



目录

目录.....	1
绪论.....	5
1、什么是数值预报和数值模拟.....	5
2、两者有何异同.....	5
3、课程目的、要求、内容.....	5
4、参考书目.....	6
第一章 大气运动方程组.....	7
第一节 基本方程组.....	7
1、运动方程.....	7
2、连续方程.....	8
3、状态方程.....	8
4、热力学方程.....	8
5、水汽方程.....	9
6、闭合方程组.....	9
第二节 球坐标系方程组.....	10
1、球坐标系.....	10
2、局地直角坐标系.....	11
第三节 铅直坐标变换.....	11
1、z 坐标系.....	11
2、P 坐标系.....	12
3、 δ 坐标系.....	12
4、 θ 坐标系.....	13
5、混合坐标系.....	13
6、 δ 、 p 、 z 坐标系的比较.....	14
第四节 地图投影坐标系.....	15
1、为何采用地图投影坐标系.....	15
2、常用的地图投影.....	15
3、地图投影坐标系中的大气运动方程组.....	16
第二章 大气运动的整体性质与能量约束.....	19
第一节 大尺度大气运动的特性.....	19
1、准地转特性.....	19
2、准静力平衡.....	20
3、准水平特征.....	21
4、准无辐散.....	22
第二节 小尺度运动的特性（包率内斯克 Boussinesq 近似）.....	22
1、特性.....	22
2、Boussinesq 近似.....	22



第三节 大气中的几个守恒量.....	23
1、总质量守恒.....	23
2、绝热大气位温与位温平方守恒.....	23
3、绝热无摩擦大气总能量守恒.....	24
4、绝热无摩擦大气位涡和位涡拟能守恒.....	24
第三章 大气中的波动.....	25
第一节 大气中的混合波解.....	25
1、大气波动基本方程.....	25
2、波解分析.....	26
第二节 各种波动特征.....	26
1、声波.....	26
2、重力内波.....	26
3、惯性波.....	26
4、惯性重力内波.....	27
5、Rossby 波.....	27
第四章 数值计算法.....	29
第一节 水平空间差分网格及其差分计算格式.....	29
第二节 时间差分.....	31
第三节 各种常用的数值时间积分格式.....	32
1、取两个时间层的情况.....	33
2、取三个时间层的格式.....	35
第四节 差分近似的相容性、精确性、收敛性和稳定性.....	36
1、差分近似的相容性.....	36
2、差分近似的精确性.....	37
3、差分近似的收敛性.....	37
4、各种时间积分格式的稳定性.....	38
第五节 起步问题.....	44
1、多步法起步.....	44
2、用稳定的两个时间层格式起步.....	45
第六节 常用差分格式的系统性误差.....	45
1、波速偏慢问题.....	45
2、差分方程的计算解（虚假的计算波）.....	45
第七节 非线性计算不稳定.....	46
第八节 平滑和滤波.....	47
1、5点平滑公式.....	47
2、9点平滑公式.....	48
第九节 水平边界条件.....	48
1、固定边界和刚体边界.....	48
2、海绵边界（可比较稳定）.....	49
3、外推边界.....	49
4、网格嵌套.....	50
第十节 垂直方向的差分.....	50
1、垂直分层.....	50



2、垂直差分.....	51
第五章 正压原始方程模式.....	53
第一节 历史回顾.....	53
第二节 过滤模式.....	54
第三节 正压原始方程组.....	55
第四节 正压原始方程模式的物理属性.....	55
第六章 斜压原始方程模式.....	57
第一节 模式方程组及其积分关系.....	57
1、垂直区间约束关系.....	57
2、质量守恒关系.....	57
3、变量的个别变化及其通量形式.....	57
4、水平气压梯度力的垂直积分.....	58
5、总能量守恒.....	58
第二节 变量配置与垂直差分格式.....	58
1、垂直分层与变量配置.....	58
2、垂直差分格式的构造.....	58
第三节 斜压原始方程模式计算方案.....	59
第七章 初值处理.....	61
第一节 客观分析.....	61
1、水平插值.....	61
2、垂直插值.....	65
第二节 资料初始化.....	66
1、静处理方法.....	66
2、动处理方法.....	68
3、变分处理方法.....	68
第三节 四维同化.....	68
1、间歇资料同化.....	68
2、连续资料同化.....	69
第八章 模式中物理过程的处理方法.....	71
第一节 辐射过程：.....	71
1、太阳辐射：.....	71
2、天气系统的红外热辐射（长波辐射）.....	79
第二节 湍流和湍流扩散作用.....	83
第三节 边界层处理.....	85
第四节 地形作用.....	88
1、地形的热力作用.....	88
2、地形动力作用.....	88
3、模式中对地形的处理.....	88
第五节 凝结加热.....	89
附录一 Fortran 在大气科学数值模拟中的运用.....	91
一、FORTRAN 基础.....	91
1、字符集.....	91
2、程序书写格式.....	91



3、变量.....	92
4、变量名称的取名原则.....	93
5、程序结构.....	93
6、输入/输出	94
7、选择结构.....	95
8、循环结构.....	96
9、数组的声明与使用.....	96
10、文件的基本读写操作.....	97
11、子程序 SUBROUTINE	97
12、函数 FUNCTION	98
二、差分法 Fortran 实例.....	98
附录二 Grads 的应用	99
1、基本使用操作.....	99
2、Fortran 写 Grads 数据文件	102
3、Matlab 写 Grads 数据文件.....	103
实习一 差分方法.....	105
实习二 时间积分格式.....	107
实习三 水平内插.....	113
实习四 USTC9 层模式	115



绪论

1、什么是数值预报和数值模拟

过去讲**数值预报**是指数值天气预报，即用电子计算机来求解大气动力学方程，从而制作天气预报的方法；近年来发展出气候数值预报和环境数值预报。

数值模拟主要是采用数值方法来模拟大气的运动和变化规律。大气运动非常复杂，描述它的方程组也非常复杂，目前还没有解析解，只能求它的数值解。计算机是必备条件。

2、两者有何异同

相同点：

采用的基本方程、计算方法相同，得到的结果有不少是一样的

不同点：

1、两者的目的和任务不一样

数值模拟：研究、实验先行，为预报打基础。如：(1)设计模式，对各种计算方法（如各种差分格式、谱模式等，包括计算 Jacobi 的方法就好几种）进行实验，找出最佳。(2)对各种物理因子，首先设计计算方案，然后实验，看其对预报是否重要。举例： O_3 、SST…搞好了，提供给预报用。

数值预报：已有成型的模式和方案，每天把初值送入，计算结果，分析预报

2、两者使用的资料不一样：预报用当时实况，模拟则不一定

3、成功的数值模式就可转去应用，就变成数值预报模式

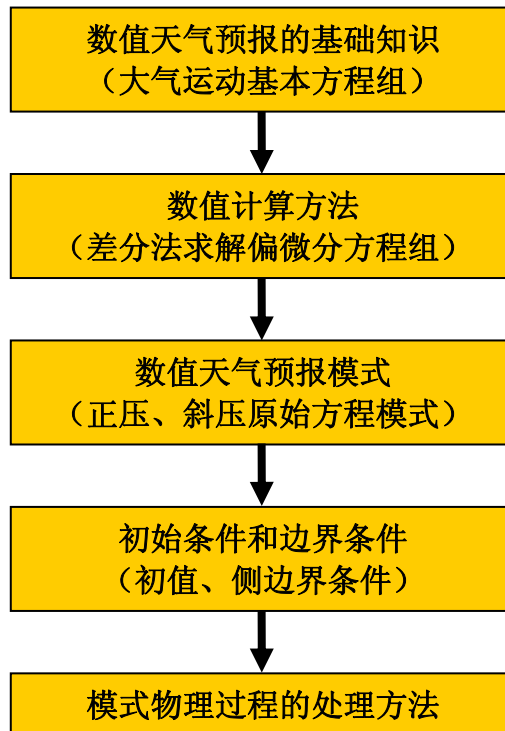
3、课程目的、要求、内容

目的：

学会使用计算机作数值预报、数值模拟的原理和方法；熟悉 Fortran、Matlab、GrADS 等软件在大气科学研究中的应用

内容：

针对本科，本课程主要讲解数值天气预报。



要求:

- (1) 认真听讲，作笔记
- (2) 期末考试+平时实习（一份实习报告）

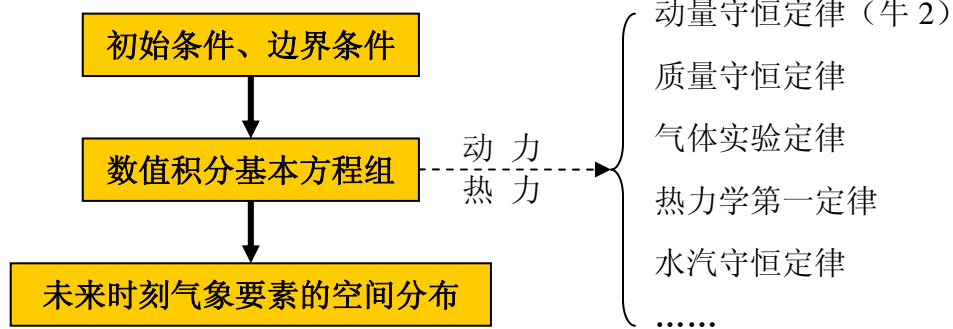
4、参考书目

《数值天气预报基础》	周 毅等编著	气象出版社
《数字天气预报》	沈桐立等编著	气象出版社



第一章 大气运动方程组

数值天气预报:



第一节 基本方程组

1、运动方程

惯性参考系，又名静止参考系、绝对参考系

牛顿第二运动定律:

$$\text{单位质量空气所受合外力 } \frac{d_a \bar{V}_a}{dt} = \sum_i f_i, \text{ 其中 } \frac{d_a}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{V}_a$$

地球表面（旋转参考系）:

$$\bar{V}_a = \bar{V}_3 + \bar{\Omega} \times \bar{r}$$

其中 $\bar{\Omega}$ 为地球旋转角速度, $|\bar{\Omega}|=7.292 \times 10^{-5} s^{-1}$, \bar{V}_3 为相对速度

即: 绝对速度 = 相对速度 + 因地球自转而产生的牵连速度

对于任意矢量 \bar{A} 有 $\frac{d_a \bar{A}}{dt} = \frac{d\bar{A}}{dt} + \bar{\Omega} \times \bar{A}$, (注: 令 $\bar{A} = \bar{r}$ 可推得上式)

对大气, 令 $\bar{A} = \bar{V}_a$, 有 $\frac{d_a \bar{V}_a}{dt} = \frac{d\bar{V}_3}{dt} + 2\bar{\Omega} \times \bar{V}_3 + \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \bar{r})$

其中各项依次为绝对加速度, 相对加速度, 科氏加速度, 向心加速度



$$\frac{d\vec{V}_3}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla_3 P - 2\vec{\Omega} \times \vec{V}_3 - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \vec{g}_a + \vec{F} = -\frac{1}{\rho}\nabla_3 P + \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V}_3 + \vec{F}$$

各项依次为气压梯度力、科氏力、惯性离心力、地球引力、摩擦力，其中科氏力和惯性离心力合称视重力以区别于真实力，惯性离心力和地球引力合称重力 \vec{g} ， $\vec{g}_a = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}$ ，气象上通常取 $|\vec{g}| = 9.8m \cdot s^{-1}$

