Chapter 9
Linear Programming

王子磊（Zilei Wang)
Email: zlwang@ustc.edu.cn
http://vim.ustc.edu.cn/

学习要点

- 理解线性规划算法模型
- 掌握解线性规划问题的单纯形算法

线性规划问题及其表示

❖ 线性规划问题可表示为如下形式：

$$\max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (8.1)$$

s.t.

$$\sum_{t=1}^{n} a_{it} x_t \le b_i \qquad i = 1,2,\cdots,m_1 \qquad (8.2)$$

$$\sum_{t=1}^{n} a_{jt} x_t = b_j \qquad j = m_1+1,\cdots,m_1+m_2 \qquad (8.3)$$

$$\sum_{t=1}^{n} a_{kt} x_t \ge b_k \qquad k = m_1+m_2+1,\cdots,m_1+m_2+m_3 \qquad (8.4)$$

$$x_t \ge 0 \qquad t = 1,2,\cdots,n \qquad (8.5)$$

线性规划问题及其表示

- 变量满足约束条件(8.2)-(8.5)式的一组值称为线性规划问题的一个**可行解**
- 所有可行解构成的集合称为线性规划问题的**可行区域**
- 使目标函数取得极值的可行解称为**最优解**
- 在最优解处目标函数的值称为**最优值**

线性规划问题及其表示

- 有些情况下可能不存在最优解！
- 通常有两种情况：

(1) 根本没有可行解，即给定的约束条件之间是相互排斥的，可行区域为空集

(2) 目标函数没有极值，也就是说在 n 维空间中的某个方向上，目标函数值可以无限增大，而仍满足约束条件，此时目标函数值无界

线性规划问题举例

目标：

$$\max \quad z = x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4$$

约束：

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &\le 18 \\ 2x_2 - 7x_4 &\le 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 9 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 &\ge 1 \\ x_i \ge 0 \quad & i = 1,2,3,4 \end{aligned}$$

- 这个问题的最优解为 $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (0,3.5,4.5,1)$
- 最优值为 16

线性规划基本定理

- 基本可行解
  - 约束条件(8.2)-(8.5)中某 n 个约束以等号满足的可行解称为线性规划问题的基本可行解
  - 若 $n>m$，则基本可行解中至少有 n-m 个分量为 0，也就是说，基本可行解中最多有 m 个分量非零
- 线性规划基本定理：如果线性规划问题有最优解，则必有一基本可行最优解
  - 上述定理的重要意义在于，它把一个最优化问题转化为一个组合问题，即在(8.2) -(8.5)式的 $m+n$ 个约束条件中，确定最优解应满足其中哪 n 个约束条件的问题
  - 由此可知，只要对各种不同的组合进行测试，并比较每种情况下的目标函数值，直到找到最优解

线性规划基本定理

- Dantzig 于1948年提出了线性规划问题的单纯形算法
- 单纯形算法的特点是：
  - 只对约束条件的若干组合进行测试，测试的每一步都使目标函数的值增加
  - 一般经过不大于 m 或 n 次迭代就可求得最优解

约束标准型线性规划问题

- 标准形式的线性规划问题
  - 当线性规划问题中没有不等式约束(8.2)和(8.4)式
  - 只有等式约束(8.3)和变量非负约束(8.5)
- 约束标准型线性规划问题一类更特殊的标准形式线性规划问题
  - 每一个等式约束中，至少有一个变量的系数为正
  - 且这个变量只在该约束中出现

约束标准型线性规划问题

- 约束标准型线性规划问题
  - 在每一约束方程中选择一个这样的变量，并以它作为变量求解该约束方程
  - 这样选出来的变量称为左端变量或**基本变量**，其总数为 m 个
  - 剩下的 n-m 个变量称为右端变量或**非基本变量**
- 意义
  - 虽然约束标准型线性规划问题非常特殊，但是对于理解线性规划问题的单纯形算法是非常重要的
  - **任意一个线性规划问题可以转换为约束标准型线性规划问题**

约束标准型线性规划问题

$$\max \quad z = -x_2 + 3x_3 - 2x_5$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7$$

$$x_4 - 2x_2 + 4x_3 = 12$$

$$x_6 - 4x_2 + 3x_3 + 8x_5 = 10$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,2,3,4,5,6$$

⇒

		x_2	x_3	x5
z	0	-1	3	-2
x_1	7	3	-1	2
x_4	12	-2	4	0
x_6	10	-4	3	8

- 基本可行解
  - 将所有非基本变量都置为 0
  - 从约束方程式中解出满足约束的基本变量的值
- 单纯形算法的基本思想
  - 从一个基本可行解出发，进行一系列的基本可行解的变换
  - 每次变换将一个非基本变量与一个基本变量**互调位置**
  - 且**保持**当前的线性规划问题与原问题完全等价

