 a^2}$ , 再由式 (4.35) 和 (4.36), 有  $\delta_a \rightarrow 0$  和  $P_a \rightarrow -2\pi R\Delta\gamma$ , 该结果对应于 DMT 模型, 这一点已经为 Maugis [21] 所指出。对于任意有效的表面形状, 我们称上述结果对应广义 DMT 模型。也就是说, 广义 M-D 模型的另一个极限形式为广义 DMT 模型。这在原始的 DMT 模型 [13] 基础上很难直接推广得到, 而假设吸附作用对变形没有影响 ( $w_a(\rho) \approx 0$ ) 进而直接积分表面吸附作用得到  $P_a$  的改进型 DMT 模型 (IDMT 模型) [14, 15] 却是较容易推广的, 但它并未考虑吸附作用对变形和相互作用协调关系的影响, 因而缺乏物理依据, 只是在材料严格为刚性的情况下成立, 那时我们将称之为广义 Bradley (刚性) 模型。事实上, 由式 (4.27) 可见,  $w_a(\rho)$  并不是总是为零的, 也就是说吸附作用对变形是有些影响的, 它反映了吸附作用下变形分布情况的变化。变形和吸附作用的协调关系的考虑使得该模型的物理意义更加明确, 因此在这个意义上我们得到的模型有别于原始的 DMT 模型以及 IDMT 模型, 但为了方便我们仍沿用 DMT 这个术语。

## 4.4 特殊的表面形状

### 4.4.1 理想椭球体

对于两个旋转椭球体沿对称轴无摩擦接触的问题, 其表面形状方程可以记

为:

$$f(\varrho) = \sum_{i=1}^2 a_i \left( 1 - \sqrt{1 - a^2 \varrho^2 / b_i^2} \right), \quad \varrho = r/a, \quad (4.37)$$

式中,  $a_i$  和  $b_i$  为椭球体的半轴, 对于理想球体  $a_i = b_i = R_i$ 。由式 (4.15) 和 (4.16), 我们有<sup>1</sup>

$$\delta_H = \frac{a}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{a_i}{b_i} \ln \frac{b_i + a}{b_i - a}, \quad (4.38)$$

$$P_H = \frac{E^*}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{a_i}{b_i} \left[ (a^2 + b_i^2) \ln \frac{b_i + a}{b_i - a} - 2ab_i \right]. \quad (4.39)$$

这两个式子分别给出了表面形状方程 (4.37) 对位移和载荷的贡献。另外, 将式 (4.37) 代入 (4.18) 并求其一阶导数, 我们可以得到式 (4.23) 中有关的量  $w'_H(\varrho)$  为:

$$w'_H(\varrho) = \frac{2\delta_H}{\pi\varrho} \sqrt{\varrho^2 - 1} - \frac{2a^2\varrho}{\pi\sqrt{\varrho^2 - 1}} \sum_{i=1}^2 \frac{a_i}{b_i^2} \frac{\arctan \varphi(\varrho)}{\varphi(\rho)}, \quad \varrho \geq 1, \quad (4.40)$$

式中,  $\varphi(\varrho) = \sqrt{(1 - a^2 \varrho^2 / b_i^2) / (\varrho^2 - 1)}$ , 位移  $\delta_H$  由式 (4.38) 给出。

#### 4.4.2 幂次型表面

对于两个具有幂次型表面的轴对称体沿对称轴无摩擦接触的问题, 其表面形状方程为:

$$f(\varrho) = \sum_{i=1}^2 \frac{a^{n_i} \varrho^{n_i}}{n_i Q_i}, \quad \varrho = r/a \quad (4.41)$$

式中,  $Q_i$  和  $n_i$  为形状参数。将该方程代入式 (4.15) 和 (4.16), 我们得到由表面形状引起的位移和载荷部分分别为:

$$\delta_H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \mathbf{B}\left(\frac{n_i}{2}, \frac{1}{2}\right) Q_i^{-1} a^{n_i}, \quad (4.42)$$

$$P_H = E^* \sum_{i=1}^2 \mathbf{B}\left(\frac{n_i}{2} + 1, \frac{1}{2}\right) Q_i^{-1} a^{n_i+1}, \quad (4.43)$$

<sup>1</sup>参考文献 [79] 的第 55 页考虑了一个旋转轴对称体和半空间的无摩擦无吸附接触问题, 存在编辑错误: 其一, 形状方程中的两个正号应为负号; 其二, 式 (6.16) 中的  $y$  应为  $\beta$ 。第 54 页中关于球体和半空间的接触也有一处编辑错误: 式 (6.15) 中的  $-aR$  应为  $-2aR$ 。

式中,  $\mathbf{B}(\cdot)$  为 Beta 函数 (A.4)。这两个式子是 Segedin 公式 [79, 99] 的一个例子, 在 Segedin [99] 和 Sneddon [79] 等人的研究中并未考虑表面吸附作用的影响。我们这里把由表面形状影响的那一部分分解出来, 其结果显然和他们给出来的是一致的, 但我们这里的任务是在下文中更明确地讨论表面吸附作用的影响。为此, 我们将 Griffith 关系 (4.23) 中与表面形状相关的项也计算出来。将式 (4.41) 代入 (4.18) 并求一阶导数得 (论文 [81] 的式 (47) 有误):

$$w'_H(\rho) = - \sum_{i=1}^2 \frac{\mathbf{B}(\frac{n_i}{2}, \frac{1}{2}) Q_i^{-1} a^{n_i}}{\pi \rho \sqrt{\rho^2 - 1}} \left[ 1 - \frac{1}{n_i + 1} {}_2F_1(1, \frac{n_i}{2}; \frac{n_i+3}{2}; \rho^{-2}) \right], \quad (4.44)$$

式中  ${}_2F_1(\cdot)$  为超几何函数 (A.26), 其中  $\rho \geq 1$ 。

如果两幂指数相同  $n_1 = n_2 = n$ , 则等效形状参数  $Q$  可以由下式得到:

$$1/Q = 1/Q_1 + 1/Q_2, \quad (4.45)$$

或者其中有一个接触体是半空间, 不妨假设为接触体 1, 即  $n_1 = \infty$ , 此时等效形状参数为  $n = n_2$  和  $Q = Q_2$ 。形状方程 (4.41) 可以改写为:

$$f(\rho) = a^n \rho^n / nQ, \quad \rho = r/a. \quad (4.46)$$

由表面形状引起的位移 (4.42) 和载荷 (4.43) 分别简写为:

$$\delta_H = \frac{1}{2} \mathbf{B}(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}) Q^{-1} a^n, \quad (4.47)$$

$$P_H = \mathbf{B}(\frac{n}{2} + 1, \frac{1}{2}) E^* Q^{-1} a^{n+1}. \quad (4.48)$$

## 4.5 幂次型表面的应用

### 4.5.1 M-D- $n$ 模型

以下我们着重考虑幂次型表面 (4.46) 和 Dugdale 势近似表面相互作用的情况。将式 (4.47) 和式 (4.24) 代入式 (4.11), 将式 (4.48) 和式 (4.25) 代入式 (4.12), 分别得到位移和载荷分别为:

$$\delta = \frac{1}{2} \mathbf{B}(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}) Q^{-1} a^n - (2\sigma_0 a / E^*) \sqrt{m^2 - 1}, \quad (4.49)$$

$$P = \mathbf{B}(\frac{n}{2} + 1, \frac{1}{2}) E^* Q^{-1} a^{n+1} - 2\sigma_0 a^2 \left( m^2 \operatorname{arcsec} m + \sqrt{m^2 - 1} \right). \quad (4.50)$$

参数  $m$  由 Griffith 关系 (4.10) 来确定, 将表面形状方程和表面相互作用代入后, 重新整理得:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_0 a^n}{nQ} \left[ m^n \left( 1 - \mathbf{I}_{m^{-2}}(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}) \right) - \frac{n}{\pi} \mathbf{B}(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}) \operatorname{arcsec} m \right] \\ + \frac{4\sigma_0^2 a}{\pi E^*} \left( \sqrt{m^2 - 1} \operatorname{arcsec} m + 1 - m \right) = \Delta\gamma, \end{aligned} \quad (4.51)$$

式中,  $\mathbf{I}_x(\alpha, \beta) \equiv \mathbf{B}_x(\alpha, \beta)/\mathbf{B}(\alpha, \beta)$  为规范 Beta 函数 (A.6),  $\mathbf{B}_x(\alpha, \beta)$  为不完全 Beta 函数 (A.5)。对于给定的材料参数 ( $E^*$ ,  $\Delta\gamma$  和  $\sigma_0$ ) 和形状参数 ( $n$  和  $Q$ ), 载荷—位移关系由式 (4.49–4.51) 确定。方便起见, 我们称该模型为扩展 M-D 模型, 并记为 “M-D- $n$ ”, 其中  $n$  为形状指数, 其值为任意的正数。特别地, 对于  $n = 2$  且  $Q = R$ , 这些式子退化到原始的 M-D 模型给出的式子 (见参考文献 [21] 的式 (6.17-6.19), 或参考文献 [34] 的式 (16-18)), 即:

$$\delta \equiv \delta_H + \delta_a = a^2/R - (2\sigma_0 a/E^*) \sqrt{m^2 - 1}, \quad (4.52)$$

$$P \equiv P_H + P_a = 4E^* a^3/3R - 2\sigma_0 a^2(m^2 \operatorname{arcsec} m + \sqrt{m^2 - 1}), \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_0 a^2}{\pi R} \left[ (m^2 - 2) \operatorname{arcsec} m + \sqrt{m^2 - 1} \right] \\ + \frac{4\sigma_0^2 a}{\pi E^*} \left( \sqrt{m^2 - 1} \operatorname{arcsec} m + 1 - m \right) = \Delta\gamma. \end{aligned} \quad (4.54)$$

表 4.1 进一步给出了方程 (4.49-4.51) 中的 Beta 函数和规范 Beta 函数在形状指数  $n = 1, 2, 3$  和 4 时的对应的表达式。事实上, 任意的正整数  $n$ , 这些特殊函数可以写成:

$$\mathbf{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{n+1}{n} \mathbf{B}\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n} \cdot \frac{n!!}{(n-1)!!}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{\pi}{n} \cdot \frac{n!!}{(n-1)!!}, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

和

$$\mathbf{I}_{m^{-2}}\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 1 - \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \frac{(2k+1)!! \sqrt{m^2 - 1}}{(2k+1)(2k)!! m^{2k+1}}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{2}{\pi} \operatorname{arccsc} m - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n/2-1} \frac{(2k)!! \sqrt{m^2 - 1}}{(2k+1)!! m^{2k+2}}, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

其中, 对于  $n$  为正偶数的情况已由 Goryacheva 和 Makhovskaya [62] 给出。

根据表 4.2 给出的各物理量和组合量的量纲关系, 我们引入如下无量纲参数:

$$\tilde{a} \equiv a / (Q^2 \Delta\gamma E^{*-1})^{1/(2n-1)}, \quad (4.55)$$

$$\tilde{\delta} \equiv \delta / (Q \Delta\gamma^n E^{*-n})^{1/(2n-1)}, \quad (4.56)$$

$$\tilde{P} \equiv P / \pi (Q^3 \Delta\gamma^{n+1} E^{*n-2})^{1/(2n-1)}, \quad (4.57)$$

$$\Lambda \equiv \sigma_0 (Q \Delta\gamma^{1-n} E^{*-n})^{1/(2n-1)}. \quad (4.58)$$

对于  $n = 2$  且  $Q = R$ , 可以注意到我们的无量纲参数和 Maugis [21] 定义无量纲参数在系数上有所不同, 例如  $\lambda = (9/2\pi)^{1/3}A \doteq 1.127A$ , 但这并不导致任何重要的变化。相比较而言, 这里定义无量纲参数在写法上更加方便。

表 4.1: 扩展 M-D 模型中特殊函数在不同形状指数下的表达式

Table 4.1: The expressions of the special functions in the M-D- $n$  equations for the special cases of  $n = 1, 2, 3$  and 4.

$n$	$\mathbf{B}(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$	$\mathbf{B}(\frac{n}{2} + 1, \frac{1}{2})$	$\mathbf{I}_{m^{-2}}(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2})$
1	$\pi$	$\pi/2$	$1 - (1/m)\sqrt{m^2 - 1}$
2	2	$4/3$	$(2/\pi) \operatorname{arccsc} m - (2/\pi m^2)\sqrt{m^2 - 1}$
3	$\pi/2$	$3\pi/8$	$1 - (1/m)(1 + 1/2m^2)\sqrt{m^2 - 1}$
4	$4/3$	$16/15$	$(2/\pi) \operatorname{arccsc} m - (2/\pi m^2)(1 + 2/3m^2)\sqrt{m^2 - 1}$

表 4.2: 物理量和组合量的量纲

Table 4.2: The dimension of parameters and combination parameters.

物理量	量纲	组合量	量纲
$Q$	$\mathcal{L}^{n-1}$		
$\Delta\gamma$	$\mathcal{M}\mathcal{T}^{-2}$		
$E^*$	$\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{T}^{-2}$	$Q\Delta\gamma^{1-n}E^{*n-1}$	1
$\sigma_0$	$\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{T}^{-2}$	$Q\Delta\gamma^{1-n}E^{*-n}$	$(\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{T}^{-2})^{1-2n}$
$a, c$	$\mathcal{L}$	$Q^2\Delta\gamma E^{*-1}$	$\mathcal{L}^{2n-1}$
$\delta$	$\mathcal{L}$	$Q\Delta\gamma^n E^{*-n}$	$\mathcal{L}^{2n-1}$
$P$	$\mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{T}^{-2}$	$Q^3\Delta\gamma^{n+1}E^{*n-2}$	$(\mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{T}^{-2})^{2n-1}$

注:  $\mathcal{M}$  为质量的量纲,  $\mathcal{L}$  为长度的量纲,  $\mathcal{T}$  为时间的量纲。

利用这些记号, 我们可以得到无量纲形式的载荷—位移关系:

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{2}\mathbf{B}(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})\tilde{a}^n - 2\Lambda\tilde{a}\sqrt{m^2 - 1}, \quad (4.59)$$

$$\tilde{P} = \frac{1}{\pi}\mathbf{B}(\frac{n}{2} + 1, \frac{1}{2})\tilde{a}^{n+1} - \frac{2}{\pi}\Lambda\tilde{a}^2 \left( m^2 \operatorname{arcsec} m + \sqrt{m^2 - 1} \right), \quad (4.60)$$

以及无量纲形式的 Griffith 关系:

$$\frac{1}{n} \Lambda \tilde{a}^n \left[ m^n \left( 1 - \mathbf{I}_{m^{-2}} \left( \frac{n+1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right) - \frac{n}{\pi} \mathbf{B} \left( \frac{n}{2}, \frac{1}{2} \right) \operatorname{arcsec} m \right] + \frac{4}{\pi} \Lambda^2 \tilde{a} \left( \sqrt{m^2 - 1} \operatorname{arcsec} m + 1 - m \right) = 1. \quad (4.61)$$

#### 4.5.2 DMT- $n$ 到 JKR- $n$ 的转变

当载荷足够大时, 吸附作用引起的载荷部分可以被忽略, 即:

$$|P_a/P| < \xi, \quad (4.62)$$

式中,  $\xi \ll 1$ , 其值可以根据需要选取。在这个情况下, 载荷和位移可以简化为  $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}_H$  和  $\tilde{P} = \tilde{P}_H$ , 称为扩展 Hertz 模型, 简记为 Hertz- $n$  模型。

当  $\Lambda$  很大时,  $m \rightarrow 1$ , 吸附力引起的变形量很大, 用式子表示为:

$$|\delta_a/\delta_t| > \eta_1, \quad (4.63)$$

式中,  $\eta_1 \gg 1$ ,  $\delta_t = \Delta\gamma/\sigma_0$  称为裂纹张开位移 (COD, crack opening displacement)。此时, 式 (4.61) 简化为:

$$m^2 - 1 \simeq \pi/(2\Lambda^2\tilde{a}). \quad (4.64)$$

进而位移 (4.59) 和载荷 (4.60) 分别简化为:

$$\tilde{\delta} \equiv \tilde{\delta}_H + \tilde{\delta}_a = \frac{1}{2} \mathbf{B} \left( \frac{n}{2}, \frac{1}{2} \right) \tilde{a}^n - \sqrt{2\pi\tilde{a}}, \quad (4.65)$$

$$\tilde{P} \equiv \tilde{P}_H + \tilde{P}_a = \frac{1}{\pi} \mathbf{B} \left( \frac{n}{2} + 1, \frac{1}{2} \right) \tilde{a}^{n+1} - \frac{2}{\pi} \sqrt{2\pi\tilde{a}^3}. \quad (4.66)$$