2、连续方程

(质量守恒定律的数学表达式)

$$\frac{d\rho\delta\tau}{dt} = 0 \quad (\delta\tau = \delta x\delta y\delta z \text{ 有限物质体积元})$$

推得：

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla_3 \cdot \vec{V}_3 = 0 \text{ 或 } \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla_3 \cdot \rho\vec{V}_3 = 0$$

其中 $\nabla_3 \rho\vec{V}_3$ 为质量散度，速度散度 $\nabla_3 \vec{V}_3 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ ，表示密度变化由幅

散幅合引起。

3、状态方程

理想气体状态方程： $p = \rho RT$ (R 为比气体常数)

$$\text{干空气: } R = 287J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$$

$$\text{湿空气: } R_w = (1 + 0.61q)R, \text{ 其中比湿 } q = \frac{\rho_w}{\rho}$$

$$\text{引进虚温: } T_v = (1 + 0.61q)T$$

$$\text{湿空气状态方程: } p = \rho R_w T = \rho R T_v$$

4、热力学方程

$$\text{理想气体热力学第一定律: } C_v \frac{dT}{dt} = -p \frac{d\alpha}{dt} + Q$$



其中质量定容热容 $C_v = 717 J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ ，比容 $\alpha = \frac{1}{\rho}$ ，各项为：单位质量理想气体的内能变化率，理想气体压缩功率，非绝热加热率（水汽相变潜热，辐射湍流对热量的输送等）

$$\therefore p\alpha = RT, C_p = C_v + R = 1004 J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1} \text{ 质量定压热容}$$

$$\therefore C_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = Q, \text{ 用位温表示 } C_p T \frac{d \ln \theta}{dt} = Q$$

$$\text{对于干绝热过程 } Q=0, \text{ 则有 } C_p d \ln T - R d \ln p = 0$$

$$\text{定义位温 } \theta = T \left(\frac{p_{00}}{p} \right)^{\frac{R}{C_p}}, \text{ 其中 } p_{00} = 1000 hPa$$

$$\text{则有位温守恒: } C_p d \ln \theta = C_p d \ln T - R d \ln p = 0$$

$$\text{对于非绝热过程, 定义比熵 } s = C_p \ln \theta, \text{ 则热力学方程为: } \frac{ds}{dt} = \frac{Q}{T}$$

5、水汽方程

类似于连续方程（但考虑源汇）：

$$\frac{d\rho_w}{dt} + \rho_w \nabla_3 \cdot \vec{V}_3 = s \quad (\text{每单位体积中提供的水汽质量})$$

将比湿 $q = \frac{\rho_w}{\rho}$ 代入得：

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \vec{V}_3 \cdot \nabla_3 q = \frac{s}{\rho} = S_1 \quad (\text{水汽源, 单位时间内为单位质量空气提供的水汽量})$$

其中 $\vec{V}_3 \cdot \nabla_3 q$ 为水汽输送量

6、闭合方程组

基本方程组：

$$\text{运动方程 } \frac{d\vec{V}_3}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla_3 P + \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{V}_3 + \vec{F}$$

$$\text{连续方程 } \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla_3 \cdot \vec{V}_3 = 0$$



$$\text{热力学方程 } C_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = Q$$

$$\text{水汽方程 } \frac{dq}{dt} = S_1$$

$$\text{状态方程 } p = \rho RT$$

\vec{F} 、 Q 、 S_1 已知 $\rightarrow \vec{V}_3$ 、 p 、 ρ 、 T 、 q 闭合

模式大气为绝热，无摩擦，干燥大气 \vec{F} 、 Q 、 $S_1 = 0 \rightarrow \vec{V}_3$ 、 p 、 ρ 、 T 闭合

第二节 球坐标系方程组

1、球坐标系

原点 O: 地心 λ 经度 ϕ (θ) 纬度 (余纬) r 径向长度

$$u = r \cos \phi, \quad v = r \frac{d\phi}{dt}, \quad w = \frac{dr}{dt}$$

取薄层近似，即 $r = z + a$ (z 为海拔高度， $a = 6371\text{km}$)

$$z \ll a, \quad r \cong a$$

球坐标系中基本方程组取薄层近似后的形式为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho a \cos \phi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + fv + \frac{uv \tan \phi}{a} + F_\lambda \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \phi} - fu - \frac{u^2 \tan \phi}{a} + F_\phi \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{a \cos \phi \partial \lambda} + \frac{\partial v}{a \partial \phi} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{v}{a} \tan \phi \right) = 0 \\ C_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = Q \\ p = \rho RT \end{array} \right.$$

$$\text{其中, } f = 2\Omega \sin \phi, \quad \frac{d}{dt} \cong \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{a \cos \phi \partial \lambda} + v \frac{\partial}{a \partial \phi} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

虽然简化，但仍精确

方程组仍十分复杂，在极点为奇点，解析分析和数值计算难度大



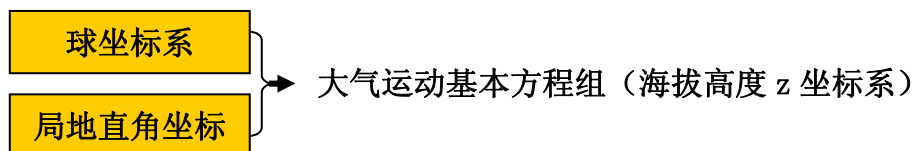
2、局地直角坐标系

球坐标系的简化形式：保持了球面坐标系的框架，忽略了球面曲率的影响

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + F_x \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + F_y \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \\ C_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = Q \\ p = \rho RT \end{cases}$$

此方程组常用于尺度不太大的问题，如台风、积云数字模拟，但由于这两问题旋转和轴对称性较强，所以常常将它们转换到组坐标系来设计模式

第三节 铅直坐标变换



z 坐标系便于显示大气运动演变图象，但在数值天气预报中有时并不方便。

坐标变换： P 坐标系， θ 坐标系， δ 坐标系
变换推导见 P12~15

1、 z 坐标系

(见前节球坐标系和局地直角坐标系)

边界条件：上边界： $z \rightarrow \infty, \rho w = 0$

下边界：平坦地： $z = 0, w = 0$
起伏地： $z = z_s, w_s = \vec{V}_s \cdot \nabla z_s$



2、P 坐标系

只有在静力平衡时才使用 $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{V}_2}{dt} = -g\nabla_p z - f\vec{k} \times \vec{V}_2 + \vec{F} \\ \nabla_p \cdot \vec{V}_2 + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \\ C_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \omega = \frac{dQ}{dt} + F_T \\ \frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g} \\ p = \rho RT \\ \frac{dq}{dt} = S_1 = c + F_q \end{array} \right.$$

其中 $\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_p + \vec{V} \cdot \nabla_p + \omega \frac{\partial}{\partial p}$

边界条件： 上边界： $p \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0$

下边界： $p = p_s, \omega_s = \frac{\partial p_s}{\partial t} + \vec{V}_s \cdot \nabla p_s$

平坦地： $\omega_s = 0$

起伏地： $\omega_s \cong \vec{V}_s \cdot \nabla p_s \cong w_s \frac{\partial p_s}{\partial z} \cong -\rho_s g w_s$

3、 δ 坐标系

又名地形坐标系

令 $\delta = \frac{p - p_T}{p_s - p_T}$ ，取 $p_T = 0$ ，则 $\delta = \frac{p}{p_s}$



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{V}}{dt} = -(g\nabla_{\delta} z + RT \ln p_s) - f\bar{k} \times \bar{V} + \bar{F} \\ \frac{\partial p_s}{\partial t} + \nabla_{\delta} \cdot (p_s \bar{V}) + \frac{\partial}{\partial \delta} (p_s \dot{\delta}) = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \delta} = -\frac{RT}{\delta g} \\ \frac{dT}{dt} = \frac{RT}{C_p p} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{C_p} \frac{dQ}{dt} + F_T \\ \frac{dq}{dt} = c + F_q \\ p = \rho RT \end{array} \right.$$

其中

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla_{\delta} + \dot{\delta} \frac{\partial}{\partial \delta}$$

$$\dot{\delta} = \frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{p_s} (\omega - \delta \frac{dp_s}{dt})$$

边界条件：上边界 $\delta \rightarrow 0, \dot{\delta} \rightarrow 0$,

下边界 $\delta_s \rightarrow 1, \dot{\delta} \rightarrow 0$

4、 θ 坐标系

(等熵坐标系, 略, 见 P21~22)

5、混合坐标系

P- δ 混合 (上层 P 坐标, 下层 δ 坐标)

$$\delta = \frac{p - p_m}{p_s - p_m} \quad \text{或} \quad \delta = \frac{p - p_m}{p_s - p_m} + \delta_m$$

$$\delta = \frac{p - p_m}{p_s - p_m} + \delta_m$$

要使 p_m 处从上面算得 p_m 的 w 值与从下面算上去的 w 值相等, 保持大气运动连续性。

边界条件: $p = p_T = 0, w_T = 0$



$$p = p_m, w = w_m \quad \delta_m = 0, \dot{\delta}_m = 0$$

$$p = p_s \quad \delta = \delta_s = 1, \dot{\delta}_s = 0$$

6、 δ 、 p 、 z 坐标系的比较

δ 坐标系:

优点: 1、地形处理方便, 在地形面上 $\dot{\delta}_o = 0$

- 2、连续方程变成地面气压倾向方程
- 3、可以做谱展开

缺点: 1、气压梯度变成两大项之小差, 不易算准, 设计模式时要小心
2、只能描述静力平衡运动

z 坐标系:

- 优点: 1、是严格的正交坐标系
2、下边界不随时间变化
3、等高面水平面
4、可描述准静力平衡和非静力平衡运动

缺点: 1、与山地相截, 计算面出现空洞, 在其上计算梯度, 选取边界条件困难
2、不能做谱展开

p 坐标系:

- 优点: 1、等压面接近水平
2、气压梯度力形式简单
3、连续方程形式简单, 便于计算
4、等压面上的 T 、 q 等量是观测量, 直接得到, 便于计算 (降水等)

缺点: 1、下边界不是坐标面, p 随时空变化, 地形起伏区等压面也与地形相截形成空洞, 且空洞范围随时间变化, 使山脉边缘的格点有时会增减, 故计算和编程困难
2、不能做谱展开
3、不能描述非静力平衡运动