约束标准型线性规划问题

- 基本可行解 $x=(7,0,0,12,0,10)$
- 单纯形算法的第 1 步：选出使目标函数增加的非基本变量作为入基变量
  - 查看单纯形表的第 1 行（也称之为 z 行）中标有非基本变量的各列中的值
  - 选出使目标函数增加的非基本变量作为入基变量
  - z 行中的正系数非基本变量都满足要求
  - 在上面单纯形表的 z 行中只有 1 列为正，即非基本变量相应的列，其值为 3
  - 选取非基本变量 x_3 作为入基变量

		x_2	x_3	$x5$
z	**0**	**-1**	**3**	**-2**
x_1	**7**	**3**	**-1**	**2**
x_4	**12**	**-2**	**4**	**0**
x_6	**10**	**-4**	**3**	**8**

约束标准型线性规划问题

- 单纯形算法的第2步：选取离基变量
  - 在单纯形表中考察由第 1 步选出的入基变量所相应的列
  - 在一个基本变量变为负值之前，入基变量可以增到多大
  - 如果入基变量所在的列与基本变量所在行交叉处的表元素为负数，那么该元素将不受任何限制，相应的基本变量只会越变越大
  - 如果入基变量所在列的所有元素都是负值，则目标函数无界，已经得到了问题的无界解

		x_2	x_3	$x5$
z	0	-1	3	-2
x_1	7	3	-1	2
x_4	12	-2	4	0
x_6	10	-4	3	8

约束标准型线性规划问题

- 如果选出的列中有一个或多个元素为正数，要弄清是哪个数限制了入基变量值的增加
  - 用入基变量所在列的元素（称为主元素）来除主元素所在行的“常数列”中元素而得到，所得到数值越小说明受到限制越多
  - 应该选取**受到限制最多**的基本变量作为离基变量，才能保证将入基变量与离基变量互调位置后，仍满足约束条件
- 示例中
  - 唯一的正值 z 行元素是3，它所在列中有 2 个正元素，即 4 和3
  - min{12/4,10/3}=3，应该选取 x_4 为离基变量
  - → 入基变量 x_3 取值为 3

		x_2	x_3	$x5$
z	**0**	**-1**	**3**	**-2**
x_1	**7**	**3**	**-1**	**2**
x_4	**12**	**-2**	**4**	**0**
x_6	**10**	**-4**	**3**	**8**

约束标准型线性规划问题

- 单纯形算法的第3步：转轴变换
  - 转轴变换的目的是将入基变量与离基变量互调位置
  - 给入基变量一个增值，使之成为基本变量
  - 修改离基变量，让入基变量所在列中，离基变量所在行的元素值减为零，而使之成为非基本变量
  - 解离基变量所相应的方程，将入基变量 x_3 用离基变量 x_4 表示为

$$x_3 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_4 = 3$$

		x_2	x_3	$x5$
z	**0**	**-1**	**3**	**-2**
x_1	**7**	**3**	**-1**	**2**
x_4	**12**	**-2**	**4**	**0**
x_6	**10**	**-4**	**3**	**8**

约束标准型线性规划问题

- 再将其代入其他基本变量和所在的行中消去 x_3

$$x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_4 + 2x_5 = 10$$
$$x_6 - \frac{5}{2}x_2 - \frac{3}{4}x_4 + 8x_5 = 1$$

- 代入目标函数得到

$$z = 9 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{4}x_4 - 2x_5$$

- 形成新单纯形表

		x_2	x_4	x_5
z	9	1/2	-3/4	-2
x_1	10	5/2	1/2	2
x_3	3	-1/2	1/4	0
x_6	1	-5/2	-3/4	8

约束标准型线性规划问题

- 单纯形算法的第 4 步：转回并重复第1步，进一步改进目标函数值
  - 不断重复上述过程，直到 z 行的所有非基本变量系数都变成负值为止，这表明目标函数不可能再增加了
  - 在上面的单纯形表中，惟一的值为正的 z 行元素是非基本变量 x_2 相应的列，其值为 ½，因此，选取非基本变量 x_2 作为入基变量
  - 它所在列中有惟一的正元素 5/2，即基本变量 x_1 相应行的元素，因此，选取x_1 为离基变量
  - 再经步骤3的转轴变换得到新单纯形表

		x_2	x_4	x_5
z	9	1/2	-3/4	-2
x_1	10	5/2	1/2	2
x_3	3	-1/2	1/4	0
x_6	1	-5/2	-3/4	8

约束标准型线性规划问题

- 新单纯形表 z 行的所有非基本变量系数都变成负值，求解过程结束
- 整个问题的解可以从最后一张单纯形表的常数列中读出
  - 目标函数的最大值为 11
  - 最优解为：$x^* = (0,4,5,0,0,11)$
- 计算过程总结
  - 可以用单纯形表的形式归纳为一系列基本矩阵运算
  - 主要运算为转轴变换，该变换类似解线性方程组的高斯消去法中的消元变换

		x_1	x_4	x_5
z	11	-1/5	-4/5	-12/5
x_2	4	5/2	1/10	4/5
x_3	5	1/5	3/10	2/5
x_6	11	1	-1/2	10