这就是对于任意的形状指数  $n > 0$  时的扩展 JKR 模型, 记作 JKR- $n$ 。对于  $n = 2$  和  $Q = R$ , 这些式子退化到 Johnson 等 [11] 给出的式子。对于  $n \rightarrow \infty$  和  $Q = R^{n-1}$ , 这些式子对应于由 Kendall [100] 给出的。对于  $n = 1$  和  $Q = \tan \varphi$  相应地由 Maugis 和 Barquins [101] 在 1981 年给出。对于任意整数的形状指数  $n$ , 载荷公式由 Carpick 等人 [22] 在研究 AFM 针尖和材料接触的时候给出。对于任意正数时, 载荷公式由 Borodich 和 Galanov [23] 给出。由  $d\tilde{P}/d\tilde{\delta} = 0$ , 可以得到 JKR- $n$  拔出力:

$$-\tilde{P}_c^{\text{JKR-}n} = \frac{2(2n-1)}{(n+1)\sqrt{2\pi}} \left( \frac{3\sqrt{2\pi}}{n\mathbf{B} \left( \frac{n}{2}, \frac{1}{2} \right)} \right)^{3/(2n-1)}, \quad (4.67)$$

它是式 (3.58) 的另一种无量纲形式。

当  $\Lambda$  很小时,  $m \rightarrow \infty$ , 吸附力引起的变形量很小, 即:

$$|\delta_a/\delta_t| < \eta_2, \quad (4.68)$$

式中,  $\eta_2 \ll 1$ . 此时, 由式 (4.61) 得:

$$m \simeq (n/\Lambda)^{1/n}/\tilde{a}. \quad (4.69)$$

在这种情况下, 我们可以得到载荷—位移关系为:

$$\tilde{\delta} \equiv \tilde{\delta}_H + \tilde{\delta}_a = \frac{1}{2}\mathbf{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)\tilde{a}^n - 2n^{1/n}\Lambda^{(n-1)/n}, \quad (4.70)$$

$$\tilde{P} \equiv \tilde{P}_H + \tilde{P}_a = \frac{1}{\pi}\mathbf{B}\left(\frac{1}{n} + 1, \frac{1}{2}\right)\tilde{a}^{n+1} - n^{2/n}\Lambda^{(n-2)/n}. \quad (4.71)$$

对于  $n = 2$ , 我们有  $\tilde{\delta}_a = -\sqrt{8\Lambda} \rightarrow 0$  和  $\tilde{P}_a = -2$ , 这对应于修正 DMT 结果 [21]。方便起见, 我们仍采用“DMT”这一术语, 并将该极限情况记为 DMT- $n$ 。它的拔出力可以在零接触半径时得到:

$$-\tilde{P}_c^{\text{DMT-}n} = n^{2/n}\Lambda^{(n-2)/n}. \quad (4.72)$$

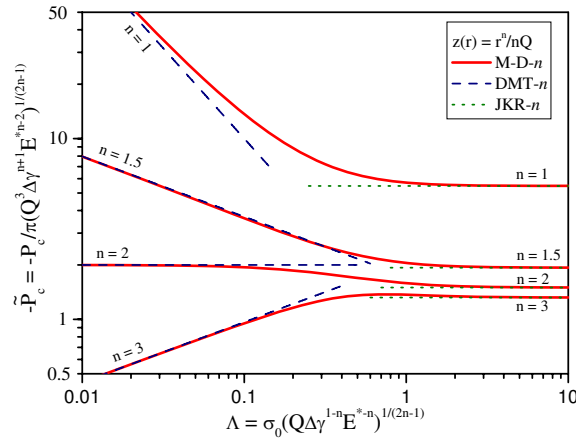


图 4.2: 不同形状指数  $n$  下无量纲拔出力随转变参数的变化

Fig. 4.2: Variation of the dimensionless pull-off force with the transition parameter  $\Lambda$  for special cases  $n = 1, 1.5, 2$  and  $3$ .

对于任意的  $n > 0$ , 随着无量纲参数  $\Lambda$  从零到无穷连续地变化, 在 M-D- $n$  模型中存在从 DMT- $n$  到 JKR- $n$  的转变。因此, 无量纲参数  $\Lambda$  称为转变参数。以形状指数  $n = 1, 1.5, 2$  和  $3$  四种情况为例, 我们将无量纲拔出力  $-\tilde{P}_c$  随转变参



数  $\Lambda$  的变化情况作于图 4.2 中。在小  $\Lambda$  一端, 对于  $n < 2$  无量纲拔出力  $-\tilde{P}_c$  与转变参数  $\Lambda$  负相关, 而对于  $n > 2$  无量纲拔出力  $-\tilde{P}_c$  与转变参数  $\Lambda$  正相关。但在大  $\Lambda$  一端, 对于任意的形状指数  $n$  无量纲拔出力  $-\tilde{P}_c$  独立于转变参数  $\Lambda$ 。对于形状指数  $n = 1, 1.5, 2$  和  $3$  四种情况, 无量纲拔出力  $-\tilde{P}_c$  在大  $\Lambda$  的极限值分别为  $5.471, 1.932, 1.5$  和  $1.320$ 。只有形状指数  $n = 2$  时, 拔出力  $-P_c$  在两个极限条件下才都独立于弹性模量。

### 4.5.3 三维吸附图

当接触体之间的吸附作用可以被忽略时, 可以使用 Hertz 模型来取代 M-D 模型。而当材料吸附作用不可以忽略时, 如果接触体较硬, M-D 模型可为 DMT 模型所代替; 反之, 即接触体较软的情况, 则可以方便地使用 JKR 模型。这一认识在现在看来似乎是显而易见的, 但早在上个世纪七十年代末, 引起了争议。虽然有这一认识, 但定量计算还得等到有了 M-D 模型 [21] 才由 Johnson 和 Greenwood [34] 解决。1997 年, Johnson 和 Greenwood [34] 基于 M-D 模型首先建立了表征近球体吸附接触模型适用性的一个吸附图 (adhesion map)。该图以转变参数  $\lambda$  和无量纲的载荷参数  $P/\pi R\Delta\gamma$  为坐标轴将平面划分成五个区域, 分别对应 Hertz、JKR、M-D、DMT 和 Bradley 模型的适用范围, 我们称之为 Johnson-Greenwood 吸附图, 如图 4.3 实线 ( $n = 2$ ) 所示。确定分割线的部分条件已经在前面介绍, 即式 (4.62)、(4.63) 和 (4.68)。而对于刚性极限, 与表面形状相关的弹性变形量也很小,

$$|\delta_H/\delta_t| < \zeta, \quad (4.73)$$

式中,  $\zeta \ll 1$ 。

Johnson-Greenwood 吸附图的思想可以很容易地推广到具有更一般形式的表面形状的接触体之间的吸附接触问题。因为我们已经建立了任意表面形状的轴对称体之间接触的广义 M-D 模型, 所以在给定表面形状的情况下我们可以建立相应的吸附图。特别地, 对于幂次型表面形状的轴对称体, 本章已经给出了 DMT- $n$  模型。我们以转变参数  $\Lambda$  和无量纲载荷参数  $\tilde{P}$  为坐标, 对于任意的  $n > 0$ , 取  $\xi = 0.05$ 、 $\eta_1 = 20$ 、 $\eta_2 = 0.05$  和  $\zeta = 0.05$ , 同样地可以将区域划分成五个部分, 对应 Hertz- $n$ 、JKR- $n$ 、DMT- $n$ 、M-D- $n$  和 Bradley- $n$  模型的适用范围。如图 4.3, 除了  $n = 2$ , 我们另外作出几种特殊情况, 即  $n = 1, 1.2, 1.5, 3$  和  $5$  的吸附图。对于更多的情况, 我们以形状指数  $n$  为第三个坐标轴, 建立一个三维吸附图, 如图 4.4 所示。



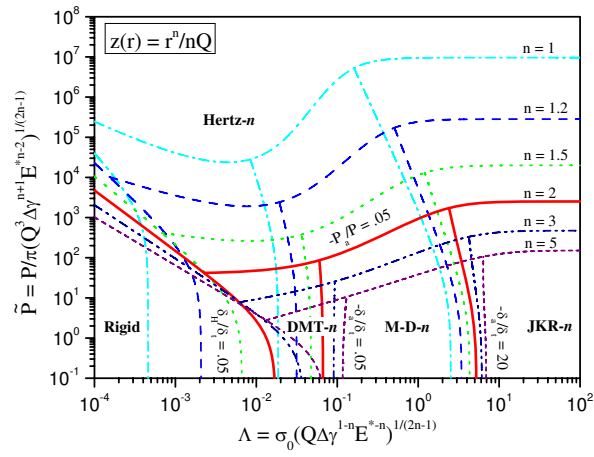


图 4.3: 不同形状指数  $n$  下的二维吸附图

Fig. 4.3: The adhesion map for special cases  $n = 1, 1.2, 1.5, 2, 3$  and  $5$ .

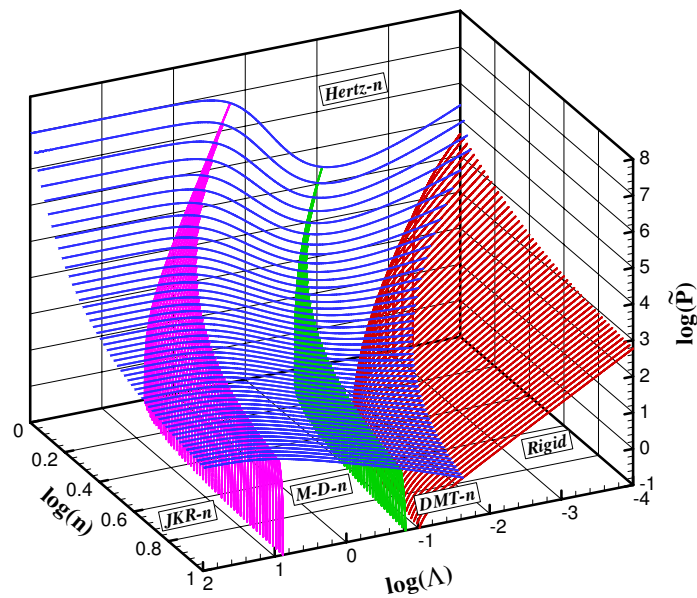


图 4.4: 三维吸附图

Fig. 4.4: The three-dimensional adhesion map.

## 4.6 本章小结

本章将近球体无摩擦轴向吸附接触的 Maugis 模型推广到具有任意有效的表面形状和表面吸附作用的轴对称弹性体, 利用弹性轴对称半空间在无摩擦边界条件下的解, 以及应力非奇异条件和 Griffith 关系, 建立了广义 Maugis 模型。我们将载荷、位移、表面变形和表面相互作用分解成分别对应于表面形状和表面吸附作用对该模型不同贡献的两部分, 并给出关联表面形状和表面吸附作用的关系式。对于给定的表面形状和吸附作用, 该模型可以很容易的求解, 避免了复杂的自协调计算, 但不违背自协调行为。

使用 Dugdale 势近似表面吸附作用得到了广义 M-D 模型, 在两个极端的条件下分别得到了广义 JKR 模型和广义 DMT 模型, 其中“MDT”这个术语只是为了方便而沿用的, 它既不对应于原始 DMT 模型, 也不对应于 IDMT 模型, 因为这两个模型都不满足表面变形和表面相互作用的自洽关系。使用旋转椭球体和幂次型两类表面形状, 分别推导了相应的公式, 方便了后续讨论。

将广义 Maugis 模型应用于具有幂次型的表面, 并采用 Dugdale 势近似表面吸附作用, 得到了 M-D- $n$  模型, 其中  $n$  为形状指数, 其值为任意正实数。在这个模型的基础上, 得到了从 JKR- $n$  到 DMT- $n$  的转变, 给出了若干形状指数  $n$  下的 Johnson-Greenwood 吸附图, 并以转变参数  $\Lambda$ 、无量纲载荷  $\tilde{P}$  和形状指数  $n$  为轴建立了三维吸附图。

## 第五章 用 Dugdale 近似匹配给定的作用势

### 5.1 引言

在近球体吸附接触的 M-D 模型 [21] 中, 粘着应力  $\sigma_0$  取为理论应力  $\sigma_{th}$  来匹配 Lennard-Jones 作用势。从 M-D 模型中得到了 JKR-DMT 转变 [21], 其中 DMT 拔出力为  $2\pi R\Delta\gamma$ , 这个值正好也对应于 Bradley 拔出力, 但 JKR-DMT 转变与 MYD 转变 (即 JKR-Bradley 转变) 并不完全重合 [53], 仅在 Tabor 数  $\mu$  (或 Maugis 数  $\lambda$ ) 较大和较小两个极端下分别有相同的值。这是偶然还是必然的呢? 还有没有其它的取法? 如果有, 新的取法是否更加合理? 本章将深入讨论这些问题。

1992 年, Maugis [21] 基于如下想法采用了 Dugdale 模型, 并将粘着应力  $\sigma_0$  取为理论应力  $\sigma_{th}$ 。在线弹性断裂力学 (linear elastic fracture mechanics, LEFM) 的研究中, 裂纹尖端附近存在一个粘着区 (cohesive zone), 应力在裂纹尖端达到材料的理论应力  $\sigma_{th}$ , 并在一个范围内减少到零 [102]。由这一内载引起的应力集中因子与外载引起的应力集中因子相互抵消, 使得奇异性消失, 并使得变形的裂纹尖端极为锐利, 这在粘着区比起裂纹长度小得多情况下才可以用。Maugis 认为可以很容易地使用 Dugdale 模型来解决吸附接触问题, 通过消除应力集中因子确定应力分布和变形之间的协调关系。不过, 不同于 Dugdale [98] 取  $\sigma_0$  为材料屈服应力, Maugis 取  $\sigma_0$  为理论应力  $\sigma_{th}$ 。

1997 年, Greenwood [53] 指出, 采用 Dugdale 势这一简化的表面吸附作用的 Maugis 模型与建立在特定的作用势 (如 Lennard-Jones 作用势) 下的完全自协调模型并不是精确对应的, 即 Maugis 数  $\lambda = \sigma_0(9R/2\pi\Delta\gamma E^{*2})^{1/3}$  和 Tabor 数  $\mu = (R\Delta\gamma^2/E^{*2}z_0^3)^{1/3}$  之间不存在精确的对应关系。同年, Johnson 和 Greenwood [34] 认为 Maugis 取粘着应力  $\sigma_0$  为理论应力  $\sigma_{th}$  过于随意。然而, 他们并未给出更加合理的方案, 而直接沿用了 Maugis 的取法, 即  $\lambda \doteq 1.157\mu$ 。

1998 年, Barthel [67] 将 Maugis 模型推广到更加一般的吸附作用, 并以线性、二次和幂次等近似的作用势为例, 说明从 JKR 到 DMT 转变对作用势的形式并不敏感, 其中各近似作用势的最大的应力  $\sigma_0$  均取为理论应力  $\sigma_{th}$ , 这同样是过于随意。同年, Greenwood 和 Johnson [68] 还采用双 Hertz 型近似表面压强分布作了讨论, 但仍没能够清楚地确定 Maugis 数  $\lambda$  和 Tabor 数  $\mu$  的关系。不同于

先前取理论应力  $\sigma_{th}$  作为  $\sigma_0$  的值, 他们取 M-D 模型的  $\delta_t$  的值作为新模型的  $\delta_t$  以确定  $\sigma_0$  的值, 然而 M-D 模型本身的取法就过于随意, 所以问题还是没有得到解决。

2005 年, Luan 和 Robbins [86] 以对接触问题的原子模拟为根据在 Nature 杂志上发表连续介质力学接触模型失效的文章, 次年, 他们 [87] 又更进一步深入比较了连续介质力学接触模型和原子模拟的接触模型。特别地, 他们对表面均匀弯曲的刚性针尖和弹性基体接触的原子模拟和 M-D (Maugis-Dugdale) 模型进行了比较。他们采用原子模拟中原子势截断后的作用程  $H_0$  作为 M-D 模型的  $\delta_t$  和通过拟合取定的  $\delta_t$  两种方式分别确定  $\sigma_0$  再进行比较, 发现后面一种方式给出的拔出力和原子模拟给出的拔出力较为吻合, 而特征半径却不理想。对于接触尺度达到原子尺度的量级, 连续介质力学模型是必然失效的, 不过在纳米尺度下人们还是经常使用连续介质力学模型。Luan 和 Robbins [87] 采用两种方式来估计 M-D 模型的参数, 而没有采用之前的方式, 但仍没能摆脱 M-D 模型的参数选取过于随意的状况。值得注意的是, 如果 M-D 模型的参数需要通过原子模拟结果拟合给出的话, 也许可以拟合得比较漂亮, 但它将失去其作为方便实用的近似模型的意义。因此, 我们希望能有一个简单的方式可以对 M-D 模型进行补充。

我们以前面两章推广的接触模型为基础, 从一般化的角度对 Maugis 近似吸附接触模型进行补充, 使 Maugis 近似吸附接触模型更合理更方便地匹配建立在特定的相互作用下的完全自洽吸附接触模型。第 5.2 节讨论幂次型表面的轴对称体吸附接触问题中以 Dugdale 势近似给定作用势, 着重比较近球体吸附接触的 M-D 模型和完全自洽模型。第 5.3 节讨论理想球体和半空间接触问题中以 Dugdale 势近似给定作用势。第 5.4 节给出本章的结论。

## 5.2 幂次型轴对称表面吸附接触

### 5.2.1 用 Dugdale 近似来匹配 Lennard-Jones 作用势

在第四章中, 我们发现在广义 M-D 模型中存在着广义 JKR–DMT 转变, 而幂次型表面作为其中一类有效的表面形状, 在 M-D- $n$  模型中理所当然具有同样的性质——扩展 JKR–DMT 转变, 即从 JKR- $n$  极限向 DMT- $n$  极限的转变, 如图 4.2 所示。而在第三章中, 我们在完全自洽模型中得到了扩展 MYD 转变, 即从 JKR- $n$  极限向 Bradley- $n$  极限的转变, 如图 3.11 所示。因此上述两个转变在软接触的条件下均对应于 JKR- $n$  极限, 现在我们着重讨论 DMT- $n$  极限和 Bradley- $n$  极限。

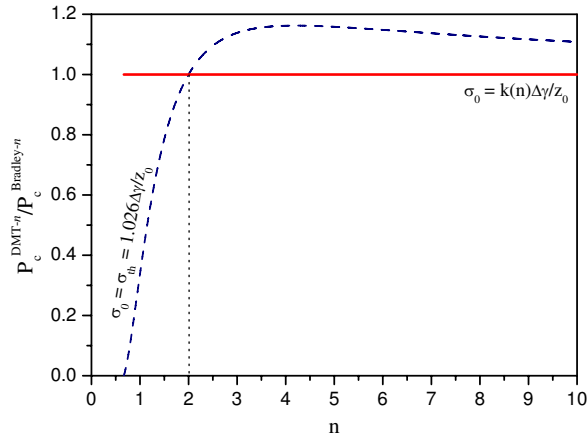


图 5.1: DMT- $n$  和 Bradley- $n$  拔出力的比较

Fig. 5.1: A comparison of the DMT- $n$  and Bradley- $n$  pull-off forces.