第四节 地图投影坐标系

1、为何采用地图投影坐标系

- 1、天气工作需要（天气图的应用）
- 2、经纬度网格由于经线向极地汇集，使差分计算不便，甚至引起误差（如散度计算）

2、常用的地图投影

主要是正形投影（即投影后微元的形状不变，两条微分线段所夹的角度投影不变，投影前描写方程的正交曲线坐标投影后不变）

如果原来地球上的距离为 dx_e, dy_e ，投影到地图上的距离为 dx, dy 的话，则有：

$$\begin{cases} dx = m dx_e \\ dy = m dy_e \end{cases}$$

m 称为地图投影坐标放大系数（或地图放大系数）

① 极射赤面投影（极射赤平投影）

示意图见 P27 fig1.3c

$$\begin{cases} x = ma \cos \varphi \cos \lambda \\ y = ma \cos \varphi \sin \lambda \end{cases}$$

$$m = \frac{1 + \sin \varphi_0}{1 + |\sin \varphi|}$$

常用于北半球图，南半球图

② Lambert 投影（等角圆锥投影）

示意图见 P27 fig1.3b

常用于中纬度

$$\begin{cases} x = A \tan l \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \cos l \lambda \\ y = A \tan l \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \sin l \lambda \end{cases}$$

$$m = \frac{lA \tan \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)}{a \cos \varphi} = \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} \left(\frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\theta_0}{2}} \right)^l$$



$$\theta_0 = 90^\circ - \varphi_1 \text{ 或 } 90^\circ - \varphi_2, \quad \varphi_1 \text{ 可以等于 } \varphi_2 = 45^\circ,$$

当 $\varphi_1 = 30^\circ, \varphi_2 = 60^\circ$ 时, $l = 0.7156$ 单位经度圆锥面所张的平面角 (弧度)

$$A = \frac{D_0}{\tan^l \frac{\theta_0}{2}}, \quad D_0 \text{ 为标准纬度 } \varphi_0 (\varphi_1 \text{ 或 } \varphi_2) \text{ 在图面上的径向距离 (即极点到 } 30^\circ \varphi$$

或 $60^\circ \varphi$ 的距离) $A \sim 11423.5 \text{ km}$

③ 麦卡托 Mercator 投影 (一种圆柱投影)

示意图见 P27 fig1.3a, fig1.5

常用于低纬天气如季风、台风等的研究

地图面为圆柱面与地球赤道相切, 光源放在地心。

地图面展开后为一矩形, 经纬度成矩形分布

$$\begin{cases} x = a\lambda \\ y = a \ln \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \end{cases}$$

$$\text{放大倍速 } m = \frac{1}{\cos \varphi}$$

3、地图投影坐标系中的大气运动方程组

(1) 梯度、散度和涡度的表达式

$$\nabla_3 \phi = m \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + m \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}$$

$$\nabla_3 \vec{V} = m^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{m} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{m} \right) \right] + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\nabla_3 \times \vec{V} = m^2 \begin{vmatrix} \frac{1}{m} \vec{i} & \frac{1}{m} \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{u}{m} & \frac{v}{m} & w \end{vmatrix}$$

$$\nabla_3^2 = m^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

其中



$$u = \frac{1}{m} \frac{dx}{dt}, v = \frac{1}{m} \frac{dy}{dt}, w = \frac{dz}{dt}$$

(2) 方程组

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\frac{m}{\rho} \frac{dp}{dx} + v[f + m^2(v \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{m} - u \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{m})] + F_x \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{m}{\rho} \frac{dp}{dy} - u[f + m^2(v \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{m} - u \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{m})] + F_y \\ \frac{dw}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} - g + F_z \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + m^2[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\rho u}{m}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\rho v}{m})] + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \\ \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{C_p \rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{dQ}{dt} + F_T \end{cases}$$

$$\text{其中 } \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + mu \frac{\partial}{\partial x} + mv \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

由于极射赤面投影和麦卡托投影的 m 比较简单，可代入运动方程的 [] 中，得到：

极射赤面投影的运动方程：

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{m}{\rho} \frac{dp}{dx} + v[f - \frac{1}{1 + \sin \varphi_0} \frac{xv - yu}{a^2}] + F_x \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{m}{\rho} \frac{dp}{dy} - u[f - \frac{1}{1 + \sin \varphi_0} \frac{xv - yu}{a^2}] + F_y \end{aligned}$$

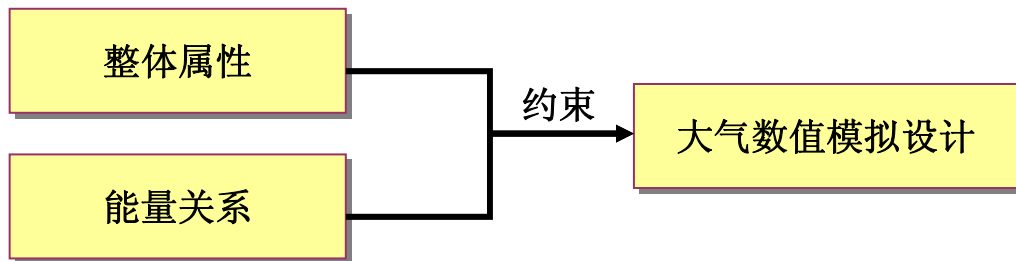
麦卡托投影的第一、二运动方程：

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{m}{\rho} \frac{dp}{dx} + v(2\Omega + \frac{u}{a \cos \varphi}) \sin \varphi + F_x \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{m}{\rho} \frac{dp}{dy} - u(2\Omega + \frac{u}{a \cos \varphi}) \sin \varphi + F_y \end{aligned}$$

F_x 、 F_y 等用地图投影坐标系中的表达式



第二章 大气运动的整体性质与能量约束



设计数值模式，出于描述物理过程的需要和实际计算的可能，难免要对完全的大气动力学和热力学**方程**进行某些**简化**，并在**求解**时采取某些**近似**方法。如此做法可能使得模式大气与实际大气在物理性质上不一致，使大气原有的**能量关系遭到破坏**，造成虚假的能量的源和汇，从而给计算结果带来严重误差。

研究大气的整体性质和能量关系，可以更好地认识模式大气的特点，考察它是否合理地描述了大气运动的性质。一个与大气原有的物理性质保持协调一致的数值模式，有利于减少误差和增加计算的稳定性。

第一节 大尺度大气运动的特性

1、准地转特性

地转关系：

$$\left\{ \begin{array}{l} fv_g = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ fu_g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \end{array} \right. \quad (\text{Z 坐标系}) \quad \text{或} \quad \left\{ \begin{array}{l} fv_g = g \frac{\partial z}{\partial x} \\ fu_g = -g \frac{\partial z}{\partial y} \end{array} \right. \quad (\text{P 坐标系, } z \text{ 为等压面高度})$$

在自由大气中， F_x, F_y 等可略，局地直角坐标系下的运动方程可写成：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = fv - fv_g \\ \frac{dv}{dt} = -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = -fu + fu_g \end{array} \right.$$

说明 $\frac{du}{dt}$ 和 $\frac{dv}{dt}$ 是由于**风场** u 、 v 和**气压场不满足地转平衡而造成的**。 fv 与 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$



第二章 大气运动的整体性质与能量约束

(或 fu 与 $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}$) 之差值称为**地转偏差**。

在大尺度运动中地转偏差较小, 一般 $\frac{du}{dt}$ 比 fv 和 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$ 小一个量级。因此说大

尺度大气运动是**准地转平衡**的。而且大气有自己调节的能力: 当出现地转偏差时, 气压场和风场会进行调整, 而达到一个新的平衡状态。这就是**地转适应过程**。



准地转性的应用

大尺度运动的准地转性对我们讨论问题提供了很大的方便, 在不少情况下,

我们可以用**地转风代替实际风** (如地转涡度, $\zeta_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{g}{f} \nabla^2 z$ 代替实际

涡度; 初值处理时, 用地转风近似求初始风场)。但要注意, 不能用**地转风散度代替实际风散度**。因为实际散度在天气变化中非常重要, 但地转风散度几乎为 0, 只有地球曲率项:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} &= -\frac{g}{f} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{g}{f} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + g \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{f} \\ &= -\frac{g}{f^2} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{v_g}{f} \cdot 2\Omega \cos \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &= -\frac{v_g}{f} \cdot 2\Omega \cos \varphi \cdot \frac{1}{a} = -\frac{v_g}{a} \operatorname{ctg} \varphi \end{aligned}$$

在中纬地区, 地转风散度约为 $1.6 \times 10^{-7}/s$

准地转: 很接近地转, 但又不完全是地转。有些量可以用地转公式来算, 而有些量 (如散度) 就不能, 需通过其他途径来计算。

2、准静力平衡

从第三运动方程, 在不考虑摩擦力对垂直运动影响时:

$$\frac{dw}{dt} + g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

如果把气压场看成有一个静态的气压 \bar{P} 和一个扰动的气压 P' , 即 $P = \bar{P} + P'$ 。则



有：

$$\frac{dw}{dt} + g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial z} = 0$$

根据实测资料分析，第 2、3 项最大，且近于平衡，即： $g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = 0$ （在大

气静止时，垂直气压梯度力与向下的重力平衡）。也就是说 $\frac{dw}{dt} \sim \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial z}$ （气压场

的扰动引起垂直运动。对于大尺度，这个量很小，因此把它略去）。于是，

$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$ 。这就是静力平衡方程。

注意

1. 只有在静力平衡情况下，才可以采用 P 坐标和 σ 坐标；
2. 做静力平衡近似，并不等于认为没有垂直运动或垂直速度不变。只是它在第三运动方程中不出现，w 可以通过连续方程或热通量方程把它求出来。所以叫着准静力平衡。

3、准水平特征

大尺度运动中空气速度的垂直分量与水平分量之比非常小，空气运动差不多是平行于地面的。

例如：一个典型的水平尺度 $L \sim 10^3$ km 的天气系统，其垂直尺度 H 通常受到对流层厚度 D 的限制，即 $H \leq D$ ，而 $D \sim 10$ km 量级。

空气块穿过这个典型天气系统，其典型水平速度和垂直速度分别为 U 和 W，气块穿过水平距离 L 所需时间为： $T \approx L/U$ 。同时气块还移动了垂直距离 H，所以 $T \approx H/W \leq D/W$ 。于是有 $L/U \leq D/W$ ，则 $W/U \leq D/L \sim 10^{-2}$ 。

W/U 是空气运动轨迹线的斜率，可见空气运动基本上是水平的。

注意

空气的垂直运动虽小，但它很重要。只有 W 不等于 0，才会发生各种重要的天气现象。因此，我们说大尺度大气运动接近水平，但又不完全水平，所以说是准水平，它与静力平衡是一致的。



4、准无辐散

大尺度运动的水平散度很小，约为 $10^{-6}/s$ ，比涡度小一个量级以上。

对水平运动方程进行散度运算可得**散度方程**：

$$\frac{dD}{dt} + D^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial p}\right) - 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} u - f\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \nabla^2 \Phi = 0$$

式中： $D = \nabla_2 \cdot \vec{V}$ ——水平散度

在大尺度运动中，散度方程中前三项比后三项小两个量级以上，所以基本不可能从散度方程来求散度及其变化。若在方程中只保留最大的项和比它们小一个量级的项，可得到**平衡方程**：

$$2\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} u + f\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \nabla^2 \Phi = 0$$

平衡方程中再也**不出现带有散度和垂直速度**的项，因此平衡方程表明：大尺度运动**不但是准水平的，而且是准无辐散**的。用平衡方程描述的运动称为准水平无辐散运动。平衡方程是散度方程的一级近似，它的精度比地转关系高一个量级，因此用平衡方程描述的准水平无辐散运动比准地转运动更接近实际大气的运动。特别是在低纬地区，地转关系不太好，平衡方程更为常用；在数值预报中有时用平衡方程来进行初值处理。

第二节 小尺度运动的特性(包率内斯克 Boussinesq 近似)

