15.4 在这道习题中，我们考查在长时间序列的极限情况下，雨伞世界中的概率会发生什么事情。

a. 假设我们观察到雨伞出现的日子的无尽序列。证明：随着时间的推移，当天下雨的概率会单调地增加到一个不动点，计算这个不动点的值。

b. 现在给定头两天的雨伞观察结果，考虑对越来越远的将来进行预测的问题。首先，对 k=1 到 20计算概率 $P(r_{2+k}|u_1,u_2)$，并绘制出结果图。你应该会发现这个概率会收敛到一个不动点，证明这个不动点的精确值是 0.5。

15.13 有一位教授想知道学生是否睡眠充足。每天，教授观察学生在课堂上是否睡觉，并观察他们是否有红眼。教授有如下的领域理论：

- 没有观察数据时，学生睡眠充足的先验概率为 0.7。
- 给定学生前一天睡眠充足为条件，学生在晚上睡眠充足的概率是 0.8；如 果前一天睡眠不充足，则是 0.3。
- 如果学生睡眠充足，则红眼的概率是 0.2，否则是 0.7。
- 如果学生睡眠充足，则在课堂上睡觉的概率是 0.1，否则是 0.3。

将这些信息形式化为一个动态贝叶斯网络，使教授可以使用这个网络从观察序列中进行滤波和预测。然后再将其形式化为一个只有一个观察变量隐马尔科夫模型。给出这个模型的完整的概率表。

15.14 对于习题15.13描述的动态贝叶斯网络以及证据变量值：

e_1 = 没有红眼，没有在课堂上睡觉

e_2= 有红眼，没有在课堂上睡觉

e_3= 有红眼，在课堂上睡觉

执行下面的计算：

a. 状态估计：针对每个 $t = 1,2,3$，计算 $P(EnoughSleep_t|e_{1:t})$

b. 平滑，针对每个 $t = 1,2,3$，计算 $P(EnoughSleep_t|e_{1:3})$

c. 针对 $t = 1$ 和 $t = 2$，比较滤波概率和平滑概率。