因为 DMT- $n$  模型是一个弹性接触模型，而 Bradley- $n$  是一个刚性接触模型，所以扩展 JKR-DMT 转变应为扩展 MYD 转变的一部分。而当接触半径为零时，DMT- $n$  模型几乎不产生弹性变形。因此，它应对应于刚性的情况，即 Bradley- $n$  模型。对于近球形 ( $n = 2$ )，我们知道 DMT 和 Bradley 拔出力均为  $2\pi R\Delta\gamma$ ，这个值在文献中经常不加区别。对于任意的形状指数  $n$ ，式 (4.72) 和 (3.56) 分别给出了 DMT- $n$  和 Bradley- $n$  拔出力。因此，我们可以得到二者的比值为：

$$\frac{P_c^{\text{DMT-}n}}{P_c^{\text{Bradley-}n}} = \frac{1}{\phi(n)} \left( \frac{\sigma_0}{\Delta\gamma/z_0} \right)^{(n-2)/n}, \quad (5.1)$$

式中，

$$\phi(n) = \frac{32}{9n-2} \mathbf{B}\left(3 - \frac{2}{n}, \frac{2}{n}\right) \left(168 \mathbf{B}\left(4 - \frac{2}{n}, 6\right)\right)^{(3n-2)/6n}. \quad (5.2)$$

当  $n = 2$  时，我们可以计算得到  $\phi(2) = 1$ ，因而对于任意选取的粘着应力  $\sigma_0$ ，都有  $P_c^{\text{DMT-}n}/P_c^{\text{Bradley-}n} = 1$ 。这样看来，粘着应力  $\sigma_0$  在近球体接触的情况下没有单一的值，而是可以任意选取。虽然 Maugis [21] 以理论应力  $\sigma_{\text{th}}$  作为粘着应力  $\sigma_0$  的值看似有一定的物理依据——至少是因为粘着应力不能超过理论应力，但是没有任何的证据表明这个值比起其他值来得合适。相反地，对于其它的形状指数  $n$ ，我们将发现这种取法并非明智的。如果我们继续采用理论应力  $\sigma_{\text{th}}$  作为粘着应力  $\sigma_0$  的值，如图 5.1 虚线 ( $\sigma_0 = \sigma_{\text{th}}$ ) 清楚地说明了 DMT- $n$  拔出力和 Bradley- $n$  拔出力的比值  $P_c^{\text{DMT-}n}/P_c^{\text{Bradley-}n}$  随着形状指数  $n$  的增大并不是保

持为 1, 而只是在某些情况下比值才为 1。更确定地说, 随着形状指数  $n$  的增大, 该比值从对应于  $n = 2/3$  时的零值开始增大, 接着在  $n = 2$  时穿过 1, 并在  $n = 4.210$  时达到最大值 1.162, 然后开始下降, 并最终趋近于 1。因此, 采用理论应力  $\sigma_{th}$  作为粘着应力  $\sigma_0$  的值, 只有在  $n = 2$  和  $n = \infty$  两种情况下, 可以获得相同的 DMT- $n$  和 Bradley- $n$  拔出力, 而对于其他任意的形状指数  $n$ , DMT- $n$  和 Bradley- $n$  拔出力将不再一致。

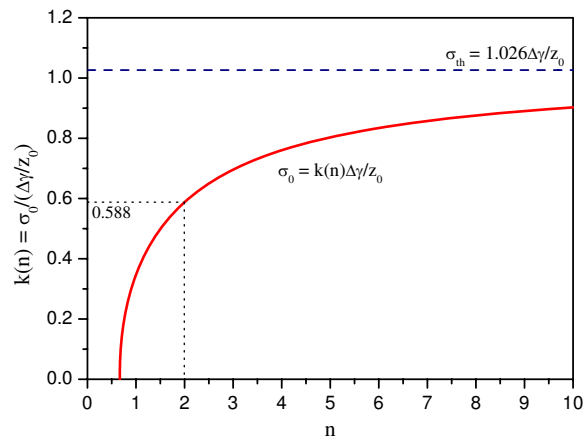


图 5.2: 使用 Dugdale 近似匹配 Lennard-Jones 势的情况下的系数  $k(n)$   
 Fig. 5.2: The coefficient  $k(n)$  involved in the Dugdale approximation to match the Lennard-Jones potential.

为了避免出现上述问题, 我们只能重新选择粘着应力  $\sigma_0$  使得 DMT- $n$  和 Bradley- $n$  拔出力对于任意的形状指数  $n$  始终保持相等, 即:

$$-P_c^{\text{DMT-}n} = -P_c^{\text{Bradley-}n}, \quad (5.3)$$

如图 5.1 实线所示。在这个方案下, 我们可以得到粘着应力  $\sigma_0$  的值为:

$$\sigma_0 = k(n) \Delta \gamma / z_0, \quad (5.4)$$

式中, 系数  $k(n)$  定义为:

$$k(n) = (\phi(n))^{n/(n-2)}. \quad (5.5)$$

我们将该系数随形状指数  $n$  的变化情况用实线画在图 5.2 中。很显然, 对于确定的形状指数  $n$ , 系数  $k(n)$  有一个唯一的值, 即粘着应力  $\sigma_0$  有一个唯一的值, 且系数  $k(n)$  随着形状指数  $n$  的增大而增大。当  $n \rightarrow \infty$  时, 该系数趋近于最大值

1.026, 如图 5.2 虚线所示, 它对应于取理论应力  $\sigma_{\text{th}}$  为粘着应力  $\sigma_0$  的情况。当  $n = 1, 1.5, 2$  和  $3$  时, 我们可以得到系数  $k(n)$  的值分别为  $0.347, 0.499, 0.588$  和  $0.696$ , 如表 5.1。值得注意的是, 当形状指数  $n = 2$  时, 系数  $k(n)$  需要通过求极限才能得到, 它的精确形式是:

$$\lim_{n \rightarrow 2} k(n) = \exp(-223/420) \doteq 0.588, \quad (5.6)$$

该极限可以借助数学软件直接计算得到。因此, 对于近球体 ( $n = 2$ ), 我们可以给出粘着应力  $\sigma_0$  的一个新的建议值为<sup>1</sup>:

$$\sigma_0 \doteq 0.588\Delta\gamma/z_0 \doteq 0.573\sigma_{\text{th}}. \quad (5.7)$$

式中, 对于 Lennard-Jones 作用势  $\sigma_{\text{th}} \doteq 1.026\Delta\gamma/z_0$ 。

表 5.1: 用 Dugdale 近似匹配 Lennard-Jones 作用势的相关参数

Table 5.1: The correlative parameters for the Dugdale approximation to match the Lennard-Jones potential in the adhesive contact of elastic objects.

$n$	$\phi(n)$	$k(n) = \Lambda/\mu$	$\sigma_0/\sigma_{\text{th}}$
1	2.880	0.347	0.338
1.5	1.261	0.499	0.486
2	1	0.588	0.573
2.5	0.917	0.650	0.633
3	0.886	0.696	0.678
$\infty$	1.026	1.026	1

上述分析给出的方案对提高 M-D- $n$  模型与完全自洽模型的匹配度是相当显著的, 这可以通过以下几个方面的比较来加以认识。

为方便比较, 我们统一采用第三章的无量纲形式。M-D- $n$  模型的无量纲形

<sup>1</sup>论文 [69] 误为  $\sigma_0 \doteq 0.588\Delta\gamma/z_0 (\doteq 0.603\sigma_{\text{th}})$ , 但不产生任何其它影响。



式的载荷—位移关系和 Griffith 关系:

$$\bar{\delta} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)\bar{a}^n - 2k(n)\mu^{(2n-1)/n}\bar{a}\sqrt{m^2 - 1}, \quad (5.8)$$

$$\bar{P} = \frac{1}{\pi}\mathbf{B}\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{1}{2}\right)\frac{\bar{a}^{n+1}}{\mu^{(2n-1)/n}} - \frac{2}{\pi}k(n)\bar{a}^2\left(m^2 \operatorname{arcsec} m + \sqrt{m^2 - 1}\right), \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n}k(n)\bar{a}^n\left[m^n\left(1 - \mathbf{I}_{m^{-2}}\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) - \frac{n}{\pi}\mathbf{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)\operatorname{arcsec} m\right] \\ & + \frac{4}{\pi}k^2(n)\mu^{(2n-1)/n}\bar{a}\left(\sqrt{m^2 - 1}\operatorname{arcsec} m + 1 - m\right) = 1. \end{aligned} \quad (5.10)$$

首先,我们就形状指数  $n = 2$  的情况比较一下 JKR–DMT 转变和 MYD 转变。我们将无摩擦完全自洽模型和 M-D 模型给出的拔出力随 Tabor 数  $\mu$  的变化分别画在图 5.3 中,其中 M-D 模型包括使用我们给出的建议值 ( $\sigma_0 = 0.588\Delta\gamma/z_0$ ) 以及 Maugis 的建议值 ( $\sigma_0 = 1.026\Delta\gamma/z_0$ ) 两种情况。众所周知,对于中等大小的 Tabor 数  $\mu$ ,使用  $\sigma_{\text{th}} = 1.026\Delta\gamma/z_0$  作为粘着应力  $\sigma_0$  的 M-D 模型给出的拔出力比使用完全自洽模型给出的结果来得要小。我们惊奇地发现,使用我们给出的建议值得到的拔出力在全范围的 Tabor 数  $\mu$  内与完全自洽模型给出的结果(即 MYD 转变)相当接近。尽管我们的建议只是要求刚性极限下拔出力一致,但在整个转变过程中吻合得相当好。

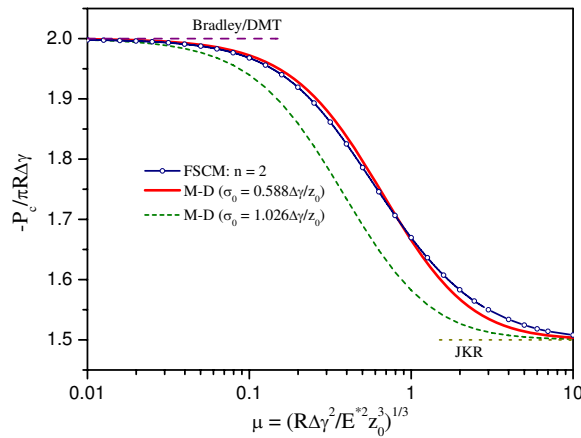


图 5.3: 各接触模型的拔出力随 Tabor 数变化情况的比较

Fig. 5.3: Variation of the pull-off force with the Tabor number for the special case of  $n = 2$ .

其次,我们比较一下近球体 ( $n = 2$ ) 吸附接触中各模型给出的载荷—位移曲线,并考察一下表面变形和压强的分布情况。在图 5.4 中,对于 Tabor 数  $\mu = 1$  的情况,我们给出了不考虑吸附的 Hertz 模型、不考虑弹性变形的 Bradley 模



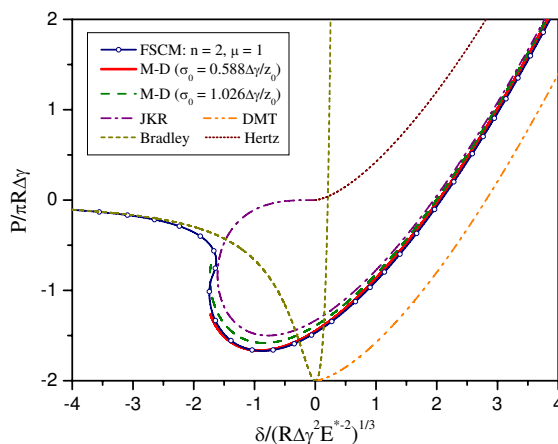


图 5.4: 各接触模型的载荷—位移曲线的比较

Fig. 5.4: Load–displacement curves for the special case of  $n = 2$  and  $\mu = 1$ .

型、考虑弹性吸附接触的 DMT, JKR 和 M-D 模型的无量纲载荷—位移曲线, 并与使用 Lennard-Jones 作用势的 FSCM 无量纲载荷—位移曲线进行比较。由图可见, 使用  $\sigma_0 = 1.026\Delta\gamma/z_0$  (对应于  $\lambda = 1.157\mu$ ) 作为粘着应力的 M-D 模型已经很接近于 FSCM, 但是我们使用  $\sigma_0 = 0.588\Delta\gamma/z_0$  (对应于  $\Lambda = 0.588\mu$ , 即  $\lambda = 1.127\Lambda = 0.663\mu$ ) 作为粘着应力的 M-D 模型更加接近于 FSCM。对于更大或者更小的 Tabor 数, 我们可以得到同样的结论。在图 5.5 中, 我们就形状指数  $n = 2$  和 Tabor 数  $\mu = 1$  的情况给出了拔出点 (Pull-off) 和零载荷对应点 (Zero-load) 的表面变形和压强随半径的变化情况。从图 5.5 (a) 可见, 使用  $\sigma_0 = 0.588\Delta\gamma/z_0$  给出的 M-D 模型比使用  $\sigma_0 = 1.026\Delta\gamma/z_0$  给出的 M-D 模型在全范围的径上都更吻合于 FSCM。具体分析使用  $\sigma_0 = 0.588\Delta\gamma/z_0$  给出的 M-D 模型和 FSCM 的差别可见, 在接触区边缘, 随着半径的增大, M-D 模型 ( $\sigma_0 = 0.588\Delta\gamma/z_0$ ) 的变形量先是比 FSCM 的来得小, 然后来得大, 这是因为压强的分布过于理想, 在接触区边缘, 随着半径的增大, 先是过小地估计了压强, 而后又过大地估计了压强, 如图 5.5 (b) 所示。然而在接触区外这么粗糙的压强分布情况却还能得到相当吻合的结果, 充分说明了采用最为简单的近似作用势—Dugdale 近似—是简便而有效的。从图 5.5, 我们发现在接触区内部不管是变形还是压强的分布, 采用  $\sigma_0 = 0.588\Delta\gamma/z_0$  的 M-D 模型比采用  $\sigma_0 = 1.026\Delta\gamma/z_0$  的 M-D 模型都更吻合于 FSCM, 但随着接触量的增大这一区别变得不再明显。因此我们说, 我们的建议值在刚开始接触吸附时有明显的优势, 这将为实验中拟合数据带来更高的精度。

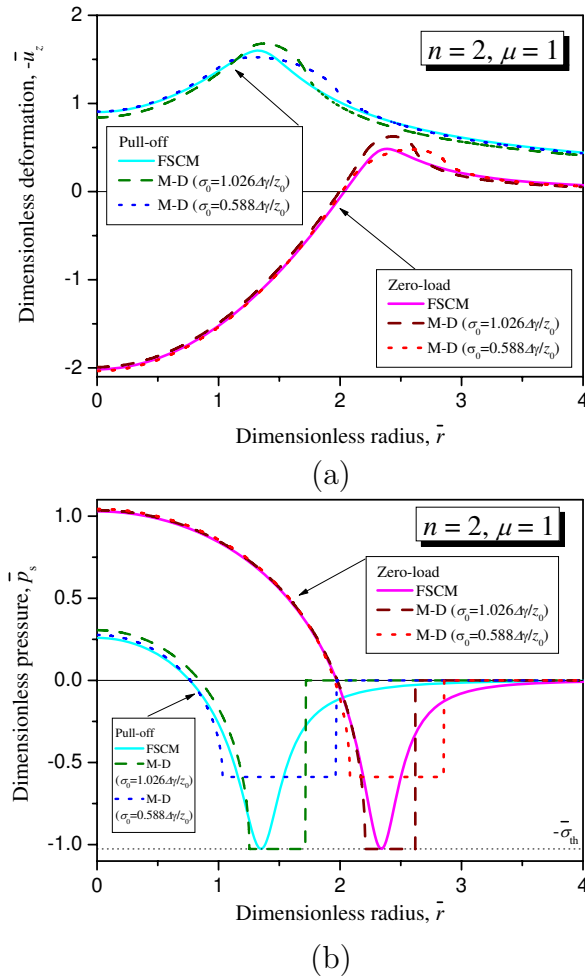


图 5.5: (a) 表面变形和 (b) 表面压强沿半径方向的分布情况

Fig. 5.5: The distributions of (a) surface deformation and (b) pressure with the radius at the points corresponding to pull-off and zero-load for the special case of  $n = 2$  and  $\mu = 1$ .

