

# 金属的一些特性

赵瑾（主讲）      郑奇靖（辅助）

中国科学技术大学，物理系

[zqj@ustc.edu.cn](mailto:zqj@ustc.edu.cn)

2023 年 5 月 3 日

## 1 功函数

✿ 热电子发射的电流密度：

$$\begin{aligned}
 j_z &= -e \cdot \int v_z dn = -e \cdot \int v_z \rho(\mathbf{k}) f(\varepsilon_{\mathbf{k}}) d\mathbf{k} \\
 &= -e \cdot \int \frac{\hbar}{m} k_z \rho(\mathbf{k}) f(\varepsilon_{\mathbf{k}}) d\mathbf{k} \quad \leftarrow \quad mv = \hbar k \\
 &= -e \frac{\hbar}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}}^{\infty} dk_z k_z \frac{1}{8\pi^3} \frac{1}{\exp\left[\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu_0}{k_B T}\right] + 1} \\
 &\approx -\frac{e\hbar}{8\pi^3 m} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}}^{\infty} dk_z k_z \exp\left(\frac{\mu_0}{k_B T}\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}}{k_B T}\right) \quad \leftarrow \quad \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu_0 \gg k_B T \\
 &= -\frac{e\hbar}{8\pi^3 m} \exp\left(\frac{\mu_0}{k_B T}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \exp\left(-\frac{\hbar^2 k_x^2}{2mk_B T}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \exp\left(-\frac{\hbar^2 k_y^2}{2mk_B T}\right) \\
 &\quad \int_{\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}}^{\infty} dk_z k_z \exp\left(-\frac{\hbar^2 k_z^2}{2mk_B T}\right) \tag{1}
 \end{aligned}$$

✿ 利用以下两个积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp\left(-\frac{\hbar^2 k^2}{2mk_B T}\right) = \sqrt{\frac{2\pi mk_B T}{\hbar^2}} \quad (2)$$

$$\int_a^{\infty} xe^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda a^2} \Rightarrow \int_{\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}}^{\infty} dk k \exp\left(-\frac{\hbar^2 k^2}{2mk_B T}\right) = \frac{2mk_B T}{\hbar^2} e^{-\frac{V_0}{k_B T}} \quad (3)$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} j_z &= -\frac{e\hbar}{8\pi^3 m} \exp\left(\frac{\mu_0}{k_B T}\right) \cdot \frac{2\pi mk_B T}{\hbar^2} \cdot \frac{2mk_B T}{\hbar^2} \exp\left(-\frac{V_0}{k_B T}\right) \\ &= -\frac{mek_B^2}{2\pi^2 \hbar^3} T^2 \exp\left(-\frac{V_0 - \mu_0}{k_B T}\right) = -\frac{mek_B^2}{2\pi^2 \hbar^3} T^2 \exp\left(-\frac{W}{k_B T}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

上式称为 *Richardson-Dushman* 方程,  $A_0 = \frac{mek_B^2}{2\pi^2 \hbar^3} = 1201731 \text{ A m}^{-2} \text{ K}^{-2}$  为与材料无关的常数。

钨的(100)面的功函数为4.63 eV，则热电子电流密度随温度变化关系曲线如下

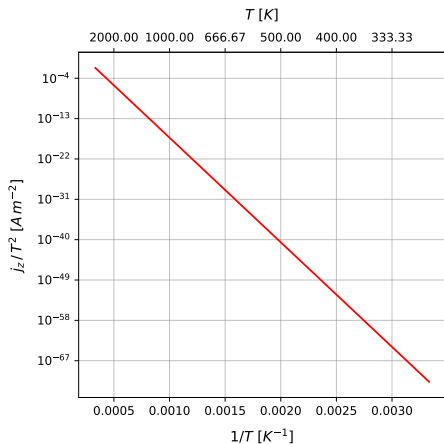


图 - 根据 Richardson-Dushman 方程画出钨(100)面的热电子电流随温度变化关系，钨的熔点为3695 K 或3422 °C。

谢谢!