单纯形算法计算步骤

❖ 单纯形表：

- $x_1, x_2, \ldots, x_m$为基本变量，$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ 为非基本变量
- 基本变量下标集为 $B = \{1,2,\ldots,m\}$； 非基本变量下标集为 $N = \{m+1,m+2,\ldots,n\}$；
- 当前基本可行解为 $(b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0)$

		x_{m+1}	x_{m+2}	$\ldots$	x_n
z	c_0	c_{m+1}	c_{m+2}	$\ldots$	c_n
x_1	b_1	a_{1m+1}	a_{1m+2}	$\ldots$	a_{1n}
x_2	b_2	a_{2m+1}	a_{2m+2}	$\ldots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$				
x_m	b_m	a_{mm+1}	a_{mm+2}	$\ldots$	a_{mn}

单纯形算法计算步骤

- 步骤1：选入基变量
  - 如果所有 $c_j \le 0$，则当前基本可行解为最优解，计算结束
  - 否则，取 $c_e > 0$ 相应的非基本变量 x_e 为入基变量
- 步骤2：选离基变量
  - 对于步骤1选出的入基变量 x_e，如果所有 $a_{ie} \le 0$，则最优解无界，计算结束
  - 否则计算

$$\theta = \min_{a_{ie}>0}\left\{\frac{b_i}{a_{ie}}\right\} = \frac{b_k}{a_{ke}}$$

  - 选取基本变量 x_k 为离基变量
  - 新的基本变量下标集为：$\overline{B} = B + \{e\} - \{k\}$
  - 新的非基本变量下标集为：$\overline{N} = N + \{k\} - \{e\}$
- 步骤3：作转轴变换

单纯形算法计算步骤

❖ 新单纯形表中各元素变换如下：

$$\begin{cases} \bar{b}_i = b_i - a_{ie}\dfrac{b_k}{a_{ke}} & i \in \bar{B} \\ \bar{b}_e = \dfrac{b_k}{a_{ke}} & \end{cases} \tag{8.10}$$

$$\begin{cases} \bar{a}_{ij} = a_{ij} - a_{ie}\dfrac{a_{kj}}{a_{ke}} & i \in \bar{B}, \quad j \in \bar{N} \\ \bar{a}_{ik} = -\dfrac{a_{ie}}{a_{ke}} & \end{cases} \tag{8.11}$$

$$\begin{cases} \bar{a}_{ej} = \dfrac{a_{kj}}{a_{ke}} & j \in \bar{N} \\ \bar{a}_{ek} = \dfrac{1}{a_{ke}} & \end{cases} \tag{8.12}$$

$$\begin{cases} \bar{c}_i = c_i - c_e\dfrac{a_{ki}}{a_{ke}} & i \in \bar{N} \\ \bar{c}_k = -\dfrac{c_e}{a_{ke}} & \end{cases} \tag{8.13}$$

❖ 步骤4：转步骤 1

将一般问题转换为约束标准型

- 巧妙的办法
  - 首先，需要把(8.2)或(8.4)形式的不等式约束转换为**等式约束**
    - 引入松弛变量，利用松弛变量的非负性，将不等式转化为等式
    - 松弛变量记为 y_i，共有 m_1+m_3 个
    - 在求解过程中，应当将松弛变量与原来变量同样对待，求解结束后，抛弃松弛变量
    - 注意松弛变量前的符号（正负号）由相应的原不等式的方向所确定

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &\le 18 \\ 2x_2 - 7x_4 &\le 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 9 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 &\ge 1 \end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + y_1 &= 18 \\ 2x_2 - 7x_4 + y_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 9 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 - y_3 &= 1 \end{aligned}$$

将一般问题转换为约束标准型

- 巧妙的办法
  - 为了进一步构造标准型约束，还需要引入 m 个人工变量，记为 z_i
  - 至此，原问题已经变换为等价的约束标准型线性规划问题
  - 对极小化线性规划问题，只要将目标函数乘以 -1 即可化为等价的极大化线性规划问题

$$
\begin{aligned}
z_1 + x_1 + 2x_3 + y_1 &= 18 \\
z_2 + 2x_2 - 7x_4 + y_2 &= 0 \\
z_3 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 9 \\
z_4 + x_2 - x_3 + 2x_4 - y_3 &= 1
\end{aligned}
$$