1、特性

准地转、准水平、准无辐散、准静力平衡都不满足

2、Boussinesq 近似

对于小尺度运动，特别是热对流运动（如积云问题），气块受热产生**密度扰动**。此密度扰动即使微小，对垂直运动也会有大的影响，因为它可以产生较大的浮力，因此很重要。

表示方法：

$$\text{设} \begin{cases} P = \bar{P}(z) + P' \\ \rho = \bar{\rho}(z) + \rho' \end{cases}$$



(1) 水平运动方程中可以略去密度扰动的影响：

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = +fv - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P}{\partial x} + F_x \\ \frac{dv}{dt} = -fu - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial P}{\partial y} + F_y \end{cases}$$

(2) 在垂直方向上， \bar{P} 和 $\bar{\rho}$ 满足静力平衡： $\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = -\bar{\rho}g$ 。但 $\frac{dw}{dt}$ 不可略，第三

运动方程变为：

$$\bar{\rho} \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial P'}{\partial z} - \rho'g \quad \sim \quad \frac{dw}{dt} \text{ 是由于扰动 } P' \text{ 和 } \rho' \text{ 引起}$$

(3) 连续方程不可简化，保留可压的形式。

这种近似在研究对流问题（如积云、雷暴、龙卷、局地暴雨等问题）时常用。

第三节 大气中的几个守恒量

大气中有几个守恒量，在设计模式和进行数值模拟过程中需要注意保持它们的守恒。

1、总质量守恒

由连续方程可推得 $\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_s}^{\infty} \rho dz + \nabla \cdot \int_{z_s}^{\infty} \rho V dz = 0$ （具体推导见 p.35~p.36），其垂直边界条件为：

$$\begin{cases} w_s = V_s \cdot \nabla z_s & z = z_s \\ \rho w \rightarrow 0 & z \rightarrow \infty \end{cases}$$

对于全球大气，速度矢量在边界外法线方向上分量为 0，于是对上式全球大气积分，有：

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_s}^{\infty} \iint_A \rho dA dz = 0$$

这表明，**全球大气的总质量是守恒的**。这与大气下边界地形的起伏状态无关。

2、绝热大气位温与位温平方守恒

有绝热大气的热力学方程（ $\frac{d\theta}{dt} = 0$ ）和连续方程可得：



第二章 大气运动的整体性质与能量约束

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\theta) + \nabla_3 \cdot (\rho\theta V_3) = 0$$

对上式进行全球大气积分，利用垂直边界条件，可得：

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_s}^{\infty} \iint_A \rho\theta dAdz = 0$$

这表明，**在绝热条件下全球大气的位温是守恒的**。同样，通过 $\frac{d\theta^2}{dt} = 0$ 可以

推得： $\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_s}^{\infty} \iint_A \rho\theta^2 dAdz = 0$ ，以此类推。**对任意幂次的以 θ 为函数的代数多项式，**

其全球积分也是守恒的。

3、绝热无摩擦大气总能量守恒

通过运动方程、连续方程和热力学方程可得总能量（动能、位能和内能的总和）方程的通量形式（具体推导见 p.36~p.38）：

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(K_3 + c_v T + \Phi) + \nabla_3 \cdot \rho(K_3 + c_v T + \Phi)V_3 + \nabla_3 \cdot (\rho V_3) = -pV_3 \cdot F + \rho Q$$

对上式进行全球大气积分，利用垂直边界条件，并设 T 、 V_3 有界，可得：

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_s}^{\infty} \iint_A \rho(K_3 + c_v T + \Phi) dAdz = \int_{z_s}^{\infty} \iint_A \rho(V_3 \cdot F + Q) dAdz$$

上式说明，**全球大气的动能、内能和位能之和的变化是由于非绝热加热过程和摩擦消耗所造成的，在绝热无摩擦条件下，全球大气总能量是守恒的。**

4、绝热无摩擦大气位涡和位涡拟能守恒

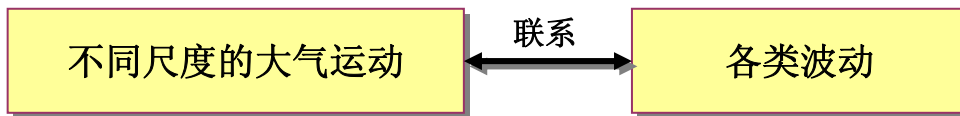
可推得 $\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_s}^{\infty} \iint_A (\zeta + f) \frac{\partial \theta}{\partial z} dAdz = 0$ （具体推导见 p.38）

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{z_s}^{\infty} \iint_A [(\zeta + f) \frac{\partial \theta}{\partial z}]^2 dAdz = 0$$

上式表明，**在绝热无摩擦条件下大气的位涡和位涡拟能（位势涡度的平方）是守恒的。**



第三章 大气中的波动



大气动力学方程组描写了大气中的各类波动，包含了多种尺度运动，其物理因子很复杂。主要有：**声波**、**重力波**、**惯性波**、**涡旋慢波（长波、罗斯贝波）**和**超长波**。其中，重力波又分为**重力外波**和**重力内波**，重力波与惯性波相结合，成为**重力惯性波**。

声波——由大气的可压缩性产生；

重力波——由于地球重力场产生；

惯性波——地球旋转效应产生；

Rossby 波——考虑到地球的球面效应，在科氏参数的变化条件下产生；

声波、重力外波都是快波，它们对天气变化特别是大尺度天气变化作用不大（重力内波与雷暴、龙卷有关），但对数值计算有影响，容易引起计算不稳定，所以常常要把它们滤掉。

第一节 大气中的混合波解

1、大气波动基本方程

采用小扰动法，对绝热无摩擦的大气动力学基本方程组（p.51）进行线性化，并假设基本流场为静止的（p.52 3.1），可推得描写**大气波动的基本方程**（具体推导见 p.52~p.54）：

$$\left\{ \left(\lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 + \beta \frac{\partial}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\lambda_1 \frac{N^2}{g} + \frac{g}{c_s^2} \right) \frac{\partial}{\partial z} - \lambda_1 \lambda_2 \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \right\} V = 0$$

其中 $c_s = \sqrt{\kappa RT_0}$ 为绝热声速， $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ ， $N^2 = -g \frac{\partial \ln \theta_0}{\partial z}$ ， N 为浮力振荡频率，即

Brunt-Vaisala 频率。 λ_1 和 λ_2 为示踪系数，可取 1 或者 0。 $\lambda_1 = 0$ 表示取静力平衡

近似， $\lambda_2 = 0$ 表示取滞弹性近似。



2、波解分析

设波动解代入大气波动基本方程得到 ω 的 5 次方程，即**频率方程**：

$$\lambda_1 \lambda_2 \omega^5 - \omega_A^2 \omega^3 + \lambda_1 \omega_s^2 \omega_R \omega^2 + \omega_B^4 \omega - N^2 \omega_s^2 \omega_R = 0$$

（其中各量参见 p.54 中的 3.23）。

分别可得到对于高频波的解 $\omega_{1,2}$ （式 3.26 声波频率）、解 $\omega_{3,4}$ （式 3.27 惯性重力内波频率），以及对于低频波的解 ω_5 （式 3.28 Rossby 波频率）。

因此，一般大气系统的方程组中包含声波、惯性重力波和 Rossby 波。

第二节 各种波动特征

1、声波

声波是由于大气的可压缩性引起的。当空气受声源扰动压缩时，会引起密度和气压扰动的局地变化，并使四周空气产生膨胀压缩的交替变化，这种过程的传播即形成声波。声波是一种纵波。

滤波：

- (1) 假定大气不可压（或三维无辐散， $\lambda_2 = 0$ ）；
- (2) 假定静力平衡（ $\lambda_1 = 0$ ），滤垂直方向声波（垂直方向两力平衡，没有外力引起空气上下压缩）

2、重力内波

重力波是在重力作用下引起的波动，它是一种横波。

在大气内部密度不连续面或风不连续面（如锋面）形成，或在稳定层结下气块受扰动在垂直方向上振荡形成的波动，都与重力有关。

3、惯性波

大气中的扰动在科氏力作用下会产生惯性，这种振荡在空间的传播上就形成惯性波，它是一种横波。



4、惯性重力内波

在地球大气中，**地球旋转**和**大气层结**的共同作用，使得惯性波与重力内波混合在一起，形成惯性重力内波。

5、Rossby 波

从天气图上可以看到，在北半球中高纬上空有绕极的西风带，西风带中约有3~5个波，这些波动具有重要的天气和气候意义。Rossby 首先从理论上解释了这种波动的成因，指出决定此波产生的重要因子是**地转参数 f 随纬度的变化**。这种波动被称为 Rossby 波，又称为**大气长波**或**行星波**。



第四章 数值计算法

◆ 差分法 (Finite Difference Method)

数值天气预报和数值模拟问题主要解偏微分方程的问题。它的解和它所要求的初值，都不是自变量的连续函数，直接用它们做预报会遇到困难。

原因是：

- 1) 观测站的分布是离散的，不可能给出连续的初值。
- 2) 方程组为复杂的非线性方程组，目前还未有一个普适的解析求解方法。因此，为便于求解方程，首先要将**方程离散化**。

离散化方法有三：(1) 差分法；(2) 谱方法；(3) 有限元法，即把偏微分方程变成相应的泛函极小问题来求解。

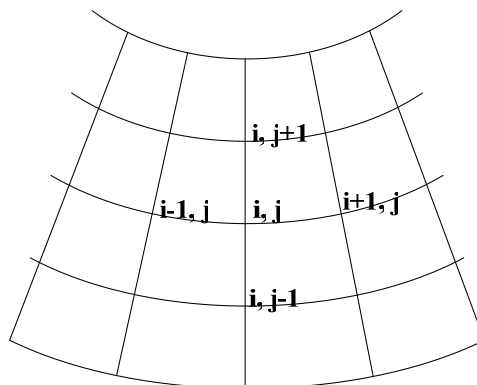
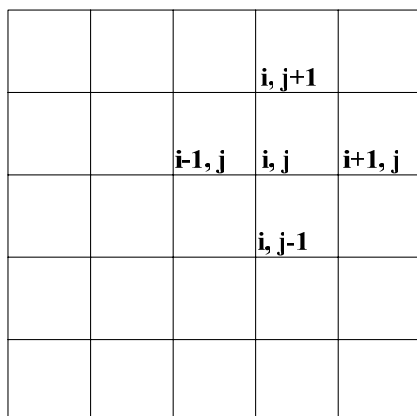
目前，差分法最成熟，用的最多。谱方法也已广泛应用。有限元法用得较少。差分法有如下优点：

- 1) 用差分代替微分，比较直观
- 2) 在球面或地图面上取网格进行差分运算，比较容易
- 3) 差分法既可用于全球问题，也可用于局地问题。对垂直坐标系没有特别的要求。

第一节 水平空间差分网格及其差分计算格式

(The Grid Point Method & Finite Difference Schemes)

在水平面上，通常把计算区域取成矩形或扇形（按地球经纬度）。另外还有三角形或菱形，但编程复杂，少用。





如图, 令 $x = i\Delta x$ $i = 1, 2, \dots, M$ 划分成网格
 $y = j\Delta y$ $j = 1, 2, \dots, N$