最后，我们就更一般的形状指数  $n$  比较一下扩展 MYD 转变和扩展 JKR–DMT 转变。如图 5.6 所示，对于  $n = 1, 1.5, 2$  和  $3$  四种情况，我们给出各模型的无量纲拔出力，其中无量纲拔出力定义为：

$$-\bar{P}_c \equiv -P_c / \pi \Delta \gamma Q^{2/n} z_0^{(2-n)/n}. \quad (5.11)$$

对于 M-D- $n$  模型的粘着应力  $\sigma_0$ ，我们只采用了新的建议值 (如表 5.1)，因为其它取法在图 5.1 中我们已经示明了在刚性极限下将不能相同，除了  $n = 2$  情况。不过对于  $n = 2$  情况，我们也在图 5.3 中已经示明了我们的建议值使得两个转变更加吻合。因此，我们只采用新的建议值来讨论两个转变的吻合情况。对于  $n = 1, 1.5, 2$  和  $3$  四种情况，我们建议的系数  $k(n)$  分别为 0.347, 0.499, 0.588 和

0.696, 它们分别对应于  $\Lambda = 0.347\mu$ ,  $0.499\mu$ ,  $0.588\mu$  和  $0.696\mu$ 。由图可见, 扩展 JKR–DMT 转变与扩展 MYD 转变在各种情况下都吻合得很好。

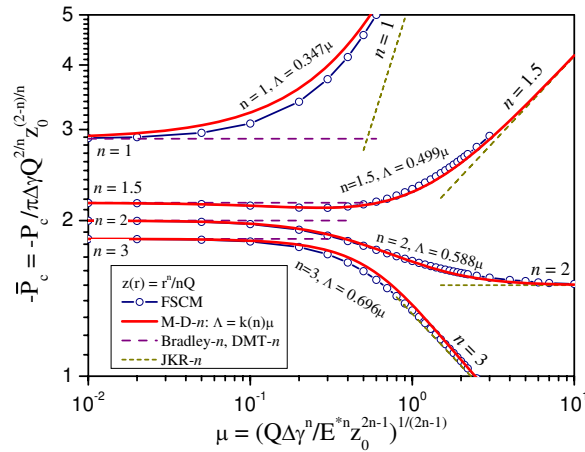


图 5.6: 不同形状指数下无量纲拔出功随扩展 Tabor 数的变化

Fig. 5.6: Variation of the pull-off force with the extended Tabor number for  $n = 1, 1.5, 2$  and  $3$ .

通过上述广泛的比较, 我们发现采用近似模型和完全自洽模型在刚性极限下要求有相同的拔出功这个简单的关系, 使得两个模型在从刚性极限到 JKR- $n$  极限整个转变的过程中都有很好的一致性。因此, 对于广义 Maugis 模型, 我们补充这个关系将有助于提高其实际应用的精确度。

### 5.2.2 用 Dugdale 近似来匹配更一般形式的 Lennard-Jones 势

本节进一步讨论更一般形式的 Lennard-Jones 势 [20]:

$$p^*(h) = \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)\Delta\gamma}{(\alpha - \beta)z_0} [(h/z_0)^{-\alpha} - (h/z_0)^{-\beta}], \quad (5.12)$$

式中,  $\alpha$  和  $\beta$  为正的实数<sup>2</sup>, 且满足  $\alpha > \beta > 1$ 。这个作用势对应的理论应力为:

$$\sigma_{th} = (\alpha - 1)(\beta - 1)(\beta^\beta/\alpha^\alpha)^{1/(\alpha-\beta)} \Delta\gamma/z_0. \quad (5.13)$$

在上节中我们讨论的情况对应于  $\alpha = 9$  和  $\beta = 3$ 。

<sup>2</sup>这里使用的  $\beta$  和第三章里的定义没有任何的关系, 应加以区别。

首先, 我们需要给出完全自洽模型的刚性极限。对于幂次型表面, 当材料均为刚性的时候, 表面间隔可以写作:

$$h(r) = z_0 - \delta + r^n/nQ. \quad (5.14)$$

这里定义的表面间隔  $h(r)$  和前面章节使用的表面间距  $H(r)$  的关系为  $h(r) = z_0 + H(r)$ 。由式 (5.14), 我们立即有:

$$n^{(2-n)/n}Q^{2/n}(h(r) - z_0 + \delta)^{(2-n)/n} dh(r) = r dr. \quad (5.15)$$

将上式和更一般形式的 Lennard-Jones 势 (5.12) 代入

$$P = \int_0^\infty p^*(h(r)) 2\pi r dr, \quad (5.16)$$

从而转化为对表面间隔  $h(r)$  从  $z_0 - \delta$  到  $\infty$  的积分。这样我们可以得到对应于更一般形式的 Lennard-Jones 势的 Bradley- $n$  方程:

$$P = \frac{2\pi(\alpha - 1)(\beta - 1)\Delta\gamma}{(\alpha - \beta)nz_0} (nQz_0)^{2/n} \left[ \mathbf{B}\left(\alpha - \frac{2}{n}, \frac{2}{n}\right) \times (1 - \delta/z_0)^{-\alpha-2/n} - \mathbf{B}\left(\beta - \frac{2}{n}, \frac{2}{n}\right) (1 - \delta/z_0)^{-\beta-2/n} \right]. \quad (5.17)$$

对上式求极小值, 可得对应的拔出力:

$$-P_c^{\text{Bradley-}n} = \pi\phi(n; \alpha, \beta)(nQz_0)^{2/n}(\Delta\gamma/z_0), \quad (5.18)$$

式中,

$$\phi(n; \alpha, \beta) = \frac{2(\alpha - 1)(\beta - 1)}{\alpha n - 2} \mathbf{B}\left(\beta - \frac{2}{n}, \frac{2}{n}\right) \times \left( \frac{\mathbf{B}\left(\beta + 1 - \frac{2}{n}, \alpha - \beta\right)}{\mathbf{B}(\beta, \alpha - \beta)} \right)^{(\beta n - 2)/(\alpha - \beta)n}. \quad (5.19)$$

其次, 我们应用近似模型和完全自洽模型的拔出力有相同刚性极限的条件, 即 DMT- $n$  拔出力 (4.72) 和 Bradley- $n$  拔出力 (5.18) 相等, 可以得到 (5.4), 不过系数  $k(n)$  是一个更一般的形式:

$$k(n; \alpha, \beta) = \left[ \frac{2(\alpha - 1)(\beta - 1)}{(\alpha n - 2)} \mathbf{B}\left(\beta - \frac{2}{n}, \frac{2}{n}\right) \times \left( \frac{\mathbf{B}\left(\beta + 1 - \frac{2}{n}, \alpha - \beta\right)}{\mathbf{B}(\beta, \alpha - \beta)} \right)^{(\beta n - 2)/(\alpha - \beta)n} \right]^{n/(n-2)}, \quad (5.20)$$

式中,  $n > 2/\beta$ 。

最后, 我们就三种常用的形状指数  $n = 1, 2$  和  $\infty$  简化系数  $k(n; \alpha, \beta)$  的表达式:

$$\lim_{n \rightarrow 1} k(n; \alpha, \beta) = \frac{(\alpha - 2)(\beta - 2)}{2(\alpha - 1)} \left( \frac{\beta - 1}{\alpha - 1} \right)^{(\beta - 2)/(\alpha - \beta)}, \quad (5.21)$$

$$\lim_{n \rightarrow 2} k(n; \alpha, \beta) = \exp \left[ \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta} (\gamma + \psi_0(\beta)) - \frac{\beta - 1}{\alpha - \beta} (\gamma + \psi_0(\alpha)) - \frac{\alpha\beta - 1}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} \right], \quad (5.22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k(n; \alpha, \beta) = (\alpha - 1)(\beta - 1)(\beta^\beta/\alpha^\alpha)^{1/(\alpha - \beta)}, \quad (5.23)$$

式中,  $\gamma$  为 Euler 常数, 其数值约为 0.577216,  $\psi_0(\alpha) \equiv \Gamma'(\alpha)/\Gamma(\alpha)$  为双伽玛函数,  $\Gamma(\alpha)$  为 Gamma 函数。如果  $\alpha$  为整数, 那么  $\psi_0(\alpha) = -\gamma + \mathbf{H}_{\alpha-1}$ , 其中  $\mathbf{H}_{\alpha-1}$  为调和数。值得注意的是, 对于第三种情况 ( $n = \infty$ ), 即平头的接触体, 总有粘着应力和理论应力相等, 即  $\sigma_0 = \sigma_{th}$ 。

### 5.3 理想球体和半空间的吸附接触

本节研究理想球体和半空间的吸附接触问题, 并以 Dugdale 势来近似匹配 Lennard-Jones 作用势。接触体的表面方程写作:

$$z(r) = R - \sqrt{R^2 - r^2}. \quad (5.24)$$

由第四章我们可以立即得到相应的 M-D 模型, 方便起见, 我们记该模型为 M-D-R 模型。如果采用第三章的无量纲参数, 则 M-D-R 模型无量纲形式的位移、载荷和 Griffith 关系可以写作:

$$\bar{\delta} = \delta/z_0 = \frac{1}{2\epsilon} \hat{a} \ln \frac{1 + \hat{a}}{1 - \hat{a}} - \frac{2}{\sqrt{\epsilon}} \bar{\sigma}_0 \mu^{3/2} \hat{a} \sqrt{m^2 - 1}, \quad (5.25)$$

$$\bar{P} = P/\pi R \Delta \gamma = \frac{1}{2\pi \mu^{3/2} \epsilon^{3/2}} \left[ (1 + \hat{a}^2) \ln \frac{1 + \hat{a}}{1 - \hat{a}} - 2\hat{a} \right] - \frac{2}{\pi \epsilon} \bar{\sigma}_0 \hat{a}^2 \left( m^2 \operatorname{arcsec} m + \sqrt{m^2 - 1} \right), \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\sigma}_0}{\epsilon} \left[ 1 - \sqrt{1 - \hat{a}^2 m^2} - \frac{\hat{a}}{\pi} \ln \frac{1 + \hat{a}}{1 - \hat{a}} (\operatorname{arcsec} m - \sqrt{m^2 - 1}) \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi} \operatorname{arccsc} m + \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \hat{a}^2 m^2} \arctan \sqrt{\frac{1 - \hat{a}^2 m^2}{m^2 - 1}} \right] \\ + \frac{4}{\pi \sqrt{\epsilon}} \bar{\sigma}_0^2 \mu^{3/2} \hat{a} \left( \sqrt{m^2 - 1} \operatorname{arcsec} m + 1 - m \right) = 1, \quad (5.27) \end{aligned}$$

式中,  $\epsilon = z_0/R$ ,  $\bar{\sigma}_0 = \sigma_0/(\Delta\gamma/z_0)$ ,  $\hat{a} = a/R$ , 以及  $\mu = (R\Delta\gamma^2/E^*z_0^3)^{1/3}$ 。

### 5.3.1 完全自治模型的刚性极限

由表面方程 (5.24), 我们有:

$$(R - z(r)) dz(r) = r dr.$$

考虑到表面间隔  $h(r) = z_0 - \delta + z(r)$ , 上式可以写作:

$$(R - z_0 + \delta - h(r)) dh(r) = r dr. \quad (5.28)$$

将上式和 Lennard-Jones 作用势代入  $P = \int_0^R p^*(h(r)) 2\pi r dr$ , 转化为对  $h(r)$  从  $z_0 - \delta$  到  $z_0 - \delta + R$  的积分, 进而计算可得:

$$P = 2\pi R\Delta\gamma \left\{ \frac{1}{3} (1 - \delta/z_0)^{-8} + \frac{z_0}{21R} [(1 - \delta/z_0 + R/z_0)^{-7} - (1 - \delta/z_0)^{-7}] \right. \\ \left. - \frac{4}{3} (1 - \delta/z_0)^{-2} - \frac{4z_0}{3R} [(1 - \delta/z_0 + R/z_0)^{-1} - (1 - \delta/z_0)^{-1}] \right\},$$

或者写作:

$$\bar{P} = \frac{2}{3} (1 - \bar{\delta})^{-8} + \frac{2\epsilon}{21} [(1 - \bar{\delta} + 1/\epsilon)^{-7} - (1 - \bar{\delta})^{-7}] \\ - \frac{8}{3} (1 - \bar{\delta})^{-2} - \frac{8\epsilon}{3} [(1 - \bar{\delta} + 1/\epsilon)^{-1} - (1 - \bar{\delta})^{-1}]. \quad (5.29)$$

我们称该方程为理想球体的修正 Bradley 方程, 或记为 Bradley- $R$  方程。如果  $R$  远大于  $z_0$ , 即  $\epsilon \ll 1$ , 这个式子将简化为近球体下的 Bradley 方程。由极值条件  $d\bar{P}/d\bar{\delta} = 0$ , 我们可以得到极值点  $\bar{\delta} = \bar{\delta}_c$  满足的方程为:

$$(1 - \bar{\delta}_c)^{-9} + \frac{\epsilon}{8} [(1 - \bar{\delta}_c + 1/\epsilon)^{-8} - (1 - \bar{\delta}_c)^{-8}] \\ - (1 - \bar{\delta}_c)^{-3} - \frac{\epsilon}{2} [(1 - \bar{\delta}_c + 1/\epsilon)^{-2} - (1 - \bar{\delta}_c)^{-2}] = 0. \quad (5.30)$$

该方程可以通过数值求解给出结果, 但考虑到半径  $R$  比间隔  $z_0$  大得多, 我们将采用渐近展开的方法 [93] 来加以求解。

假设  $\bar{\delta}_c$  关于小参数  $\epsilon$  有幂级数展开式:

$$\bar{\delta}_c = a_0 + a_1\epsilon + a_2\epsilon^2 + a_3\epsilon^3 + O(\epsilon^4), \quad (5.31)$$

式中,  $a_k$  为待定系数。将该式代入方程 (5.30), 并展开整理成关于小参数  $\epsilon$  的幂级数形式, 再由各项系数为零的条件逐一确定系数  $a_k$  可得:

$$\bar{\delta}_c = -\frac{1}{16}\epsilon - \frac{13}{512}\epsilon^2 + \frac{109}{1536}\epsilon^3 + O(\epsilon^4). \quad (5.32)$$

在图 5.7 中, 我们将 Bradley- $R$  拔出点位移的渐近级数解和数值解进行了比较。当  $R/z_0 > 5$  时, 从图中可以看出, 不管渐近级数解取几项, 两者都吻合得很好; 但当  $R$  和  $z_0$  相当时, 与数值解相比较发现, 渐近级数解取两项、三项时反而不如只取一项时的效果来得好。不过  $R$  和  $z_0$  相当的情况对于采用连续性假设本身就不再合适。在这样的情况下, 取渐近级数解的第一项作为近似解即可, 它能保证在有效的  $R/z_0$  值上都有较好的近似。把渐近级数解代入 Bradley- $R$  方程 (5.29), 并展开整理成关于小参数  $\epsilon$  的幂级数形式, 可得 Bradley- $R$  拔出力为:

$$-\bar{P}_c^{\text{Bradley-}R} = 2 \left( 1 - \frac{9}{7}\epsilon + \frac{131}{96}\epsilon^2 - \frac{2035}{1536}\epsilon^3 + O(\epsilon^4) \right). \quad (5.33)$$

我们发现, 只取  $\delta_c/z_0$  的渐近级数解 (5.32) 的第一项代入时, 同样有上式右边括号中给出的前四项, 也就是说达到了  $O(z_0/R)^3$  的精度。这再次说明只取渐近级数解 (5.32) 的第一项, 近似已经足够精确。在图 5.8 中, 我们将 Bradley- $R$  拔出力的渐近级数解和数值解进行了比较。从图可知, 如果  $R/z_0$  相当大, Bradley- $R$  拔出力将为常量  $2\pi R\Delta\gamma$ , 它与近球体的 Bradley 拔出力是一样的; 而当  $R/z_0$  不太大时, 我们不能只取展开式的第一项, 具体可以根据精度要求来操作。对于实际问题, 半径  $R$  往往比间隔  $z_0$  大很多, 否则连续介质的假设将不再成立。这在这个意义下, 我们说, Bradley- $R$  拔出力的渐近级数展开式 (5.33) 可以取前两项来近似得到。

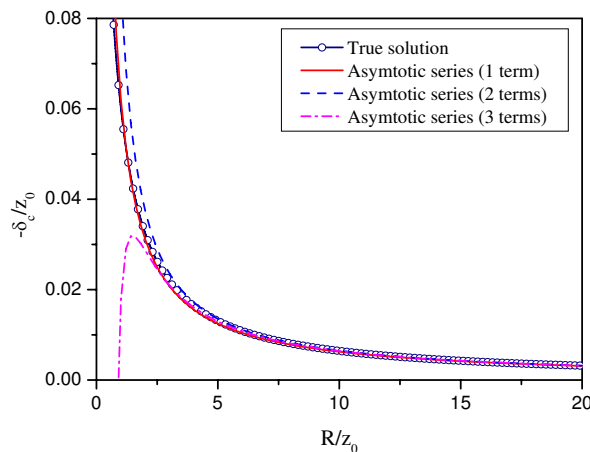


图 5.7: Bradley- $R$  拔出点位移的数值解和渐近级数解的比较

Fig. 5.7: Comparison of the numerical results and the asymptotic series of the pull-off displacement.