一般问题线性规划问题的 2 阶段单纯形算法

- 问题
  - 引入人工变量后的线性规划问题与原问题并不等价，除非所有 z_i 都是 0
  - 为了解决这个问题，在求解时必须分 2 个阶段进行
- 第一阶段
  - 用一个辅助目标函数 $z' = -\sum_{i=1}^{m} z_i$ 替代原来的目标函数，这个线性规划问题称为原线性规划问题所相应的辅助线性规划问题
  - 对辅助线性规划问题用单纯形算法求解
  - 如果原线性规划问题有可行解，则辅助线性规划问题就有最优解，且其最优值为0，即所有 z_i 都为 0

一般问题线性规划问题的2阶段单纯形算法

- 第一阶段
  - 在辅助线性规划问题最后的单纯形表中，所有 z_i 均为非基本变量
  - 划掉所有 z_i 相应的列，剩下的就是只含 x_i 和 y_i 的约束标准型线性规划问题
  - 单纯形算法第一阶段的任务就是构造一个初始基本可行解
- 第二阶段
  - 目标是求解由第一阶段导出的问题
  - 此时要用原来的目标函数进行求解
  - 如果在辅助线性规划问题最后的单纯形表中，z_i 不全为 0，则原线性规划问题没有可行解，从而原线性规划问题无解

退化情形的处理

- 用单纯形算法解一般的线性规划问题时，可能会遇到退化的情形
  - 在迭代计算的某一步中，常数列中的某个元素的值变成0，使得相应的基本变量取值为0
  - 如果选取退化的基本变量为离基变量，则作转轴变换前后的目标函数值不变
  - 在这种情况下，算法不能保证目标函数值严格递增，因此，可能出现无限循环

退化情形的处理

- 考察下面的由 Beale 在 1955 年提出的退化问题的例子
  - 按照 2 阶段单纯形算法求解该问题将出现无限循环

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = \frac{3}{4}x_1 - 20x_2 + \frac{1}{2}x_3 - 6x_4 \\
&\frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \le 0 \\
&\frac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 \le 0 \\
&x_3 \le 1 \\
&x_i \ge 0 \quad i = 1,2,3,4
\end{aligned}
$$

退化情形的处理

- Bland 提出避免循环的一个简单易行的方法
  - 在单纯形算法迭代中，按照下面的2个简单规则就可以避免循环
  - 规则1：设 $e = \min\{ j \mid c_j > 0\}$，取 x_e 为入基变量
  - 规则2：设 $k = \min\left\{ l \mid \frac{b_l}{a_{le}} = \min_{a_{ie}>0}\left\{ \frac{b_i}{a_{ie}} \right\} \right\}$，取 x_k 为离基变量
- 实现
  - 算法 leave(col) 已经按照规则 2 选取离基变量
  - 选取入基变量的算法 enter(objrow) 中只要加一个 break 语句即可

仓库租赁问题

问题描述

- 某企业计划为流通的货物租赁一批仓库，必须保证在时间段 i=1,2,…,n，有 b_i 的仓库容量可用
- 现有若干仓库源可供选择
- 设 c_{ij} 是从时间段 i 到时间段 j 租用 1个单位仓库容量的价格，$1 \le i \le j \le n$
- 应如何安排仓库租赁计划才能**满足各时间段的仓库需求，且使租赁费用最少**？

优化目标

- 设租用时间段 i 到时间段 j 的仓库容量为 y_{ij}，$1 \le i \le j \le n$，则租用仓库的总费用为：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} c_{ij} y_{ij}$$

仓库租赁问题

问题建模

- 在时间段 k 可用的仓库容量为：$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k}^{n} y_{ij}$

- 仓库租赁问题可表述为下面的线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
&\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} c_{ij} y_{ij} \\
&\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k}^{n} y_{ij} \ge b_k \\
&y_{ij} \ge 0
\end{aligned}
$$

仓库租赁问题

❖ 问题建模

- 设 $m=n(n+1)/2$；
- $(y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{1n}, y_{22}, y_{23}, \cdots, y_{2n}, \cdots, y_{nn}) = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$
- $(c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1n}, c_{22}, c_{23}, \cdots, c_{2n}, \cdots, c_{nn}) = (d_1, d_2, \cdots, d_m)$
- 上述线性规划问题可表述为 n 个约束和 m 个变量的标准线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & d^T x \\
& Ax \ge b \\
& x \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{bmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

Next

- 网络流
  - Network flow