一般如取矩形计算区, 则取 $\Delta x = \Delta y = d$ 一格距 方形网格

如取经纬度计算区, 则 $\Delta y = d, \Delta x = d \cdot \cos \varphi$ 经纬度网格

由此, 每个位置 x, y 都可用 i, j 来表示。 i, j 为整数的点称为**网格点**, 计算区内的点又叫**内点**, 边界上的点叫**边界点**。

函数 $f(x, y)$ 在 i, j 点上的值用 $f_{i,j}$ 来表示。 (f 代表 $u, v, w, p, T \dots$)

水平空间差分有三种表示方法 (Finite Difference Schemes):

X 方向为:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} \approx \frac{1}{\Delta x} (f_{i+1,j} - f_{i,j}) \rightarrow \frac{1}{d} \nabla_{x+} f_{i,j} \quad \text{向前差 (Forward Difference)}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} \approx \frac{1}{\Delta x} (f_{i,j} - f_{i-1,j}) \rightarrow \frac{1}{d} \nabla_{x-} f_{i,j} \quad \text{向后差 (Backward Difference)}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} \approx \frac{1}{2\Delta x} (f_{i+1,j} - f_{i-1,j}) \rightarrow \frac{1}{2d} \nabla_x f_{i,j} \quad \text{中央差 (Centered Difference)}$$

同理, 在 Y 方向为:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j} \approx \frac{1}{\Delta y} (f_{i,j+1} - f_{i,j}) \rightarrow \frac{1}{d} \nabla_{y+} f_{i,j} \quad \text{向前差 (Forward Difference)}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j} \approx \frac{1}{\Delta y} (f_{i,j} - f_{i,j-1}) \rightarrow \frac{1}{d} \nabla_{y-} f_{i,j} \quad \text{向后差 (Backward Difference)}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j} \approx \frac{1}{2\Delta y} (f_{i,j+1} - f_{i,j-1}) \rightarrow \frac{1}{2d} \nabla_y f_{i,j} \quad \text{中央差 (Centered Difference)}$$

用差商来代替微商必然会带来一定的误差, 称为**截断误差 (Truncation Error)**, 它反应了差商的精度。之所以会产生截断误差, 是由于我们在构造差分格式时, 从函数的 Taylor 展开式中所取的次数有限。通常在所研究的气象问题中, 实际使用的网格距 Δx 与方程所描述运动的特征尺度相比往往是一个很小的量,

因此, 对于函数 $f(x, t)$ 可展开成 Taylor 级数:



$$f(x + \Delta x, t) = f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (1)$$

$$f(x - \Delta x, t) = f(x, t) - \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \quad (2)$$

由(1)、(2)两式可得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x, t) - f(x, t)}{\Delta x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\Delta x}{2!} - \dots = \frac{f_{i+1}^\tau - f_i^\tau}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x, t) - f(x - \Delta x, t)}{\Delta x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\Delta x}{2!} - \dots = \frac{f_i^\tau - f_{i-1}^\tau}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

这就是向前差和向后差格式，若 R 为它们的截断误差，由上两式可见，其截断误差为 Δx 的量级。

将(1)和(2)相减，可得：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x, t) - f(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \frac{(\Delta x)^2}{3!} - \dots = \frac{f_{i+1}^\tau - f_{i-1}^\tau}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2)$$

这就是中央差格式，其截断误差 R 的量级为 $(\Delta x)^2$

将(1)、(2)相加，可得 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 的中央差格式为：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1}^\tau - 2f_i^\tau + f_{i-1}^\tau}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2)$$

其截断误差也是 $(\Delta x)^2$ 的量级

所以**中央差比向前差和向后差精确些**，因此一般水平差分通常采用中央差格式。

第二节 时间差分

(Finite Time Difference)

对于 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 也用差商来表示，如取三个时间层 $\tau-1, \tau, \tau+1$ ，则有：



$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|^{\tau} \approx \frac{1}{\Delta t} (f^{\tau+1} - f^{\tau}) \quad \text{时间向前差}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|^{\tau} \approx \frac{1}{\Delta t} (f^{\tau} - f^{\tau-1}) \quad \text{时间后差}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|^{\tau} \approx \frac{1}{2\Delta t} (f^{\tau+1} - f^{\tau-1}) \quad \text{时间中央差}$$

这三种表示法截断误差也不一样，分别为 $O(\Delta t)$, $O(\Delta t)$ 和 $O((\Delta t)^2)$ ，因此中央差的精度高些。

第三节 各种常用的数值时间积分格式

对于大气动力学方程组，可写成：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \dots$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \dots$$

左边随时间变化，右边随空间变化，对于已知的空间分布，可以先用空间差分把等式右边的项算出来，然后等式左边写成上面的时间差分形式，就可计算另一时刻的要素值。如上面 u 的方程，如果等式右边算出的值记做 $F(x, y, z, t)$ ，则第一运动方程可简写为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(x, y, z, t)$$

计算 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 有三种差分方法，计算 F 也有三种空间差分方法，把它们分别组合在一起，有九种解方程的方法，但因时间后差对我们做预报没什么意义，所以一般不用，于是就有以下 6 种：

时间向前差，空间向前差	*时间向前差，空间向后差	*时间向前差，
空间中央差		
时间中央差，空间向前差	时间中央差，空间向后差	*时间中央差，
空间中央差		

其中又以*的三个用得较多，用时间差分格式和空间差分格式分别组成的解偏微



分方程的格式，叫做**时间积分格式**。时间积分格式又分**显式**和**隐式**两种，**显式格式是空间差分用当时时刻的资料（要素值）来算，而隐式格式的空间差分部分用下一时刻（预报时刻）的要素值来算。**

1、取两个时间层的情况

(Two-Level-Schemes): $\tau, \tau+1$

对于时间步长为 Δt ， τ 和 $\tau+1$ 记积分步数，则

$$u^{\tau+1} = u^{\tau} + \int_{\tau\Delta t}^{(\tau+1)\Delta t} F(x, y, z, t) dt = u^{\tau} + \Delta t(\alpha F^{\tau} + \beta F^{\tau+1})$$

这里 $\alpha + \beta = 1$

A) 向前差格式：（显式）——用当前时刻值算 F ，再算下一时刻时间值。

即取 $\alpha = 1, \beta = 0$ ，则 $u^{\tau+1} = u^{\tau} + F^{\tau} \Delta t$ ，截断误差为： $O(\Delta t)$

向前差格式又可分两种，一种的 F^{τ} 用向后差，另一种 F^{τ} 用中央差，分别叫做迎风格式和欧拉（前差）格式。如对前面的运动方程，其差分格式分别为：

1、**迎风格式：（时间前差，空间后差）**

$$u_{i,j}^{\tau+1} = u_{i,j}^{\tau} - \frac{\Delta t u_{i,j}^{\tau}}{d} (u_{i,j}^{\tau} - u_{i-1,j}^{\tau}) - \frac{\Delta t v_{i,j}^{\tau}}{d} (u_{i,j}^{\tau} - u_{i,j-1}^{\tau}) - \dots$$

这表明 u 的变化只受到其上游 u 值的影响，所以叫迎风格式。

2、**欧拉向前差格式：（时间前差，空间中央差，但用后一时刻值算）**

$$u_{i,j}^{\tau+1} = u_{i,j}^{\tau} - \frac{\Delta t u_{i,j}^{\tau}}{2d} (u_{i+1,j}^{\tau} - u_{i-1,j}^{\tau}) - \frac{\Delta t v_{i,j}^{\tau}}{2d} (u_{i,j+1}^{\tau} - u_{i,j-1}^{\tau}) - \dots$$

**B) 向后差格式：（隐式）时间向前差，空间中央差，但用后一时刻值算**

取 $\alpha = 0, \beta = 1$ ，即 $u^{\tau+1} = u^\tau + F^{\tau+1} \Delta t$ 截断误差为 $O(\Delta t)$

由于在 τ 时刻， $F^{\tau+1}$ 步还不能直接算，因为 $u^{\tau+1}, v^{\tau+1}, p^{\tau+1}$ 等值还没有，只能先把差分式子写出，如：

$$u_{i,j}^{\tau+1} = u_{i,j}^\tau - \frac{\Delta t u_{i,j}^{\tau+1}}{2d} (u_{i+1,j}^{\tau+1} - u_{i-1,j}^{\tau+1}) - \dots$$

然后把 $u^{\tau+1}$ 移到等式左边，用迭代法来算。因此麻烦，但以后要讲，它比向前差格式稳定，所以有时选用它。

C) 梯形格式：（隐式）时间向前差，空间中央差（但用当时值和下一步值各 1/2 来算）

取 $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ，即 $u^{\tau+1} = u^\tau + \frac{\Delta t}{2} (F^\tau + F^{\tau+1})$ ，截断误差： $O((\Delta t)^2)$

此格式计算比较麻烦，但精确度较高

D) 欧拉后差格式：(Matsuno)格式

是两步显式格式

考虑到隐式向后差格式稳定性好，但计算不方便，故设计此格式。

第一步：先用向前差格式求出一个带“*”的量

$$u_{i,j}^* = u_{i,j}^\tau - \frac{\Delta t u_{i,j}^\tau}{2d} (u_{i+1,j}^\tau - u_{i-1,j}^\tau) - \frac{\Delta t v_{i,j}^\tau}{2d} (u_{i,j+1}^\tau - u_{i,j-1}^\tau) - \dots$$

第二步：将带“*”的量用于求空间差分，求出下一步 $u^{\tau+1}$

$$u_{i,j}^{\tau+1} = u_{i,j}^\tau - \frac{\Delta t u_{i,j}^*}{2d} (u_{i+1,j}^* - u_{i-1,j}^*) - \frac{\Delta t v_{i,j}^*}{2d} (u_{i,j+1}^* - u_{i,j-1}^*) - \dots$$

写得简单点：

$$u^* = u^\tau + \Delta t F^\tau \qquad F^* = F[u^*, \Delta t(\tau+1)]$$



$$u^{\tau+1} = u^{\tau} + \Delta t F^*$$

这是个常用格式。

E) 欧拉——梯形格式（又叫 Heun's 格式）

$$u^* = u^{\tau} + \Delta t F^{\tau}$$

$$u^{\tau+1} = u^{\tau} + \frac{\Delta t}{2}(F^{\tau} + F^*)$$

2、取三个时间层的格式

(Three-Level-Schemes):

取 $\tau+1, \tau, \tau-1$ 步为例，对于 $\frac{\partial u}{\partial t} = F(x, y, z, t)$ 的积分：

$$u^{\tau+1} = u^{\tau-1} + \int_{(\tau-1)\Delta t}^{(\tau+1)\Delta t} F(x, y, z, t) dt = u^{\tau-1} + \Delta t(\alpha F^{\tau-1} + \beta F^{\tau} + \gamma F^{\tau+1})$$

其中 $\alpha + \beta + \gamma = 2$ ，截断误差为 $O((\Delta t)^2)$

有以下三种：

A) 中央差格式（又叫蛙跳格式），时间中央差，空间中央差。

是个显式格式。取 $\alpha = 0, \gamma = 0, \beta = 2$ ，用当前时刻要素值算 F

$$u^{\tau+1} = u^{\tau-1} + 2\Delta t F^{\tau}$$

例，第 1 运动方程：

$$u_{i,j}^{\tau+1} = u_{i,j}^{\tau-1} - \frac{\Delta t u_{i,j}^{\tau}}{d}(u_{i+1,j}^{\tau} - u_{i-1,j}^{\tau}) - \frac{\Delta t v_{i,j}^{\tau}}{d}(u_{i,j+1}^{\tau} - u_{i,j-1}^{\tau}) - \dots$$