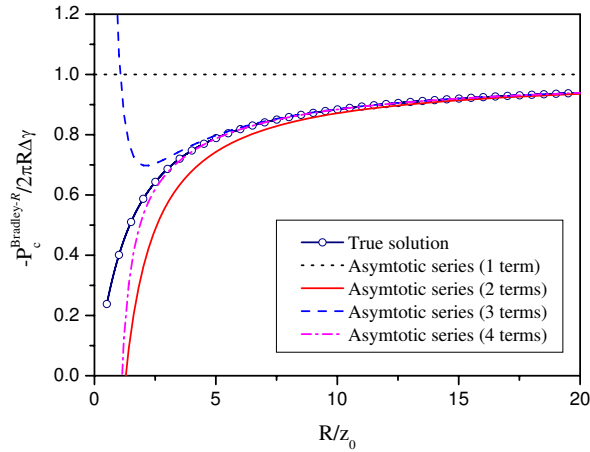


图 5.8: Bradley- $R$  拔出力的数值解和渐近级数解的比较

Fig. 5.8: Comparison of the numerical results and the asymptotic series of the pull-off force.

### 5.3.2 用 Dugdale 近似来匹配 Lennard-Jones 作用势

现在考虑 M-D-R 模型的极限模型之一 DMT- $R$  模型。将表面方程 (5.24) 代入式 (4.34) 可得:

$$a^2 m^2 \rightarrow 2R\Delta\gamma/\sigma_0 - \Delta\gamma^2/\sigma_0^2. \quad (5.34)$$

将上式代入式 (4.36) 即可得到 DMT- $R$  拔出力:

$$-P_c^{\text{DMT-}R}/\pi R\Delta\gamma = 2 - \frac{\Delta\gamma}{R\sigma_0}, \quad (5.35)$$

或者写作:

$$-\bar{P}_c^{\text{DMT-}R} = 2 - \epsilon/\bar{\sigma}_0. \quad (5.36)$$

我们补充的条件, 即近似模型和精确模型在刚性极限下拔出力一致的条件, 可以写作:

$$-\bar{P}_c^{\text{DMT-}R} = -\bar{P}_c^{\text{Bradley-}R}. \quad (5.37)$$

将 (5.33) 和 (5.36) 代入上式, 并作渐近展开整理得:

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{7}{18} \left( 1 + \frac{917}{864}\epsilon + \frac{71659}{746496}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \right) \quad (5.38)$$

如果  $R$  远大于  $z_0$ , 则粘着应力  $\sigma_0 \doteq 0.389\Delta\gamma/z_0$ , 这与采用抛物线近似表面形状给出的粘着应力  $\sigma_0 \doteq 0.588\Delta\gamma/z_0$  是不同的。



## 5.4 本章小结

在近球体吸附接触的 M-D 模型中, 粘着应力  $\sigma_0$  通常被取为理论应力  $\sigma_{th}$  以匹配完全自洽模型。这种作法过于随意, 不同的作法也为其他研究者所采用, 但都或多或少带有人为因素, 缺乏物理依据, 不利于实际应用。近似模型采用了非常简单的相互作用势, 因此不可能存在精确的常粘着应力  $\sigma_0$  使得近似模型与精确模型完全一致, 然而如何有效地给出近似的常粘着应力  $\sigma_0$  是一个重要的课题。本章在前面两章推广模型的基础上给出了一个更为合理的方案。

以具有幂次型表面的轴对称弹性体的吸附接触为例, 我们已经知道在使用 Lennard-Jones 作用势的完全自洽模型中存在从 JKR- $n$  到 Bradley- $n$  的转变, 而在 M-D- $n$  模型中存在从 JKR- $n$  到 DMT- $n$  的转变, 因此在刚性极限下要求 DMT- $n$  和 Bradley- $n$  具有一致的拔出力。从这个条件出发我们给出了粘着应力  $\sigma_0$  的新的建议值  $k(n)\Delta\gamma/z_0$ , 其中系数  $k(n)$  与形状指数  $n$  相关。特别地, 在近球体  $n = 2$  的情况下, 我们给出了粘着应力  $\sigma_0$  的新的建议值为  $0.588\Delta\gamma/z_0$  ( $\doteq 0.573\sigma_{th}$ ), 它比 Maugis 建议的理论应力  $\sigma_{th}$  ( $\doteq 1.026\Delta\gamma/z_0$ ) 来得小。单纯从原始的 M-D 模型和完全自洽模型比较是不能够直接给出这个新的建议值的, 它是在推广的模型的基础上退化得到的, 这是一个有意思的过程。通过使用粘着应力  $\sigma_0$  新的建议值与使用 Maugis 的建议值的比较可以发现, 前者得到的 JKR-DMT 转变的更接近于 MYD 转变, 载荷—位移曲线以及表面变形和表面压强的分布也更好的吻合完全自洽模型的结果。对于其它任意有效的形状指数  $n$  这一改善也是显著的。

使用应力非奇异和 Griffith 关系这两个独立关系, 可以建立弹性吸附接触问题的半解析的近似模型, 而补充刚性极限下近似模型与精确模型具有相同拔出力这一简单关系, 可以使近似模型更有效、更实用。在此基础上, 本章还讨论了具有幂次型表面的轴对称弹性体的吸附接触中以 Dugdale 势近似更一般形式的 Lennard-Jones 作用势的问题, 以及理想球体和半空间吸附接触中以 Dugdale 势近似 Lennard-Jones 作用势的问题。对于其它形式的表面形状和表面吸附作用也可以有类似的讨论。

## 第六章 全文总结和展望

### 6.1 吸附接触模型研究工作的总结

随着尺度的变小,连续介质的假设必然会失效,但实际上在很大程度上连续介质的模型在建立微/纳米力学仍被热衷。本文是对建立在连续介质基础上的吸附接触模型的进一步推广和补充,在提高完全自洽模型的实用性方面和 Maugis 模型的有效性方面做出努力。主要研究工作归纳如下:

#### (1) 完全自洽模型的推广

在表面形状和表面摩擦作用等主要方面,对轴对称弹性体沿轴向吸附接触的完全自洽模型进行了扩展,得到了相应的表征表面变形和表面相互作用的自洽关系以及载荷—位移关系。其一,为研究表面形状对接触性能的影响,已经将理论模型从近球形表面的情况扩展到了任意轴对称表面形状的情况,并将自洽关系写成不含位移而以表面中心间距为参数的形式,方便了数值计算方法的处理。其二,为研究摩擦对接触性能的影响,已经将理论模型从无摩擦的情况扩展到了无相对滑动的情况。在无摩擦和无相对滑动两种情况下,得到了形式上一致的无量纲形式,唯一不同是表征材料性质和表面形状的无量纲参数  $\vartheta$  的定义,该参数在无相对滑动情况下是其在无摩擦情况下的  $1 - \beta^2$  倍,其中  $\beta$  为 Dundurs 常数。我们还就二维无摩擦正向吸附接触问题建立了相应的完全自洽模型。

#### (2) 完全自洽模型数值计算方法的改进

在网格划分、控制方式、数值积分和迭代方法等方面,对完全自洽模型的数值计算方法进行了改进,并对文献中存在的错误进行了剖析,通过这些努力有望改善该理论模型不实用的状况。其一,采用自适应网格技术提高了计算效率和精度。在接触过程中表面某些地方的相互作用变化很突兀,如果网格划分得不好将不能很好地描述相互作用的变化情况,从而导致计算结果不准确甚至谬误。其二,采用表面中心间距控制法,得到了完整载荷—位移曲线。与 Greenwood [53] 的自洽关系不同,我们采用了形式上不含位移的自洽关系,更加方便了表面中心间距控制方法的使用。与 Feng [55] 的弧长控制法相比,表面中心间距控制法避免了在迭代求解过程中需要处理分歧的情况。其三,采用 Riemann-Stieltjes 积分,从本质上消除了奇异点的影响。Greenwood [53] 曾

指出自洽关系中存在一个无法消除的奇异点,并给出了近似处理方法, Feng [55] 和 Attard [54] 随即也给出了他们的近似处理方法,但我们经过数学上的处理已经可以完全避免奇异点的影响,从而降低了数值计算的难度。其四,采用 Newton-Raphson 迭代方法加快了收敛速度,提高了迭代效率。该迭代方法的使用还避免了出现像 Attard 和 Parker [52] 给出错误结果的情况,他们采用松弛法求解迭代表面位移,过大的松弛因子很可能是他们给出高 Tabor 数下拔出功不单一这一错误结果的主要因素。

### (3) 完全自洽模型的应用

将完全自洽模型应用于具有幂次型表面和 Lennard-Jones 作用势的轴对称接触问题,以算例的形式进行了研究和讨论。其一,探讨了载荷和位移分别随表面中心间距变化的情况,指出了突跳行为是实际问题中采用位移控制模式引起的;探讨了特征半径和应变能释放率随位移的变化情况,证实了在接触过程中应变能释放率  $\mathcal{G}$  和吸附能  $\Delta\gamma$  相等这一 Griffith 关系;通过和 M-D 模型 [21] 的比较,提出了进一步补充 M-D 模型的任务。其二,通过无相对滑动和无摩擦两种情况下的无量纲载荷—位移曲线的比较发现摩擦作用对变形起抑制作用,并以特征半径随载荷的变化情况、以及在拔出力和零载荷分别对应的点的表面位移、压强和摩擦应力的分布情况来进一步说明。其三,定义了表征表面形状和表面相互作用的扩展 Tabor 数,发现了从 JKR- $n$  到 Bradley- $n$  的扩展 MYD 转变。

### (4) 广义 Maugis 模型的建立

对于任意有效的表面形状和表面吸附作用的轴对称弹性体无摩擦轴向吸附接触问题,利用弹性轴对称半空间在无摩擦边界条件下的解,以及应力非奇异条件和 Griffith 关系,建立了广义 Maugis 模型。研究了表面形状和表面吸附作用对该模型的不同贡献,将载荷、位移、表面变形和表面相互作用分解成相应的两部分,并给出了关联表面形状和表面吸附作用的关系式。对于给定的表面形状和吸附作用,该模型可以很容易的求解,避免了复杂的自协调计算,但又不违背自协调行为。

### (5) 广义 Maugis 模型的应用

使用 Dugdale 势近似表面吸附作用得到了广义 M-D 模型,在两个极端的条件下分别得到了广义 JKR 模型和广义 DMT 模型;使用旋转椭球体和幂次型两类表面形状,分别推导了相应的公式,方便了后续讨论。将广义 Maugis 模型应用于具有幂次型的表面,并采用 Dugdale 势近似表面吸附作用,得到了 M-D- $n$  模型。给出了拔出功从 JKR- $n$  到 DMT- $n$  的转变情况,并以转变参数  $\Lambda$ 、无量纲

载荷  $\tilde{P}$  和形状指数  $n$  为轴建立了三维吸附图。

#### (6) 广义 Maugis 模型的补充

在近球体吸附接触的 M-D 模型中, 粘着应力  $\sigma_0$  通常被取为理论应力  $\sigma_{th}$  以匹配完全自洽模型。这种作法过于随意, 本文在推广模型的基础上给出了一个更为合理的方案, 即以近似模型和精确模型在刚性极限下有一致的拔出力这一条件确立粘着应力  $\sigma_0$  的值。讨论了具有幂次型表面的轴对称弹性体的吸附接触中以 Dugdale 势近似 Lennard-Jones 作用势的问题。我们给出了粘着应力  $\sigma_0$  的新的建议值  $k(n)\Delta\gamma/z_0$ , 其中系数  $k(n)$  与形状指数  $n$  相关。特别地, 在近球体  $n = 2$  的情况下, 新的建议值为  $0.588\Delta\gamma/z_0$  ( $\doteq 0.573\sigma_{th}$ ), 使用该值的 M-D 模型与使用 Maugis [21] 建议的理论应力  $\sigma_{th}$  ( $\doteq 1.026\Delta\gamma/z_0$ ) 来给出的结果相比, 在载荷—位移曲线、JKR-DMT 转变、表面变形和表面压强的分布等方面都更吻合于完全自洽模型的结果。这对于其它任意有效的形状指数  $n$  也有同样的结论。我们还讨论了具有幂次型表面的轴对称弹性体的吸附接触中以 Dugdale 势近似更一般形式的 Lennard-Jones 作用势的问题, 以及理想球体和半空间吸附接触中以 Dugdale 势近似 Lennard-Jones 作用势的问题。

## 6.2 进一步工作的展望

### (1) 粗糙表面接触的接触问题

在本文工作开展的过程中, 我们对粗糙表面的弹/塑性接触行为也作了调研分析, 我们发现从不同角度近似的模型已经被建立起来 [103–109]。诚然本文未考虑表面粗糙度对接触行为的影响, 但是参考相关的研究 [64, 65, 110] 并结合本文补充的条件将有望得到更好的结果。将二维完全自洽模型应用于分形表面 [111] 的弹性吸附接触行为研究是一个更为感兴趣的方向。

### (2) 连续介质假设的失效

当接触的尺度可以和原子的尺度相比拟时, 连续介质的假设必然失效 [86], 然而量化的标准却是一个很难界定的课题, 基于连续介质假设的接触力学模型在纳米尺度下的应用仍会得到广泛的研究兴趣。完全自洽模型作为连续介质力学框架下最具准确性的理论模型, 它与分子动力学模拟的深入比较将更能反映出连续介质假设合理性的尺度, 特别是在放弃表面理想光滑假设的情况下。另外, 结合本文补充条件下的 Maugis 模型同分子动力学模拟的进一步比较也被感兴趣。

### (3) 材料参数和优化设计

本文对 Maugis 模型进行了推广和补充, 为确定粘着应力  $\sigma_0$  的值提供了一个有效的方法, 但必须注意它的值并不是准确的。实际上, 对于确定的表面形状, 其值将随着材料参数的变化 (如 Tabor 数的增大) 而变化, 即使对于确定的表面形状和材料参数, 其值随着接触半径的变化也会变化, 这些变化有待进一步的研究。通过本文的算例分析可知, 上述的变化可能不会太大, 因而可以采用我们给出的粘着应力  $\sigma_0$  对实验结果进行初步的拟合, 进而采用完全自洽模型作进一步的评估, 通过这些努力将有助于材料参数的获取和材料的优化设计。



## 附录 A 数学公式和数学推导

### A.1 特殊函数

#### A.1.1 Gamma 函数和 Beta 函数

(1) Gamma 函数 (第二类 Euler 积分):

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (\text{A.1})$$

(2) 不完全 Gamma 函数:

$$\Gamma(\alpha, z) = \int_z^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (\text{A.2})$$

(3) 双 Gamma 函数:

$$\psi_0(\alpha) = d \ln \Gamma(\alpha) / d\alpha = \Gamma'(\alpha) / \Gamma(\alpha). \quad (\text{A.3})$$

若  $\alpha$  为整数, 则双 Gamma 函数  $\psi_0(\alpha) = \gamma + \mathbf{H}_{\alpha-1}$ , 其中  $\gamma \simeq 0.577216$  为 Euler 常数,  $\mathbf{H}_{\alpha-1} = \sum_{k=1}^{\alpha-1} k^{-1}$  为调和数。

(4) Beta 函数 (第一类 Euler 积分) [112, p.258]:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\alpha, \beta) &= \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{1}{\alpha} {}_2F_1(1-\beta, \alpha; \alpha+1; 1). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

(5) 不完全 Beta 函数:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_z(\alpha, \beta) &= \int_0^z t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt \\ &= \frac{1}{\alpha} z^{\alpha} {}_2F_1(1-\beta, \alpha; \alpha+1; z) \\ &= \frac{1}{\alpha} z^{\alpha} (1-z)^{\beta} {}_2F_1(1, \alpha+\beta; \alpha+1; z). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

(6) 规范 Beta 函数:

$$\mathbf{I}_z(\alpha, \beta) = \mathbf{B}_z(\alpha, \beta) / \mathbf{B}(\alpha, \beta). \quad (\text{A.6})$$

### A.1.2 Bessel 函数

$n$  阶 Bessel 微分方程  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$  的通解可以写成:

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x). \quad (\text{A.7})$$

(1) 第一类  $n$  阶 Bessel 函数:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+n}}{k! \Gamma(k+n+1)}, \quad (\text{A.8})$$

特别地, 对于  $\text{Re}(n) > -1/2$ , 有:

$$J_n(x) = \frac{2(x/2)^n}{\pi^{1/2} \Gamma(n+1/2)} \int_0^1 (1-t^2)^{n-1/2} \cos(xt) dt. \quad (\text{A.9})$$

(2) 第二类  $n$  阶 Bessel 函数 (或称 Weber 函数/ Neumann 函数):

$$N_n(x) = J_n(x) \cot n\pi - J_{-n}(x) \csc n\pi. \quad (\text{A.10})$$

(3) Bessel 函数的微分关系:

$$\left( \frac{d}{x dx} \right)^m [x^n J_n(x)] = x^{n-m} J_{n-m}(x), \quad (\text{A.11})$$

$$\left( \frac{d}{x dx} \right)^m [x^{-n} J_n(x)] = (-1)^m x^{-(n+m)} J_{n+m}(x). \quad (\text{A.12})$$

特别地:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho^{-1} J_0(t\rho)) = -J_1(t\rho). \quad (\text{A.13})$$

### A.1.3 椭圆积分

形如  $\int R(x, y) dx$  的积分, 其中  $R$  是  $x$  和  $y$  的有理函数,  $y^2 = P(x)$  是  $x$  的三次或四次多项式, 称为椭圆积分 [112, p.589].

(1) 第一类椭圆积分:

$$\mathbf{F}(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} d\theta = \int_0^{\sin \phi} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} dx. \quad (\text{A.14})$$

(2) 第二类椭圆积分:

$$\mathbf{E}(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^{\sin \phi} \sqrt{\frac{1-k^2 x^2}{1-x^2}} dx. \quad (\text{A.15})$$



(3) 第三类椭圆积分:

$$\mathbf{\Pi}(n; \phi, k) = \int_0^\phi \frac{1}{(1 - n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta. \quad (\text{A.16})$$

(4) 第一类完全椭圆积分:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{F}\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right). \quad (\text{A.17})$$

(5) 第二类完全椭圆积分:

$$\mathbf{E}(k) = \mathbf{E}\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right). \quad (\text{A.18})$$

(6) 第三类完全椭圆积分:

$$\mathbf{\Pi}(n; k) = \mathbf{\Pi}\left(n; \frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1 - n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta. \quad (\text{A.19})$$

注意: 本文根据相关文献选择采用了以参数  $k$  为模的定义式, 另一种常用的写法是以参数  $m = k^2$  的形式定义的应特别注意, 如在 Mathematica 软件中, 为求  $\mathbf{K}(k)$  和  $\mathbf{E}(k)$ , 应分别将其写作  $\text{EllipticK}[m]$  和  $\text{EllipticE}[m]$ ; 同样地, 在 Matlab 软件应由  $[\mathbf{K}, \mathbf{E}] = \text{ellipke}(m)$  求得。

(7) 椭圆积分的性质:

$$\mathbf{K}\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = \begin{cases} (1+k)\mathbf{K}(k), & k \leq 1 \\ (1+1/k)\mathbf{K}(1/k), & k \geq 1 \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{E}\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = \begin{cases} \frac{2}{1+k}\mathbf{E}(k) - (1-k)\mathbf{K}(k), & k \leq 1 \\ \frac{2}{1+1/k}\mathbf{E}(1/k) - (1-1/k)\mathbf{K}(1/k), & k \geq 1 \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{d}{dk} \mathbf{K}\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = \frac{1-k}{2k(1+k)} \left[ \frac{(1+k)^2}{(1-k)^2} \mathbf{E}\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) - \mathbf{K}\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) \right] \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{d}{dk} \mathbf{E}\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = \frac{1-k}{2k(1+k)} \left[ \mathbf{E}\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) - \mathbf{K}\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) \right] \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ (r+t)\mathbf{E} \left( \frac{2\sqrt{rt}}{r+t} \right) - (r-t)\mathbf{K} \left( \frac{2\sqrt{rt}}{r+t} \right) \right] = \frac{2t}{r+t} \mathbf{K} \left( \frac{2\sqrt{rt}}{r+t} \right) \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ -(r+t)\mathbf{E} \left( \frac{2\sqrt{rt}}{r+t} \right) - (r-t)\mathbf{K} \left( \frac{2\sqrt{rt}}{r+t} \right) \right] \\ = \frac{r+t}{t} \left[ \frac{r^2+t^2}{(r+t)^2} \mathbf{K} \left( \frac{2\sqrt{rt}}{r+t} \right) - \mathbf{E} \left( \frac{2\sqrt{rt}}{r+t} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

#### A.1.4 超几何函数

(1) 超几何函数的定义 [113]:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k z^k}{(c)_k k!} \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1} (1-t)^{c-b-1}}{(1-zt)^a} dt, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

式中,  $(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$  称为 Pochhammer 符号。超几何函数  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  是超几何微分方程  $z(1-z)y''(z) + [c - (a+b+1)z]y'(z) - aby(z) = 0$  的解。它有时也简写作  $F(a, b; c; z)$ , 称为 Gauss 级数或 Kummer 级数 [112, p.556]。

(2) 超几何函数的性质:

$$\frac{d}{dz} {}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} {}_2F_1(a+1, b+1; c+1; z), \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= (1-z)^{-a} {}_2F_1(a, c-b; c; z/(z-1)) \\ &= (1-z)^{-b} {}_2F_1(c-a, b; c; z/(z-1)) \\ &= (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c; z), \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} = \frac{\mathbf{B}(c-a-b, a)}{\mathbf{B}(c-a, a)}, \quad (\text{A.29})$$

Kummer 二次变换式 [112, p.561, Eq.15.3.27]:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; a-b+1; z^2) \\ = (1+z)^{-2a} {}_2F_1(a, a-b+\frac{1}{2}; 2a-2b+1; 4z/(1+z)^2). \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

## A.2 积分变换 [72, 114]

### A.2.1 Fourier 余弦和正弦变换及其反演

$$F_c(\xi) = \mathcal{F}_c[f(x); x \rightarrow \xi] = \sqrt{2/\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(\xi x) dx \quad (\text{A.31})$$

$$f(t) = \mathcal{F}_c^{-1}[F_c(\xi); \xi \rightarrow t] = \sqrt{2/\pi} \int_0^{\infty} F_c(\xi) \cos(\xi t) d\xi \quad (\text{A.32})$$

$$F_s(\xi) = \mathcal{F}_s[f(x); x \rightarrow \xi] = \sqrt{2/\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin(\xi x) dx \quad (\text{A.33})$$

$$f(t) = \mathcal{F}_s^{-1}[F_s(\xi); \xi \rightarrow t] = \sqrt{2/\pi} \int_0^{\infty} F_s(\xi) \sin(\xi t) d\xi \quad (\text{A.34})$$

### A.2.2 $n$ 阶 Hankel 变换及其反演

$$f_n^H(\xi) = \mathcal{H}_n[f(r); r \rightarrow \xi] = \int_0^{\infty} r f(r) J_n(\xi r) dr \quad (\text{A.35})$$

$$f(r) = \mathcal{H}_n^{-1}[f_n^H(\xi); \xi \rightarrow r] = \int_0^{\infty} \xi f_n^H(\xi) J_n(\xi r) d\xi \quad (\text{A.36})$$

### A.2.3 Abel 变换及其反演

$$g(r) = \mathcal{A}_1[f(s); s \rightarrow r] = \sqrt{2/\pi} \int_0^r \frac{f(s)}{\sqrt{r^2 - s^2}} ds, \quad r \geq 0 \quad (\text{A.37})$$

$$\begin{aligned} f(s) &= \mathcal{A}_1^{-1}[g(t); t \rightarrow s] = D_s \mathcal{A}_1[tg(t); t \rightarrow s] \\ &= \sqrt{2/\pi} g(0) + s \mathcal{A}_1[g'(t); t \rightarrow s] \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

$$f'(s) = D_s \mathcal{A}_1^{-1}[g(t); t \rightarrow s] = \mathcal{A}_1[(tg'(t))'; t \rightarrow s] \quad (\text{A.39})$$

$$g(r) = \mathcal{A}_2[f(s); s \rightarrow r] = \sqrt{2/\pi} \int_r^{\infty} \frac{f(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds, \quad r \geq 0 \quad (\text{A.40})$$

$$f(s) = \mathcal{A}_2^{-1}[g(t); t \rightarrow s] = -D_s \mathcal{A}_2[tg(t); t \rightarrow s] = -s \mathcal{A}_2[g'(t); t \rightarrow s] \quad (\text{A.41})$$

$$f'(s) = D_s \mathcal{A}_2^{-1}[g(t); t \rightarrow s] = -\mathcal{A}_2[(tg'(t))'; t \rightarrow s] \quad (\text{A.42})$$

### A.2.4 各积分变换之间常用关系式

$$\mathcal{H}_0[\xi^{-1} \mathcal{F}_c[f(s); s \rightarrow \xi]; \xi \rightarrow r] = \mathcal{A}_1[f(s); s \rightarrow r] \quad (\text{A.43})$$

$$\mathcal{H}_0[\xi^{-1} \mathcal{F}_s[f(s); s \rightarrow \xi]; \xi \rightarrow r] = \mathcal{A}_2[f(s); s \rightarrow r] \quad (\text{A.44})$$

$$\mathcal{H}_1[\xi^{-1} \mathcal{F}_c[f(s); s \rightarrow \xi]; \xi \rightarrow r] = \frac{1}{r} \mathcal{F}_c[f(s); s \rightarrow 0] - \frac{1}{r} \mathcal{A}_2[sf(s); s \rightarrow r] \quad (\text{A.45})$$

$$\mathcal{H}_1[\xi^{-1} \mathcal{F}_s[f(s); s \rightarrow \xi]; \xi \rightarrow r] = \frac{1}{r} \mathcal{A}_1[sf(s); s \rightarrow r] \quad (\text{A.46})$$

$$\mathcal{F}_c[\mathcal{H}_0[f(t); t \rightarrow \xi]; \xi \rightarrow x] = \mathcal{A}_2[tf(t); t \rightarrow x] \quad (\text{A.47})$$

$$\mathcal{F}_s[\mathcal{H}_0[f(t); t \rightarrow \xi]; \xi \rightarrow x] = \mathcal{A}_1[tf(t); t \rightarrow x] \quad (\text{A.48})$$

### A.3 Weber-Schafheitlin 型积分

本文采用符号  $W_{\mu,\nu}^{-\lambda}(t, r)$  来简记 Weber-Schafheitlin 型积分:

$$W_{\mu,\nu}^{-\lambda}(t, r) \equiv \int_0^\infty \xi^{-\lambda} J_\mu(\xi t) J_\nu(\xi r) d\xi, \quad r > 0 \quad \& \quad t > 0, \quad (\text{A.49})$$

其收敛的积分值由 Sonine 和 Schafheitlin 分情况给出 (见 [115, p.324] 或 [112, p.487]):

$$\begin{cases} \frac{t^{\lambda-\nu-1} r^\nu \Gamma(\sigma)}{2^\lambda \Gamma(\nu+1) \Gamma(\sigma+\lambda-\nu)} {}_2F_1(\sigma, \sigma-\mu; \nu+1; r^2/t^2), & r < t \\ \frac{r^{\lambda-\mu-1} t^\mu \Gamma(\sigma)}{2^\lambda \Gamma(\mu+1) \Gamma(\sigma+\lambda-\mu)} {}_2F_1(\sigma, \sigma-\nu; \mu+1; t^2/r^2), & t < r \\ \frac{r^{\lambda-1} \Gamma(\lambda) \Gamma(\sigma)}{2^\lambda \Gamma(\sigma+\lambda-\mu) \Gamma(\sigma+\lambda) \Gamma(\sigma+\lambda-\nu)}, & r = t \end{cases} \quad (\text{A.50})$$

式中,  $2\sigma \equiv \mu + \nu - \lambda + 1$ ; 对于  $r \neq t$ , 要求  $\text{Re}(\mu + \nu + 1) > \text{Re}(\lambda) > -1$ , 而对于  $r = t$ , 要求  $\text{Re}(\mu + \nu + 1) > \text{Re}(\lambda) > 0$ .

当  $\mu = \nu$  时, 利用 Kummer 二次变换式 (A.30), 我们可以将式 (A.50) 三种情况统一写成一个式子:

$$W_{\mu,\mu}^{-\lambda}(t, r) = \frac{t^\mu r^\mu (t+r)^{-2\sigma} \Gamma(\sigma)}{2^\lambda \Gamma(\mu+1) \Gamma(\frac{\lambda+1}{2})} {}_2F_1(\sigma, \mu+\frac{1}{2}; 2\mu+1; 4rt/(r+t)^2), \quad (\text{A.51})$$

式中,  $2\sigma \equiv 2\mu - \lambda + 1$ .

不收敛的情况, 如:

$$W_{\mu,\mu}^1(s, r) = \int_0^\infty \xi J_\mu(\xi s) J_\mu(\xi r) d\xi = \frac{1}{s} \delta(s-r). \quad (\text{A.52})$$

#### A.3.1 $\lambda = 0$ 和 $\mu = \nu = 0$ 的情况

我们考察如下积分:

$$W_{0,0}^0(t, r) \equiv \int_0^\infty J_0(\xi t) J_0(\xi r) d\xi, \quad r > 0 \quad \& \quad t > 0, \quad (\text{A.53a})$$

它有很多种等价的表示形式。如由式 (A.50) 可得:

$$W_{0,0}^0(t, r) = \begin{cases} t^{-1} {}_2F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; r^2/t^2), & 0 < r < t, \\ r^{-1} {}_2F_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; t^2/r^2), & 0 < t < r, \end{cases} \quad (\text{A.53b})$$

进而利用椭圆积分可以表示成:

$$W_{0,0}^0(t, r) = \begin{cases} \frac{2}{\pi t} \mathbf{K}(r/t), & 0 < r < t, \\ \frac{2}{\pi r} \mathbf{K}(t/r), & 0 < t < r. \end{cases} \quad (\text{A.53c})$$

利用 (A.51), 我们可以得到:

$$W_{0,0}^0(t, r) = \frac{1}{r+t} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; 4rt/(r+t)^2\right), \quad (\text{A.53d})$$

利用椭圆积分, 得:

$$W_{0,0}^0(t, r) = \frac{2}{\pi(r+t)} \mathbf{K}\left(\frac{2\sqrt{rt}}{r+t}\right). \quad (\text{A.53e})$$

在使用 Green 方法求解弹性问题时,

$$W_{0,0}^0(t, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + t^2 - 2rt \cos \theta}} d\theta, \quad (\text{A.53f})$$

我们还得到

$$W_{0,0}^0(t, r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\min(t,r)} \frac{1}{\sqrt{(t^2 - s^2)(r^2 - s^2)}} ds. \quad (\text{A.53g})$$

由椭圆积分的微分关系 (A.24), 我们还可以得到:

$$W_{0,0}^0(t, r) = \frac{1}{\pi t} \frac{d}{dt} \left[ (r+t) \mathbf{E}\left(\frac{2\sqrt{rt}}{r+t}\right) - (r-t) \mathbf{K}\left(\frac{2\sqrt{rt}}{r+t}\right) \right]. \quad (\text{A.53h})$$

我们对下式先交换积分顺序再利用式 (A.53g), 可得:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1[\mathcal{A}_2[t\sigma_i(t); t \rightarrow s]; s \rightarrow r] &= \frac{2}{\pi} \int_0^r \int_s^\infty \frac{t\sigma_i(t)}{\sqrt{(s^2 - r^2)(t^2 - s^2)}} dt ds \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty t\sigma_i(t) \int_0^{\min(t,r)} \frac{1}{\sqrt{(s^2 - r^2)(t^2 - s^2)}} ds dt \\ &= \int_0^\infty t\sigma_i(t) W_{0,0}^0(t, r) dt. \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

### A.3.2 $\lambda = 0$ 和 $\mu = \nu = 1$ 的情况

我们考察如下积分:

$$W_{1,1}^0(t, r) \equiv \int_0^\infty J_1(\xi t) J_1(\xi r) d\xi, \quad r > 0 \quad \& \quad t > 0, \quad (\text{A.55a})$$

它也有很多种表示形式。同样地, 由式 (A.50) 可得:

$$W_{1,1}^0(t, r) = \begin{cases} \frac{r}{2t^2} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 2; r^2/t^2\right), & 0 < r < t, \\ \frac{t}{2r^2} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 2; t^2/r^2\right), & 0 < t < r, \end{cases} \quad (\text{A.55b})$$