**B) Adams 后差格式 (显式)**

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{3}{2}, \gamma = 0$$

$$u^{\tau+1} = u^{\tau-1} + \frac{\Delta t}{2} (3F^{\tau} + F^{\tau-1})$$

C) Milue—Simpson 格式 (隐式)

$$u^{\tau+1} = u^{\tau-1} + \frac{\Delta t}{2} (F^{\tau-1} + 2F^{\tau} + F^{\tau+1})$$

其中蛙跳格式用得最多。

第四节 差分近似的相容性、精确性、收敛性和稳定性

当我们把大气动力学方程组中的微分运算用差分近似来代替时, 需要考虑差分近似的相容性、精确性、收敛性和稳定性:

1、差分近似的相容性

差分近似的相容性即是差分系统在某种程度上是否近似于微分系统, 或者说它们是否相协调。若是相容的话, 则在小的时间步长和空间步长趋于零的极限条件下, 差分系统应等同于微分系统。

在上述讨论中, 若取时间向前差, 空间向前或向后差格式, 则其截断误差的量级为:

$$R = O(\Delta t) + O(\Delta x)$$

在时间向前差、空间中央差的格式中截断误差为:

$$R = O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$$

在蛙跳格式中:

$$R = O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2)$$

当 Δt 和 Δx 都 $\rightarrow 0$ 时, 这几个差分方程的截断误差 R 都趋近于零, 所以对于我们讨论的微分方程而言, 这几种差分格式都是相容的。

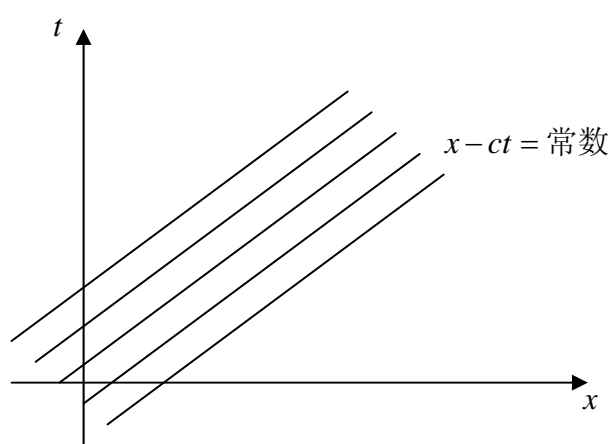


2、差分近似的精确性

差分近似的精确性问题，即是讨论差分系统相对于微分系统的精确程度。差分近似的精确性取决于差分近似时的**截断误差**和计算时的**舍入误差**。为了减少截断误差，需要在计算条件允许的情况下，尽可能地减小 Δt 和 Δx 、 Δy 的大小，以使截断误差尽可能地小。对于舍入误差，现在计算机一般不严重，但要注意有时算术运算会出一些问题，编程时要注意。（如很小的数与很大的数相除后再来一个大数，最好先乘后除）。虽然计算机的舍入误差不大，但因为差分方程求解是一步一步进行。如果误差不断的积累，也会增长很厉害，而造成计算不稳定。

3、差分近似的收敛性

考虑微分方程初值问题的真解 $f(i\Delta x, \tau\Delta t)$ 和与之相容的差分方程的解 f_i^τ 之差 $|f_i^\tau - f(i\Delta x, \tau\Delta t)|$ 在求解区域中的极值 $Max_{i,\tau}(|f_i^\tau - f(i\Delta x, \tau\Delta t)|)$ ，当 Δt 和 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，它也趋近于 0，则称这个差分格式是收敛的，或者称差分方程的解收敛于微分方程的解。差分近似的相容性不能保证其收敛性。下面用一维平流方程来讨论此问题。



一维平流方程为：
$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

其通解是：
$$u(x, t) = \varphi(x - ct)$$

右图中， $x - ct = \text{常数}$ 的直线是这个方程的特征线（即线上的点满足方程）。

若用时间向前差，空间中央差、向前差或向后差，三种差分格式写出一维平流方程的差分形式分别为：

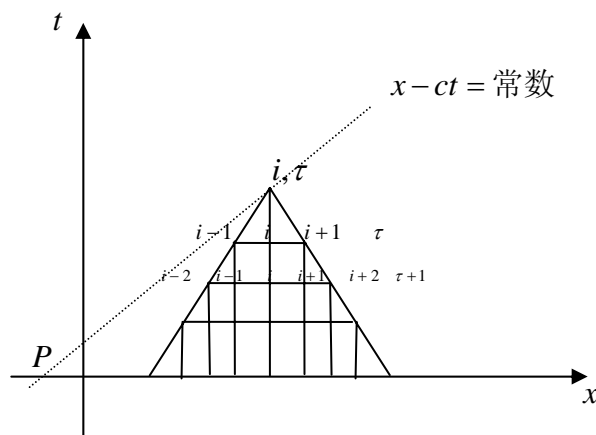
$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^\tau}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^\tau - u_{i-1}^\tau}{2\Delta x} = 0 \quad (\text{A})$$

$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^\tau}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^\tau - u_i^\tau}{\Delta x} = 0 \quad (\text{B})$$



$$\frac{u_i^{\tau+1} - u_i^\tau}{\Delta t} + c \frac{u_i^\tau - u_{i-1}^\tau}{\Delta x} = 0 \quad (C)$$

由差分方程 (A) 可知, 图中 i, τ 点的 u 值 u_i^τ 依赖于 $u_{i+1}^{\tau-1}, u_i^{\tau-1}, u_{i-1}^{\tau-1}$, 而这三点的值又由 $u_{i-2}^{\tau-2}, u_{i-1}^{\tau-2}, u_i^{\tau-2}, u_{i+1}^{\tau-2}, u_{i+2}^{\tau-2}$ 的值算出, …… , 如此倒推, u_i^τ 的值决定于三角



形内所有交点的值, 这三角形区域称为数值解的依存域。 u_i^τ 的值与这个依存域外的点无关系, 但是一维平流方程的真解在 i, τ 的值即 $u(i\Delta x, \tau\Delta t)$ 只与初值 P 点有关。 P 点是 $x - ct = \text{常数}$ 的特征线与 x 轴的交点。如果 P 点落在三角形依存域外, 则无论 Δt 和

Δx 取得如何小, u_i^τ 都不可能收敛于真解。

特征线的斜率为 $\frac{1}{c}$, 只有 $\frac{1}{c} > \frac{\Delta t}{\Delta x}$ 时, 特征值才会在数值解的依存域内, 所以差分近似的收敛性的必要条件是

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad \text{或} \quad c\Delta t \leq \Delta x$$

同样可证明差分格式 (B) 和 (C) 的收敛性必要条件为: $\left| \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$

上述收敛性条件称为柯朗条件。

4、各种时间积分格式的稳定性

为了简便起见, 用一维线性平流方程来讨论各时间积分格式的线性计算稳定性。

一维线性平流方程为 $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, c 为常数 (实数)

设 $u = e^{i(\alpha x + kt)}$, α 是波数, k 是圆频率。代入方程得: $k = -\alpha c$ (实数), 所以此方程解是稳定的。 c 就是波速。



(一) 几个显式格式的稳定性

1、欧拉向前差格式（即时间向前差，空间中央差， F 用当前时刻值计算）

一维线性平流方程的差分近似为：

$$\frac{1}{\Delta t}(u_n^{\tau+1} - u_n^\tau) + \frac{c}{2\Delta x}(u_{n+1}^\tau - u_{n-1}^\tau) = 0 \quad \text{注：因后面要用 } i \text{ 表示虚数，此处用 } n \text{ 表示空间位置}$$

令上式基本解为：

$$u_n^\tau = Ae^{i(k\tau\Delta t + cn\Delta x)}$$

这里 α 是波数（相当于 $\frac{2\pi}{L}$ ）， k 是圆频率， $k = k_r + ik_i$ 。

当 $k_i \neq 0$ 时，有：

$$u_n^\tau = Ae^{-k_i\tau\Delta t} e^{i(k_r\tau\Delta t + cn\Delta x)}$$

除了是一个波动解外， u_n^τ 还以 e 指数变化，增长率为 $e^{-k_i\tau\Delta t}$ 。

如果 $k_i < 0$ ，则此波动以 e 指数增长，则不稳定。

所以，讨论此格式的稳定性，就是要求出 k_i 的表达式并讨论 $k_i \geq 0$ 的条件。

把差分基本解代入上面差分近似式得到：

$$e^{ik\Delta t} - 1 + \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(e^{i\alpha\Delta x} - e^{-i\alpha\Delta x}) = 0$$

应用欧拉公式： $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ， $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$ ，代入得：

$$e^{ik\Delta t} - 1 + \frac{ic\Delta t}{\Delta x} \sin \alpha\Delta x = 0$$

把 $k = k_r + ik_i$ 代入，且把虚实部分开考虑，即：

$$e^{ik\Delta t} = e^{ik_r\Delta t} \cdot e^{-k_i\Delta t} = e^{-k_i\Delta t} (\cos k_r\Delta t + i \sin k_r\Delta t)$$

有：

$$\begin{cases} e^{-k_i\Delta t} \cos k_r\Delta t = 1 \\ e^{-k_i\Delta t} \sin k_r\Delta t = -\frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin \alpha\Delta x \end{cases}$$

由此可求出 k_i ，两式平方相加得：

$$e^{-2k_i\Delta t} = 1 + \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2 \alpha\Delta x$$



因等式右边总是大于 1 的, 所以 $k_i < 0$ 。因此无论 Δt 和 Δx 如何选取, 这种差分格式都是不稳定的。

增长率 $e^{-k_i \Delta t} = [1 + (\frac{c\Delta t}{\Delta x})^2 \sin^2 \alpha \Delta t]^{\frac{\tau}{2}}$ 随 τ 增加而迅速加大。

因此, 用时间向前差和空间中央差构成的显式时间积分格式是绝对不稳定的。平时很少用, 要用时也要做些变化, 例如: 把这格式写在 $\tau + \frac{1}{2}$ 时间层上:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{\tau+\frac{1}{2}} + c\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_n^{\tau+\frac{1}{2}} = 0$$

差分形式为:

$$\frac{1}{\Delta t}(u_n^{\tau+1} - u_n^\tau) + \frac{c}{\Delta x}(u_{n+\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} - u_{n-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}}) = 0$$

其中 $u_{n+\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}}$ 和 $u_{n-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}}$ 分别由以下二式来计算:

$$\frac{2}{\Delta t}[u_{n+\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(u_{n+1}^\tau + u_n^\tau)] + \frac{c}{\Delta x}(u_{n+1}^\tau - u_n^\tau) = 0$$

$$\frac{2}{\Delta t}[u_{n-\frac{1}{2}}^{\tau+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(u_{n-1}^\tau + u_n^\tau)] + \frac{c}{\Delta x}(u_n^\tau - u_{n-1}^\tau) = 0$$