并利用椭圆积分表示为:

$$W_{1,1}^0(t, r) = \begin{cases} \frac{2}{\pi r} [\mathbf{K}(r/t) - \mathbf{E}(r/t)], & 0 < r < t, \\ \frac{2}{\pi t} [\mathbf{K}(t/r) - \mathbf{E}(t/r)], & 0 < t < r. \end{cases} \quad (\text{A.55c})$$

利用 (A.51), 我们可以得到:

$$W_{1,1}^0(t, r) = \frac{rt}{2(r+t)^3} {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 3; 4rt/(r+t)^2\right), \quad (\text{A.55d})$$

利用椭圆积分, 得:

$$W_{1,1}^0(t, r) = \frac{r+t}{\pi rt} \left[ \frac{r^2+t^2}{(r+t)^2} \mathbf{K}\left(\frac{2\sqrt{rt}}{r+t}\right) - \mathbf{E}\left(\frac{2\sqrt{rt}}{r+t}\right) \right]. \quad (\text{A.55e})$$

还有

$$W_{1,1}^0(t, r) = \frac{2}{\pi rt} \int_0^{\min(r,t)} \frac{s^2}{\sqrt{(r^2-s^2)(t^2-s^2)}} ds. \quad (\text{A.55f})$$

由椭圆积分的微分关系 (A.25), 我们还可以得到:

$$W_{1,1}^0(t, r) = \frac{1}{\pi r} \frac{d}{dt} \left[ -(r+t)\mathbf{E}\left(\frac{2\sqrt{rt}}{r+t}\right) - (r-t)\mathbf{K}\left(\frac{2\sqrt{rt}}{r+t}\right) \right]. \quad (\text{A.55g})$$

我们对下式先交换积分顺序再利用式 (A.55f), 可得:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1[s^2 \mathcal{A}_2[\tau_i(t); t \rightarrow s]; s \rightarrow r] &= \frac{2}{\pi} \int_0^r \int_s^\infty \frac{s^2 \tau_i(t)}{\sqrt{(r^2-s^2)(t^2-s^2)}} dt ds \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tau_i(t) \int_0^{\min(r,t)} \frac{s^2}{\sqrt{(r^2-s^2)(t^2-s^2)}} ds dt \\ &= r \int_0^\infty t \tau_i(t) W_{1,1}^0(t, r) dt. \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

## 参考文献

- [1] Rohrer H. The nanometer age: challenge and chance. *Mech. Engr.* 1995; 27(1-4): 3–15. (doi: [10.1016/0167-9317\(94\)00045-V](https://doi.org/10.1016/0167-9317(94)00045-V)).
- [2] Zhao YP, Wang LS, Yu TX. Mechanics of adhesion in MEMS—a review. *J. Adhesion Sci. Technol.* 2003; 17(4): 519–546. (doi: [10.1163/15685610360554393](https://doi.org/10.1163/15685610360554393)).
- [3] Alder BJ, Wainwright TE. Phase transition for a hard-sphere system. *J. Chem. Phys.* 1957; 27: 1208—1209.
- [4] Eisner T, Aneshansley DJ. Defense by foot adhesion in a beetle (*Hemiphaerota cyanea*). *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 2000; 97(12): 6568–6573. (doi: [10.1073/pnas.97.12.6568](https://doi.org/10.1073/pnas.97.12.6568)).
- [5] Autumn K, Liang YA, Hsieh ST, Zesch W, Chan WP, Kenny TW, Fearing R, Full RJ. Adhesive force of a single gecko foot-hair. *Nature* 2000; 405(6787): 681–685.
- [6] Autumn K, Sitti M, Liang YA, Peattie AM, Hansen WR, Sponberg S, Kenny TW, Fearing R, Israelachvili JN, Full RJ. Evidence for van der Waals adhesion in gecko setae. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 2002; 99(19): 12252–12256. (doi: [10.1073/pnas.192252799](https://doi.org/10.1073/pnas.192252799)).
- [7] Geilm AK, Dubonos SV, Grigorieva IV, Novoselov KS, Zhukov AA, Shapoval SY. Microfabricated adhesive mimicking gecko foot-hair. *Nat. Mater.* 2003; 2: 461–463. (doi: [10.1038/nmat917](https://doi.org/10.1038/nmat917)).
- [8] Zhu C, Bao G, Wang N. CELL MECHANICS: Mechanical response, cell adhesion, and molecular deformation. *Ann. Rev. Biomed. Eng.* 2000; 2: 189–226. (doi: [10.1146/annurev.bioeng.2.1.189](https://doi.org/10.1146/annurev.bioeng.2.1.189)).
- [9] Hertz H. Über die berührung fester elastischer körper (On the contact of rigid elastic solids). *J. Reine Angew. Math.* 1882; 92: 156–171.
- [10] Johnson KL. Contact Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [11] Johnson KL, Kendall K, Roberts AD. Surface energy and the contact of elastic solids. *Proc. R. Soc. Lond. A* 1971; 324(1558): 301–313.

- [12] Maugis D, Barquins M. Fracture mechanics and the adherence of viscoelastic bodies. *J. Phys. D* 1978; 11(14): 1989–2023. (doi: [10.1088/0022-3727/11/14/011](https://doi.org/10.1088/0022-3727/11/14/011)).
- [13] Derjaguin BV, Muller VM, Toporov YP. Effect of contact deformation on the adhesion of particles. *J. Colloid Interface Sci.* 1975; 53(2): 314–326. (doi: [10.1016/0021-9797\(75\)90018-1](https://doi.org/10.1016/0021-9797(75)90018-1)).
- [14] Muller VM, Derjaguin BV, Toporov YP. On two methods of calculation of the force of sticking of an elastic sphere to a rigid plane. *Coll. Surf.* 1983; 7: 251–259.
- [15] Pashley MD. Further consideration of the DMT model for elastic contact. *Coll. Surf.* 1984; 12(1-2): 69–77.
- [16] Hughes BD, White LR. ‘Soft’ contact problems in linear elasticity. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 1979; 32(4): 445–471. (doi: [10.1093/qjmam/32.4.445](https://doi.org/10.1093/qjmam/32.4.445)).
- [17] Hughes BD, White LR. Implications of elastic deformation on the direct measurement of surface forces. *J.C.S. Faraday I* 1980; 76: 963–978.
- [18] Hughes BD. Ph.D. dissertaion, the Australian National University, Canberra.
- [19] Muller VM, Yushchenko VS, Derjaguin BV. On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane. *J. Colloid Interface Sci.* 1980; 77(1): 91–101. (doi: [10.1016/0021-9797\(80\)90419-1](https://doi.org/10.1016/0021-9797(80)90419-1)).
- [20] Muller VM, Yushchenko VS, Derjaguin BV. General theoretical consideration of the influence of surface forces on contact deformations and the reciprocal adhesion of elastic spherical particles. *J. Colloid Interface Sci.* 1983; 92(1): 92–101. (doi: [10.1016/0021-9797\(83\)90119-4](https://doi.org/10.1016/0021-9797(83)90119-4)).
- [21] Maugis D. Adhesion of sphere: the JKR-DMT transition using a Dugdale model. *J. Colloid Interface Sci.* 1992; 150(1): 243–269. (doi: [10.1016/0021-9797\(92\)90285-T](https://doi.org/10.1016/0021-9797(92)90285-T)).
- [22] Carpick RW, Agrait N, Ogletree DF, Salmeron M. Measurement of interfacial shear (friction) with an ultrahigh vacuum atomic force microscope. *J. Vac. Sci. Technol. B* 1996; 14(2): 1289–1295. See also 14(4):2772.
- [23] Borodich FM, Galanov BA. Molecular adhesive contact for indenters of non-ideal shapes. In: W Gutkowsky, TA Kowalewski (eds.), *Mechanics of the*



- 21st Century. International Congress of Theoretical and Applied Mechanics ICTAM04, Warsaw, Poland, 2004. Berlin: Springer, 2005.
- [24] Spolenak R, Gorb S, Gao HJ, Arzt E. Effects of contact shape on the scaling of biological attachments. *Proc. R. Soc. Lond. A* 2005; 461(2054): 305–319. (doi: [10.1098/rspa.2004.1326](https://doi.org/10.1098/rspa.2004.1326)).
- [25] Arzt E, Gorb S, Spolenak R. From micro to nano contacts in biological attachment devices. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 2003; 100(19): 10603–10606. (doi: [10.1073/pnas.1534701100](https://doi.org/10.1073/pnas.1534701100)).
- [26] Bradley RS. The cohesive force between solid surfaces and the surface energy of solids. *Phil. Mag.* 1932; 13: 853 – 862.
- [27] Derjaguin BV. Theorie des anhaftens kleiner teilchen (Theory of adhering small particles). *Koll. Z.* 1934; 69: 155 – 164.
- [28] Tabor D. Surface forces and surface interactions. *J. Colloid Interface Sci.* 1977; 58(1): 2–13. (doi: [10.1016/0021-9797\(77\)90366-6](https://doi.org/10.1016/0021-9797(77)90366-6)).
- [29] Derjaguin BV, Muller VM, Toporov YP. On the role of molecular in contact deformations (Critical remarks concerning Dr. Tabor’s report). *J. Colloid Interface Sci.* 1978; 67(2): 378–379. (doi: [10.1016/0021-9797\(78\)90021-8](https://doi.org/10.1016/0021-9797(78)90021-8)).
- [30] Tabor D. On the role of molecular forces in contact deformatons (Critical remarks concerning Dr. Tabor’s report). *J. Colloid Interface Sci.* 1978; 67(2): 380. (doi: [10.1016/0021-9797\(78\)90022-X](https://doi.org/10.1016/0021-9797(78)90022-X)).
- [31] Derjaguin BV, Muller VM, Toporov YP. On different approaches to the contact mechanics. *J. Colloid Interface Sci.* 1980; 73(1): 293. (doi: [10.1016/0021-9797\(80\)90157-5](https://doi.org/10.1016/0021-9797(80)90157-5)).
- [32] Tabor D. Role of molecular forces in contact deformations. *J. Colloid Interface Sci.* 1980; 73(1): 294. (doi: [10.1016/0021-9797\(80\)90157-5](https://doi.org/10.1016/0021-9797(80)90157-5)).
- [33] Yu N, Polycarpou AA. Adhesive contact based on the Lennard-Jones potential: a correction to the value of the equilibrium distance as used in the potential. *J. Colloid Interface Sci.* 2004; 278(2): 428–435. (doi: [10.1016/j.jcis.2004.06.029](https://doi.org/10.1016/j.jcis.2004.06.029)).
- [34] Johnson KL, Greenwood JA. An adhesion map for the contact of elastic spheres. *J. Colloid Interface Sci.* 1997; 192(2): 326–333. (doi: [10.1006/jcis.1997.4984](https://doi.org/10.1006/jcis.1997.4984)).
- [35] Yao HM. Mechanics of robust and releasable adhesion in biology. Ph.D.

- dissertaion, Max-Planck-Institut für Metallforschung, Stuttgart, 2006.
- [36] Cappella B, Dietler G. Force-distance curves by atomic force microscopy. *Surf. Sci. Report* 1999; 34: 1–104. (doi: [10.1016/S0167-5729\(99\)00003-5](https://doi.org/10.1016/S0167-5729(99)00003-5)).
- [37] Enachescu M, van den Oetelaar RJA, Carpick RW, Ogletree DF, Flipse CFJ, Salmeron M. Atomic force microscopy study of an ideally hard contact: The diamond(111)/tungsten carbide interface. *Phys. Rev. Lett.* Aug 1998; 81(9): 1877–1880. (doi: [10.1103/PhysRevLett.81.1877](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.1877)).
- [38] Skulason H, Frisbie CD. Contact mechanics modeling of pull-off measurements: effect of solvent, probe radius, and chemical binding probability on the detection of single-bond rupture forces by atomic force microscopy. *Anal. Chem.* 2002; 74(13): 3096–3104. (doi: [10.1021/ac020075g](https://doi.org/10.1021/ac020075g)).
- [39] Grierson DS, Flater EE, Carpick RW. Accounting for the JKR-DMT transition in adhesion and friction measurements with atomic force microscopy. *J. Adhesion Sci. Technol.* 2005; 19(3-5): 291–311. (doi: [10.1163/1568561054352685](https://doi.org/10.1163/1568561054352685)).
- [40] Ilic B, Krylov S, Bellan LM, Craighead HG. Dynamic characterization of nanoelectromechanical oscillators by atomic force microscopy. *J. Appl. Phys.* 2007; 101(4): 044308. (doi: [10.1063/1.2472277](https://doi.org/10.1063/1.2472277)).
- [41] Drelich J, Tormoen GW, Beach ER. Determination of solid surface tension from particle-substrate pull-off forces measured with the atomic force microscope. *J. Colloid Interface Sci.* 2004; 280(2): 484–497. (doi: [10.1016/j.jcis.2004.08.002](https://doi.org/10.1016/j.jcis.2004.08.002)).
- [42] Johnson KL, Greenwood JA. An approximate JKR theory for elliptical contacts. *J. Phys. D* 2005; 38(7): 1042 – 1046. (doi: [10.1088/0022-3727/38/7/012](https://doi.org/10.1088/0022-3727/38/7/012)).
- [43] Chen SH, Gao HJ. Generalized Maugis-Dugdale model of an elastic cylinder in non-slipping adhesive contact with a stretched substrate. *Int. J. Mater. Res.* 2006; 97(5): 584–593.
- [44] Chen SH, Gao HJ. Non-slipping adhesive contact of an elastic cylinder on stretched substrates. *Proc. R. Soc. Lond. A* 2006; 462(2065): 211–228. (doi: [10.1098/rspa.2005.1553](https://doi.org/10.1098/rspa.2005.1553)).
- [45] Chen SH, Wang T. General solution to two-dimensional nonslipping JKR model with a pulling force in an arbitrary direction. *J. Colloid Interface*

- Sci.* 2006; 302(1): 363–369. (doi: [10.1016/j.jcis.2006.06.014](https://doi.org/10.1016/j.jcis.2006.06.014)).
- [46] Johnson KL, Sridhar I. Adhesion between a spherical indenter and an elastic solid with a compliant elastic coating. *J. Phys. D* 2001; 34(5): 683–689. (doi: [10.1088/0022-3727/34/5/304](https://doi.org/10.1088/0022-3727/34/5/304)).
- [47] Sridhar I, Zheng ZW, Johnson KL. A detailed analysis of adhesion mechanics between a compliant elastic coating and a spherical probe. *J. Phys. D* 2004; 37(20): 2886 – 2895. (doi: [10.1088/0022-3727/37/20/016](https://doi.org/10.1088/0022-3727/37/20/016)).
- [48] Sridhar I, Sivashanker S. On the adhesion mechanics of multi-layer elastic systems. *Surf. Coat. Technol.* 2003; 167(2-3): 181–187.
- [49] Greenwood JA, Johnson KL. The mechanics of adhesion of viscoelastic bodies. *Phil. Mag. A* 1981; 43: 697 – 711.
- [50] Wahl K, Asif SAS, Greenwood JA, Johnson KL. Oscillating adhesive contacts between micron-scale tips and compliant polymers. *J. Colloid Interface Sci.* 2006; 296(1): 178–188. (doi: [10.1016/j.jcis.2005.08.028](https://doi.org/10.1016/j.jcis.2005.08.028)).
- [51] Shull KR. Contact mechanics and the adhesion of soft solids. *Mater. Sci. Eng. R* 2002; 36(1): 1–45.
- [52] Attard P, Parker JL. Deformation and adhesion of elastic bodies in contact. *Phys. Rev. A* 1992; 46(12): 7959–7971. (doi: [10.1103/PhysRevA.46.7959](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.46.7959)).
- [53] Greenwood JA. Adhesion of elastic spheres. *Proc. R. Soc. Lond. A* 1997; 453(1961): 1277–1297. (doi: [10.1098/rspa.1997.0070](https://doi.org/10.1098/rspa.1997.0070)).
- [54] Attard P. Interaction and deformation of elastic bodies: Origin of adhesion hysteresis. *J. Phys. Chem. B* 2000; 104(45): 10635–10641. (doi: [10.1021/jp0018955](https://doi.org/10.1021/jp0018955)).
- [55] Feng JQ. Contact behavior of spherical elastic particles: a computational study of particle adhesion and deformations. *Coll. Surf. A* 2000; 172: 175–198.
- [56] Gao HJ, Yao HM. Shape insensitive optimal adhesion of nanoscale fibrillar structures. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 2004; 101(21): 7851–7856. (doi: [10.1073/pnas.0400757101](https://doi.org/10.1073/pnas.0400757101)).
- [57] Wu JJ. Numerical analyses on elliptical adhesive contact. *J. Phys. D* 2006; 39(9): 1899 – 1907. (doi: [10.1088/0022-3727/39/9/027](https://doi.org/10.1088/0022-3727/39/9/027)).
- [58] 郑志军, 虞吉林, 李剑荣, 林静. 幂次型表面的轴对称弹性体之间的吸附接触. 已投中国科学技术大学学报 2007; (Zheng ZJ, Yu JL, Li JR, Lin J.

- Adhesive contact of power-law axisymmetric elastic objects. Submitted to *J. Univ. Sci. Tech. China* 2007).
- [59] Carpick R, Ogletree D, Salmeron M. A general equation for fitting contact area and friction vs load measurements. *J. Colloid Interface Sci.* 1999; 211(2): 395 – 400. (doi: [10.1006/jcis.1998.6027](https://doi.org/10.1006/jcis.1998.6027)).
- [60] Schwarz UD. A generalized analytical model for the elastic deformation of an adhesive contact between a sphere and a flat surface. *J. Colloid Interface Sci.* 2003; 261(1): 99–106. (doi: [10.1016/S0021-9797\(03\)00049-3](https://doi.org/10.1016/S0021-9797(03)00049-3)).
- [61] Shi XH, Zhao YP. Comparison of various adhesion contact theories and the influence of dimensionless load parameter. *J. Adhesion Sci. Technol.* 2004; 18(1): 55–68. (doi: [10.1163/156856104322747009](https://doi.org/10.1163/156856104322747009)).
- [62] Goryacheva IG, Makhovskaya YY. Adhesive interaction of elastic bodies. *J. Appl. Math. Mech.* 2001; 65(2): 273–282.
- [63] Greenwood JA, Johnson KL. Oscillatory loading of a viscoelastic adhesive contact. *J. Colloid Interface Sci.* 2006; 296(1): 284–291. (doi: [10.1016/j.jcis.2005.08.069](https://doi.org/10.1016/j.jcis.2005.08.069)).
- [64] Shi X, Polycarpou AA. Adhesive transition from noncontacting to contacting elastic spheres: extension of the Maugis-Dugdale model. *J. Colloid Interface Sci.* 2005; 281(2): 449–457. (doi: [10.1016/j.jcis.2004.08.069](https://doi.org/10.1016/j.jcis.2004.08.069)).
- [65] Shi X, Polycarpou AA. An elastic-plastic hybrid adhesion model for contacting rough surfaces in the presence of molecularly thin lubricant. *J. Colloid Interface Sci.* 2005; 290(2): 514–525. (doi: [10.1016/j.jcis.2005.04.058](https://doi.org/10.1016/j.jcis.2005.04.058)).
- [66] Xue X, Polycarpou AA. An improved meniscus surface model for contacting rough surfaces. *J. Colloid Interface Sci.* 2007; 311(1): 203–211. (doi: [10.1016/j.jcis.2007.02.038](https://doi.org/10.1016/j.jcis.2007.02.038)).
- [67] Barthel E. On the description of the adhesive contact of spheres with arbitrary interaction potentials. *J. Colloid Interface Sci.* 1998; 200(1): 7–18. (doi: [10.1006/jcis.1997.5309](https://doi.org/10.1006/jcis.1997.5309)).
- [68] Greenwood JA, Johnson KL. An alternative to the Maugis model of adhesion between elastic spheres. *J. Phys. D* 1998; 31(22): 3279–3290. (doi: [10.1088/0022-3727/31/22/017](https://doi.org/10.1088/0022-3727/31/22/017)).
- [69] Zheng ZJ, Yu JL. Using the Dugdale approximation to match a specific interaction in the adhesive contact of elastic objects. *J. Colloid Interface*

- Sci.* 2007; 310(1): 27–34. (doi: [10.1016/j.jcis.2007.01.042](https://doi.org/10.1016/j.jcis.2007.01.042)).
- [70] Love A. A treatise on the mathematical theory of elasticity. London: Cambridge University Press, 1927.
- [71] Sneddon IN. Application of integral transforms in the theory of elasticity. New York: Springer-Verlag, 1975.
- [72] Gladwell GML. Contact problems in the classical theory of elasticity. Alphen aan den Rijn, The Netherlands: Sijthoff and Noordhoff, 1980.
- [73] Maugis D. Contact, adhesion and rupture of elastic solids. Berlin: Springer, 2000.
- [74] Boussinesq J. Application des Potentials á l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques (Application of Potentials in the study of equilibrium and movement of elastic solids). Paris: Gauthier-Villard, 1885.
- [75] Westmann RA. Asymmetric mixed boundary-value problems of the elastic half-space. *J. Appl. Mech.* 1965; 32: 411–417.
- [76] Sneddon IN. Mixed boundary value problems in potential theory. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1966.
- [77] Harding JW, Sneddon IN. The elastic stresses produced by the indentation of the plane surface of a semi-infinite elastic solid by a rigid punch. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1945; 41: 16–26.
- [78] Yao HM, Gao HJ. Optimal shapes for adhesive binding between two elastic bodies. *J. Colloid Interface Sci.* 2006; 298(1): 564–572. (doi: [10.1016/j.jcis.2005.12.059](https://doi.org/10.1016/j.jcis.2005.12.059)).
- [79] Sneddon IN. The relation between load and penetration in the axisymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile. *Int. J. Engng Sci.* 1965; 3: 47–57. (doi: [10.1016/0020-7225\(65\)90019-4](https://doi.org/10.1016/0020-7225(65)90019-4)).
- [80] Lowengrub M, Sneddon IN. The distribution of stress in the vicinity of an external crack in an infinite elastic solid. *Int. J. Engng Sci.* 1965; 3(4): 451–460. (doi: [10.1016/0020-7225\(65\)90028-5](https://doi.org/10.1016/0020-7225(65)90028-5)).
- [81] 郑志军, 虞吉林. 任意轴对称弹性体吸附接触的广义 Maugis 模型. *力学学报* 2007; 39(3): 382–388. (Zheng ZJ, Yu JL. A generalized Maugis model for adhesive contact of arbitrary axisymmetric elastic objects. *Chinese J. Theo. Appl. Mech.* 2007; 39(3): 382–388).
- [82] Cho SS, Park S. Finite element modeling of adhesive contact us-

- ing molecular potential. *Tribol. Int.* 2004; 37(9): 763–769. (doi: [10.1016/j.triboint.2004.04.007](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2004.04.007)).
- [83] Sauer RA, Li S. An atomic interaction-based continuum model for adhesive contact mechanics. *Finite Elem. Anal. Des.* 2007; 43(5): 384–396. (doi: [10.1016/j.finel.2006.11.009](https://doi.org/10.1016/j.finel.2006.11.009)).
- [84] Leng YS, Hu YZ, Zheng Q L. Adhesive contact of flat-ended wedges: theory and computer experiments. *J. Tribol.* 1999; 121(1): 128–132.
- [85] Cha PR, Srolovitz DJ, Vanderlick TK. Molecular dynamics simulation of single asperity contact. *Acta mater.* 2004; 52(13): 3983–3996.
- [86] Luan B, Robbins MO. The breakdown of continuum models for mechanical contacts. *Nature* 2005; 435(7044): 929–932.
- [87] Luan B, Robbins MO. Contact of single asperities with varying adhesion: comparing continuum mechanics to atomistic simulations. *Phys. Rev. E* 2006; 74(2): 026111(1–17). (doi: [10.1103/PhysRevE.74.026111](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.74.026111)).
- [88] Attard P, Parker JL. Erratum: Deformation and adhesion of elastic bodies in contact. *Phys. Rev. E* 1994; 50(6): 5145. (doi: [10.1103/PhysRevE.50.5145](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.50.5145)).
- [89] Feng JQ. Adhesive contact of elastically deformable spheres: a computational study of pull-off force and contact radius. *J. Colloid Interface Sci.* 2001; 238(2): 318–323. (doi: [10.1006/jcis.2001.7532](https://doi.org/10.1006/jcis.2001.7532)).
- [90] Dundurs J. Discussion: Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading. *J. Appl. Mech.* 1969; 36: 650–652.
- [91] Dresher M. *The Mathematics of Games of Strategy: Theory and Applications*. New York: Dover, 1981.
- [92] 谈庆明. 量纲分析. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2005. (Tan QM. *Dimensional Analysis*. Hefei: Press of University of Science and Technology of China 2005).
- [93] Lin CC, Segel LA. *Mathematics applied to deterministic problems in the natural sciences*. New York: Macmillan, 1974.
- [94] Griffith AA. The phenomena of rupture and flow in solids. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 1921; A221: 163–198.
- [95] Barquins M. Adherence and rolling kinetics of a rigid cylinder in contact with a natural rubber surface. *J. Adhes.* 1988; 26(1): 1–12.

- [96] Johnson KL. Mechanics of adhesion. *Tribol. Int.* 1998; 31(8): 413–418. (doi: [10.1016/S0301-679X\(98\)00060-7](https://doi.org/10.1016/S0301-679X(98)00060-7)).
- [97] Gao HJ, Wang X, Yao HM, Gorb S, Arzt E. Mechanics of hierarchical adhesion structures of geckos. *Mech. Mater.* 2005; 37(2-3): 275–285. (doi: [10.1016/j.mechmat.2004.03.008](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2004.03.008)).
- [98] Dugdale DS. Yielding of steel containing slit. *J. Mech. Phys. Solids* 1960; 8(2): 100–104.
- [99] Segedin CM. The relation between load and penetration for a spherical punch. *Mathematika* 1957; 4: 156 - 161.
- [100] Kendall K. The adhesion and surface energy of elastic solids. *J. Phys. D* 1971; 4(8): 1186–1195. (doi: [10.1088/0022-3727/4/8/320](https://doi.org/10.1088/0022-3727/4/8/320)).
- [101] Maugis D, Barquins M. Adhesive contact of a conical punch on an elastic half-space. *J. Phys. Lett.* 1981; 42: L95–L97.
- [102] Barenblatt GI. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.* 1962; 7: 55 - 129.
- [103] Abbott EJ, Firestone FA. Specifying surface quality—a method based on accurate measurement and comparison. *Mech. Engr.* 1933; 55: 569 - 573.
- [104] Greenwood JA, Williamson JBP. Contact of nominally flat surfaces. *Proc. R. Soc. Lond. A* 1966; 295: 300–319.
- [105] Pullen J, Williamson JBP. On the plastic contact of rough surfaces. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 1972; 327: 159–173.
- [106] Fuller KN, Tabor D. The effect of surface roughness on the adhesion of elastic solids. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 1975; 345: 327–342.
- [107] Chang WR, Etsion I, Bogy DB. An elastic-plastic model for the contact of rough surfaces. *J. Tribol.* 1987; 109(4): 257–263.
- [108] Zhao YW, Maietta DM, Chang L. An asperity microcontact model incorporating the transition from elastic deformation to fully plastic flow. *J. Tribol.* 2000; 122: 86–93.
- [109] Mesarovic SD, Fleck NA. Frictionless indentation of dissimilar elastic-plastic spheres. *Int. J. Solids Struct.* 2000; 37: 7071–7091.
- [110] Zhang LX, Zhao YP. Adhesion of rough surfaces with plastic deformation. *J. Adhesion Sci. Technol.* 2004; 18(6): 715–729. (doi: [10.1016/j.mechmat.2004.03.008](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2004.03.008)).



- 10.1163/156856104839329).
- [111] Ciavarella M, Murolo G, Demelio G, Barber JR. Elastic contact stiffness and contact resistance for the Weierstrass profile. *J. Mech. Phys. Solids* 2004; 52(6): 1247 - 1265. (doi: [10.1016/j.jmps.2003.12.002](https://doi.org/10.1016/j.jmps.2003.12.002)).
- [112] Abramowitz M, Stegun IA. Handbook of mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Washington D.C.: United States Government Printing Office, 1964.  
<http://www.convertit.com/Go/ConvertIt/Reference/AMS55.ASP>.
- [113] Weisstein EW. Hypergeometric function. From MathWorld—A Wolfram Web Resource.  
<http://mathworld.wolfram.com/HypergeometricFunction.html>.
- [114] Davies B. Integral transforms and their applications. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [115] Luke YL. Integrals of Bessel functions. New York: McGraw-Hill, 1962.



## 致 谢

在本文完稿之际，谨以最诚挚的敬意献给我的导师虞吉林教授，衷心感谢虞老师五年多来的关心和教诲。虞老师悉心指导作者完成了本文和之前的工作，并引导作者以应用数学的方法处理问题、以最直接的比较解释物理成因、以最科学的语言阐述研究结果。虞老师渊博的学识、敏锐的洞察力、严谨求实的治学态度、不辞辛劳的工作精神以及诲人不倦的师者风范，都长远而深刻地影响作者的成长，使作者不仅在科研经验上受益匪浅，在为人处世上更是受益终身。

感谢我系文鹤鸣教授、胡时胜教授、唐志平教授、夏源明教授、何陵辉教授、吴峰教授、九系黄文浩教授等多位老师的教诲和指导。他们的悉心教导和辛勤培养使作者在理论分析、数值模拟和实验技巧等方面的能力得以全面发展。感谢作者在科大九年里遇到的所有老师，特别感谢我系尹协振教授和陈海波教授一直以来在学业和生活上的关心和帮助。

感谢曾在实验室给予指导和帮助的李剑荣博士、张文格博士、王二恒博士和饶伟峰讲师等师兄，特别感谢李剑荣副教授对本文研究工作开展的建设性意见，作者将铭记于心。感谢实验室何涛同学、寇东鹏、兰彬、谢中友、林静、孙炜海、覃悦、潘建华、郭刘伟、刘耀东、李成、廖深飞等师弟师妹们与作者的朝夕相处，在科研和生活上的交流讨论将是作者生命中不可磨灭的一段记忆。

感谢 04 秋博班同学杨焱、黄丰、张鲲、何涛、孙红灵、王磊、赵凯、梅群、程鹏、朱雨建等以及 9805 其他同学杨宗儒、黄甲、张文武、王银春、王勇、陈小亮、郭哲颖、白春霖、杨义红、于淼、李龙、梁晓东、孟新等与作者的快乐相处。特别感谢黄丰在应用软件方面给予的帮助，还为作者编写了 JobHelper 软件。

感谢力学沙龙的所有成员的交流讨论，特别是与倪勇、王二恒、孙亮、张亚军、程添乐等师兄的讨论让作者收获颇多。

感谢中国科学技术大学研究生创新基金 (KD2004036) 对本文相关研究工作的支持。感谢我的所有学术论文的审稿人和学术报告的评议人，你们的建议和意见激发了作者的研究兴趣并规范了作者的科研习惯。

感谢数年来父母和姐姐的殷切期盼和全力支持、亲人的热切关心和物质帮助，使作者得以完成学业，使本文得以顺利完成。

最后谨以此文回报老师们的教导、亲人们的抚育和朋友们的帮助。

## 作者简介和攻读博士学位期间发表的学术论文

郑志军, 男, 1979 年出生于福建省漳州市龙海市。1998 年 9 月考入中国科学技术大学力学和机械工程系, 2002 年 7 月获得理学学士学位, 2002 年 9 月成为免试硕博连读研究生。电子邮箱: [zjzheng@ustc.edu](mailto:zjzheng@ustc.edu)。

### 研究经历:

- 2004.05-2007.07 微纳米接触力学行为的理论研究 导师: 虞吉林教授  
获中国科学技术大学研究生创新基金 (KD2004036) 支持
- 2003.07-2004.05 泡沫金属力学行为的数值研究 导师: 虞吉林教授
- 2002.11-2003.07 圆管轴向渐进屈曲的理论研究 导师: 虞吉林教授
- 2001.10-2002.07 二维机翼非定常运动的实验研究 导师: 尹协振教授

### 助教经历:

- 研究生课程“高等应用数学”助教 (04-05/05-06/06-07 学年第一学期)
- 本科生课程“材料力学”助教 (02-03 学年第二学期)

### 攻读博士学位期间发表的主要学术论文:

- [1] **Zheng ZJ**, Yu JL. Using the Dugdale approximation to match a specific interaction in the adhesive contact of elastic objects. *Journal of Colloid and Interface Science* 2007; 310(1): 27-34. (doi: [10.1016/j.jcis.2007.01.042](https://doi.org/10.1016/j.jcis.2007.01.042); ISSN: 0021-9797; EI: 071610552302; PMID: 17335843)
- [2] 郑志军, 虞吉林. 任意轴对称弹性体吸附接触的广义 Maugis 模型. *力学学报* 2007; 39(3): 382-388. (ISSN: 0567-7718; CN: 11-2063/O3)
- [3] **Zheng ZJ**, Yu JL, Li JR. Dynamic crushing of 2D cellular structures: A finite element study. Fifth International Symposium on Impact Engineering (ISIE5), Jul. 12-15, 2004. *International Journal of Impact Engineering* 2005; 32(1-4): 650-664. (doi: [10.1016/j.ijimpeng.2005.05.007](https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2005.05.007); ISSN: 0734-743X; SCI: 993SR; EI: 05479499599)
- [4] 郑志军, 虞吉林, 李剑荣. 不规则蜂窝结构面内冲击性能的数值研究. *材料和结构的动态响应*. 白以龙主编. 中国科学技术大学出版社 2005. pp. 65-77.