从而可得出:

$$\frac{1}{\Delta t}(u_n^{\tau+1} - u_n^\tau) + \frac{c}{2\Delta x}(u_{n+1}^\tau - u_{n-1}^\tau) = \frac{c^2 \Delta t}{2\Delta x^2}(u_{n+1}^\tau - 2u_n^\tau + u_{n-1}^\tau)$$

这也是个显式格式, 叫做 Lax-Wendroff 格式。

相对于欧拉向前差格式而言, 它相当于增加一个人工平滑项 (右边), 于是它变成是条件稳定的了。因为, 如前面类似的方法, 把基本解代入此格式, 得:

$$e^{ik\Delta t} - 1 + \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(e^{ia\Delta x} - e^{-ia\Delta x}) = \frac{c^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2}(e^{ia\Delta x} + e^{-ia\Delta x} - 2)$$

利用欧拉公式, 并把虚实部分开:

$$e^{-k_i \Delta t} \cos k_r \Delta t = 1 + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}(\cos \alpha \Delta x - 1)$$

$$e^{-k_i \Delta t} \sin k_r \Delta t = -\frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin \alpha \Delta x$$

两式平方相加得:

$$e^{-2k_i \Delta t} = 1 - 4\left(\frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}\right) \sin^4\left(\frac{\alpha \Delta x}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}\right)$$



如要稳定，即 $k_i \geq 0$ ，右边要小于或等于 1，则必须 $1 - \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \geq 0$

所以，稳定性条件为： $\left| \frac{c \Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$

Lax-Wendroff 格式是条件稳定的，所以有时用 Lax-Wendroff 格式来代替欧拉向前差格式。

2、迎风格式（时间向前差，空间向后差）

用以上同样方法，可证明迎风格式必须在 $c > 0$ 且 $0 < \frac{c \Delta t}{\Delta x} \leq 1$ 时才稳定，数值预报中 c 不一定都大于 0，所以通常不用这格式。而是在预报员计算平流项时（如算 T 平流，水汽平流等），才用这种格式，且把计算点放在风的下游，以满足 $c > 0$ ，因而叫做迎风格式。

3、欧拉后差（松野）格式（两步显式格式，或叫迭代格式）

一维平流方程用欧拉后差格式写出为：

$$\text{第一步：} \frac{1}{\Delta t} (u_n^{*\tau+1} - u_n^\tau) + \frac{c}{2\Delta x} (u_{n+1}^\tau - u_{n-1}^\tau) = 0$$

$$\text{第二步：} \frac{1}{\Delta t} (u_n^{\tau+1} - u_n^\tau) + \frac{c}{2\Delta x} (u_{n+1}^{*\tau+1} - u_{n-1}^{*\tau-1}) = 0$$

两式中把 $*\tau+1$ 的项消去，则有：

$$\frac{1}{\Delta t} (u_n^{\tau+1} - u_n^\tau) + \frac{c}{2\Delta x} (u_{n+1}^\tau - u_{n-1}^\tau) = \frac{c^2 \Delta t}{4\Delta x^2} (u_{n+2}^\tau - 2u_n^\tau + u_{n-2}^\tau)$$

也是相当于在欧拉向前差格式中人为地加了一个平滑项，只是它不是用 $n+1$ 点和 $n-1$ 点来平滑，而是用 $n+2$ 点和 $n-2$ 点来平滑，它对高频波衰减很有意义，故常用。

用上面地类似方法可以证明它也是**条件稳定的**，其稳定条件也为 $\left| \frac{c \Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$ 。

4、蛙跃格式（时间和空间皆用中央差）

用这种格式，一维平流方程变成：

$$\frac{1}{2\Delta t} (u_n^{\tau+1} - u_n^{\tau-1}) + \frac{c}{2\Delta x} (u_{n+1}^\tau - u_{n-1}^\tau) = 0$$

同样令其基本解为： $u_n^\tau = Ae^{i(k\tau\Delta t + cn\Delta x)}$

代入得：

$$\frac{1}{2\Delta t} (Ae^{ik(\tau+1)\Delta t} - Ae^{ik(\tau-1)\Delta t})e^{icm\Delta x} + \frac{c}{2\Delta x} Ae^{ik\tau\Delta t} (e^{i\alpha(n+1)\Delta x} - e^{i\alpha(n-1)\Delta x}) = 0$$



$$Ae^{ik\tau\Delta t} (e^{ik\Delta t} - e^{-ik\Delta t})e^{i\alpha\Delta x} + \frac{c\Delta t}{\Delta x} Ae^{ik\tau\Delta t} e^{i\alpha\Delta x} (e^{i\alpha\Delta x} - e^{-i\alpha\Delta x}) = 0$$

因为 $e^{ik\Delta t} - e^{-ik\Delta t} = \frac{e^{2ik\Delta t} - 1}{e^{ik\Delta t}}$

和 $e^{i\alpha\Delta x} - e^{-i\alpha\Delta x} = \cos \alpha\Delta x + i \sin \alpha\Delta x - \cos \alpha\Delta x + i \sin \alpha\Delta x = 2i \sin \alpha\Delta x$

所以, $e^{i2k\Delta t} - 1 + \frac{c\Delta t}{\Delta x} e^{ik\Delta t} (2i \sin \alpha\Delta x) = 0$

或写成: $(e^{ik\Delta t})^2 + (2i \frac{c\Delta t}{\Delta x} \sin \alpha\Delta x) e^{ik\Delta t} - 1 = 0$

设 $\frac{c\Delta t}{\Delta x} = \lambda$, 得:

$$e^{ik\Delta t} = -i\lambda \sin \alpha\Delta x \pm \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha\Delta x}$$

由此, 差分方程有两个解, 而微分方程只有一个解, 哪个真解, 哪个假解, 如何处理?

设 $k = k_r + ik_i$, $e^{ik_r\Delta t} \cdot e^{-k_i\Delta t} = -i\lambda \sin \alpha\Delta x \pm \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha\Delta x}$

或: $(\cos k_r\Delta t + i \sin k_r\Delta t) e^{-k_i\Delta t} = -i\lambda \sin \alpha\Delta x \pm \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha\Delta x}$

下面分两种情况来讨论:

(1) $1 < \lambda^2 \sin^2 \alpha\Delta x$ 的情况, 此时: $1 < \left| \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right|$ 必须成立。

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha\Delta x} = i\sqrt{\lambda^2 \sin^2 \alpha\Delta x - 1}$$

$$(\cos k_r\Delta t + i \sin k_r\Delta t) e^{-k_i\Delta t} = -i(\lambda \sin \alpha\Delta x \pm \sqrt{\lambda^2 \sin^2 \alpha\Delta x - 1})$$

虚实部分开得:

$$\cos k_r\Delta t \cdot e^{-k_i\Delta t} = 0$$

$$\sin k_r\Delta t \cdot e^{-k_i\Delta t} = -(\lambda \sin \alpha\Delta x \pm \sqrt{\lambda^2 \sin^2 \alpha\Delta x - 1})$$

两式平方和得:

$$e^{-2k_i\Delta t} = (\lambda \sin \alpha\Delta x \pm \sqrt{\lambda^2 \sin^2 \alpha\Delta x - 1})^2$$

因为由前面 $1 < \lambda^2 \sin^2 \alpha\Delta x$, 所以 $e^{-2k_i\Delta t}$ 的两个解中总有一个大于 1。

即当 $1 < \lambda^2 \sin^2 \alpha\Delta x$ (或 $1 < \left| \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right|$ 时), 一维平流方程用蛙跃格式求出的差



分解（其增长率为 $e^{-k_i \tau \Delta t}$ ）是不稳定的。

(2) 当 $1 \geq \lambda^2 \sin^2 \alpha \Delta x$ 时，此时必须有 $1 \geq \left| \frac{c \Delta t}{\Delta x} \right|$

则有：

$$\cos k_r \Delta t \cdot e^{-k_i \Delta t} = \pm \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha \Delta x}$$

$$\sin k_r \Delta t \cdot e^{-k_i \Delta t} = -\lambda \sin \alpha \Delta x$$

两式平方和：

$$e^{-2k_i \Delta t} = 1, \text{ 即增长率 } e^{-k_i \Delta t \tau} = 1, k_i = 0$$

所以，当 $1 \geq \left| \frac{c \Delta t}{\Delta x} \right|$ 时，蛙跃格式是稳定的。

因此，蛙跃格式为条件稳定，但由于蛙跃格式精度高（误差分别为 $O(\Delta t^2)$ 和 $O(\Delta x^2)$ ），所以常常使用，但是它不能用于第一个时间步长（即起步时），因为在做第一步时， $\tau - 1$ 步的值还没有，所以要用时间向前差格式来起步。

（二）隐式差分格式的稳定性

1、隐式向后差格式

（推导略）

隐式向后差格式是绝对稳定的。

2、梯形（隐式）格式

也是绝对稳定的。

小结：

1. 时间向前差的显式格式中，欧拉向前差最简单，计算方便，但绝对不稳定。**Lax-Wendroff 格式**和**松野格式**相当于在欧拉向前差格式中加了一个平滑项

（空间）（或算粘滞项），变为条件稳定，其稳定性条件为 $\left| \frac{c \Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$ 。

2. 时间向前差的隐式格式都是绝对稳定的，但计算不便，计算量大。
3. 时间中央差、空间中央差的蛙跃格式也比较简单，精度高，条件稳定，其条



件为 $\left| \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$ 。但不能用于起步，所以常常用它与前面的一种配合使用。

4. 为满足稳定性条件， Δt 不能随意选取，要根据 c 和 Δx 来定，原始方程中包含各种快波，故 Δt 一般要取比较小。
5. 蛙跃格式有两个波解，需要搞清哪个是真解，哪个是假解，且对后者要去除。

第五节 起步问题

中央差格式（蛙跃格式）是最常用的格式之一，但在初始时刻，只给一个初值 u^0 不能求解，通常用两个时间层的格式算第一个时间步长的值，以后再用蛙跃格式来算。如第一步，用向前差格式，求出 $u^{(1)}$ ，从 $u^{(2)}$ 起才用蛙跃格式，但由于向前差不稳定，所以会带来后面计算不稳，所以不能简单地这样做。

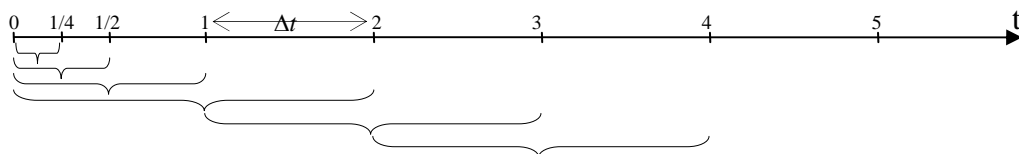
通常做法是：

1、多步法起步

在初始时刻，取 $\Delta t' = \Delta t/n$ （如 $\frac{\Delta t}{4}$ ），用向前差求出 $\frac{\Delta t}{4}$ 时间的 $u^{(\frac{1}{4})}$ ，再用蛙跃

格式，用 u^0 、 $u^{(\frac{1}{4})}$ 算 $u^{(\frac{1}{2})}$ ，又用 u^0 、 $u^{(\frac{1}{2})}$ 算 $u^{(1)}$ ，再用 u^0 、 $u^{(1)}$ 算 $u^{(2)}$ ，……

如下图：



写出差分格式即为：

$$u_n^{\frac{1}{4}} = u_n^0 + \frac{\Delta t}{4} F_n^0$$

$$u_n^{\frac{1}{2}} = u_n^0 + \frac{\Delta t}{2} F_n^{\frac{1}{4}}$$

$$u_n^1 = u_n^0 + \Delta t F_n^{\frac{1}{2}}$$

$$u_n^2 = u_n^1 + 2\Delta t F_n^1$$



.....

2、用稳定的两个时间层格式起步

如：用欧拉后差格式（或 Lax Wendroff 格式）起步，再用蛙跃格式。

第六节 常用差分格式的系统性误差

这种系统性误差主要是：（1）波速偏慢，（2）虚假的计算波（寄生波）

1、波速偏慢问题

主要是空间差分的截断误差造成，一般来讲，波长越短的波，移速偏慢越多（预报与实况相比）。因此，为了减少预报（或模拟）中波的移速偏慢问题，要减少空间截断误差。

有两个途径解决上述问题：

- （1）缩小网格距：（这意味着要增加计算时间，要求计算机条件要好）

网格距取多少，一般由预报或模拟研究的问题来定。如对于天气尺度系统（>1000km），取 $\Delta x: 300 \sim 500km$ 。对于次天气尺度（ $\leq 1000km$ ），取 $\Delta x: 100 \sim 200km$ 。对于小尺度， Δx 取得更小。

- （2）提高格式的精度，多用中央差格式。

2、差分方程的计算解（虚假的计算波）

在讨论蛙跃格式的稳定性中，我们看到一维线形平流方程用蛙跃格式时，其差分近式可得到（A）式，即：

$$e^{ik\Delta t} = -i\lambda \sin \alpha\Delta x \pm \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha\Delta x}, \text{ 其中 } \lambda = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

也就是说，差分方程有两个解，而微分方程只有一个解。

为讨论方便，设： $B = e^{ik\Delta t}$ ， $\Omega = \lambda \sin \alpha\Delta x$ ，上式变成：

$$B = -i\Omega \pm \sqrt{1 - \Omega^2}$$

讨论稳定的情况，即 $\left| \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$

$$\text{或 } B_1 = -i\Omega + \sqrt{1 - \Omega^2}$$

$$B_2 = -i\Omega - \sqrt{1 - \Omega^2}$$



考虑到 $\Omega = \lambda \sin \alpha \Delta x = \sin(\sin^{-1} \Omega) = \sin(\arcsin \Omega)$

$$\sqrt{1-\Omega^2} = \sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1} \Omega)} = \cos(\sin^{-1} \Omega)$$

$$B_1 = \cos(\sin^{-1} \Omega) - i \sin(\sin^{-1} \Omega) = e^{-i\beta}$$

$$B_2 = -i \sin(\sin^{-1} \Omega) - \cos(\sin^{-1} \Omega) = \cos(\pi + \sin^{-1} \Omega) + i \sin(\pi + \sin^{-1} \Omega) = e^{i(\pi+\beta)}$$

其中 $\beta = \sin^{-1} \Omega = \arcsin(\lambda \sin \alpha \Delta x)$

由 $B_1 = e^{ik_1 \Delta t}$, 可写成 $k_1 \Delta t = -\beta$

$$B_2 = e^{ik_2 \Delta t} \quad k_2 \Delta t = \pi + \beta$$

于是, 差分方程解为: $u_n^\tau = (M e^{-i\beta\tau} + E e^{i(\pi+\beta)\tau}) e^{i\alpha n \Delta x}$

其中 M 和 E 为待定常数, 但它们有一定关系, 可由初值来定。

在初始时刻 $\tau = 0$ 时, $u_n^0 = A e^{i\alpha n \Delta x} = (M + E) e^{i\alpha n \Delta x}$, 所以 $M + E = A$

又因 $e^{i\pi} = -1$, 所以有:

$$u_n^\tau = (A - E) e^{i(\alpha n \Delta x - \beta\tau)} + (-1)^\tau E e^{i(\alpha n \Delta x + \beta\tau)}$$

即差分方程的解包含两个波, 第一个波振幅为 $(A - E)$, 相速为 $\frac{\beta}{\alpha \Delta t}$ 。当

$\frac{c \Delta t}{\Delta x} \rightarrow 1$ 时, $\beta = \arcsin\left(\frac{c \Delta t}{\Delta x} \sin \alpha \Delta x\right) \rightarrow \alpha \Delta x$, 相速 $\frac{\beta}{\alpha \Delta t} \rightarrow \frac{\alpha \Delta x}{\alpha \Delta t} \rightarrow c$, 所以第一个波的解与微分方程的波解相同, 称为物理解。

第二个波振幅为 E , 相速为 $-\frac{\beta}{\alpha \Delta t}$, 而且每个时间步长其位相改变一个 π (即

每一步位相相反一次), 出现时间振荡, 振荡周期为 $(2\Delta t)$, 这不是真的解, 叫做计算解, 或计算波, 是由于用了时间中央差, 其差分方程变成了二阶差分方程, 于是有了增根。实际工作中要把这个增根去掉, 采用时间平滑的办法, 格式为:

$$\bar{u}^\tau = u^\tau + \frac{1}{2}(u^{\tau+1} + u^{\tau-1} - 2u^\tau)$$

第七节 非线性计算不稳定

非线性计算不稳定出现在非线性差分方程中, 虽然 Δt 满足线性方程计算稳定性要求, 但还可以出现非线性计算不稳定。



形成原因：由于波与波的非线性作用引起的波的混淆现象造成。

简例：

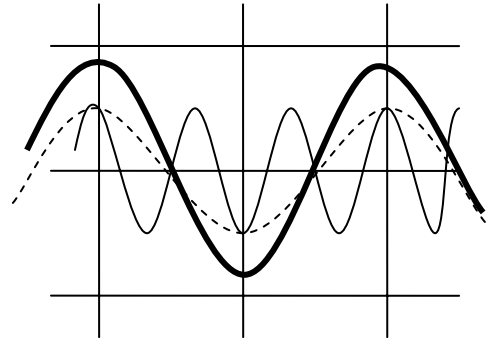
一个波 $e^{i(\alpha_1 x - \kappa_1 t)}$ ，另一波 $e^{i(\alpha_2 x - \kappa_2 t)}$ ，经过非线性项 $u \frac{\partial u}{\partial x}$ 运算后，会出来一

个新波： $e^{[i(\alpha_1 + \alpha_2)x - (\kappa_1 + \kappa_2)t]}$

新波的波数 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 > \alpha_1$ 或 α_2 ，

$\alpha = \frac{2\pi}{L}$ ，因此新波的波长小于 1 波的波长，也小于 2 波的波长。但由于网格只能分辨波长为 $2d$ 的波，短波无法分辨，而且会被误认为是可分辨的波。

如右图，细实线的波被误认为是细虚线的波，于是能量加到粗实线的波里，积分步数越多，加得越多，造成计算不稳，虚假能量增长。



第八节 平滑和滤波

为了消除由于中央差引起的计算波和非线性计算不稳定产生的虚假的能量增长，通常用平滑的办法来滤波。

由于造成的误差多是波长较短的扰动，天气意义不大，但影响运算，所以把它们滤掉。

平滑方法：

1、5 点平滑公式

$$F_{i,j} = f_{i,j} + \frac{s}{4}(f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j})$$

s 为平滑级数，如 $s=1$ ，则用四周点的平均值代替中间点的值； $s=0.5$ ，四周点平均值取 $1/2$ ，中间点取 $1/2$ 。



2、9 点平滑公式

$$\bar{f}_{i,j} = f_{i,j} + \frac{S}{8}(f_{i-1,j-1} + f_{i-1,j} + f_{i-1,j+1} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} + f_{i+1,j-1} + f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1} - 8f_{i,j})$$

一般认为 9 点平滑太强，多用 5 点平滑。

对模式积分一段时间，平滑一次。

第九节 水平边界条件

在做有限区域的数值模拟时,要有侧边界条件。例如,用空间中央差做一时间步长后,除边界外,内部点的量都变了,但边界点未计算到,所以在算下一步时要相应给出侧边界的值。

对于原始方程模式而言,侧边界的给法如下:

1、固定边界和刚体边界

若模拟计算区是矩形,边界和 x, y 轴平行,则有下列几种:

1. 在 $x = 0, L; y = 0, D$ 的边界上,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad \text{即边界值固定不变.}$$

2. 在 $y = \text{常数}$ 的边界上

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ v &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

在 $x = \text{常数}$ 的边界上



$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ u &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

3. 在 $y = \text{常数}$ 的边界上

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ v &= 0 \\ fu + g \frac{\partial z}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

在 $x = \text{常数}$ 的边界上

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \\ u &= 0 \\ -fv + g \frac{\partial z}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

2.和 3.为刚体边界条件， 优点：简单方便；缺点：易不稳定（举例：5层模式）。

2、海绵边界（可比较稳定）

边界上取固定边界，边界向内两三圈设过渡带，过渡带内边界用模拟值，在二者之间逐渐过渡，如：

$$\hat{A}^{(\tau+1)} = (1-a)A^{\tau+1} + aA^{\tau}$$

$\begin{array}{cccc} | & \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$

对于边界点“1”， $a=1$ ；“4”点， $a=0$ ；第“2”和第“3”点 a 可以线性变化，如第“2”点 $a=2/3$ ，第“3”点 $a=1/3$ 。

3、外推边界

$$\begin{aligned}(1) \quad u_j^{\tau+1} &= u_{j-1}^{\tau+1} \\ (2) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^{\tau} &= \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{j-1}^{\tau}\end{aligned}$$



$$(3) \quad u_j^\tau = u_{j-2}^\tau$$

$$(4) \quad u_j^\tau = 2u_{j-1}^\tau - u_{j-2}^\tau$$

$$(5) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^\tau = 2\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{j-1}^\tau - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{j-2}^\tau$$

$$(6) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^\tau = -C_j \frac{1}{d} (u_j^\tau - u_{j-1}^\tau)$$

$$(7) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^\tau = -C_j \frac{1}{2d} (3u_j^\tau - 4u_{j-1}^\tau + u_{j-2}^\tau)$$

$$(8) \quad u_j^{\tau+1} = \left(1 - \frac{2C_j^{\tau-1}\Delta t}{d}\right)u_j^{\tau-1} + \frac{2C_j^{\tau-1}\Delta t}{d}u_{j-1}^{\tau-1}$$

这 8 种和固定值边界做过试验。固定值最差，做约 40 步以后偏离真解很多，且振荡，第 4—8 种最好，第 1 种也不错，第 2 种稍差，第 3 种不好，后来发散很厉害。

4、网格嵌套

由粗网格模式向细网格模式提供边值，主要问题：边界值要处理得好。方法：

1. 用内插法：把粗网格上的值插到细网格上，方法简单，但会产生边界值与内部值不协调。
2. 用“1.”法后，在边界加过渡区，类似海绵边界处理。

这个方法不仅可以处理边界问题，在污染物输送模式中可用此法为计算区内提供 u, v, w , 降水等场。

第十节 垂直方向的差分

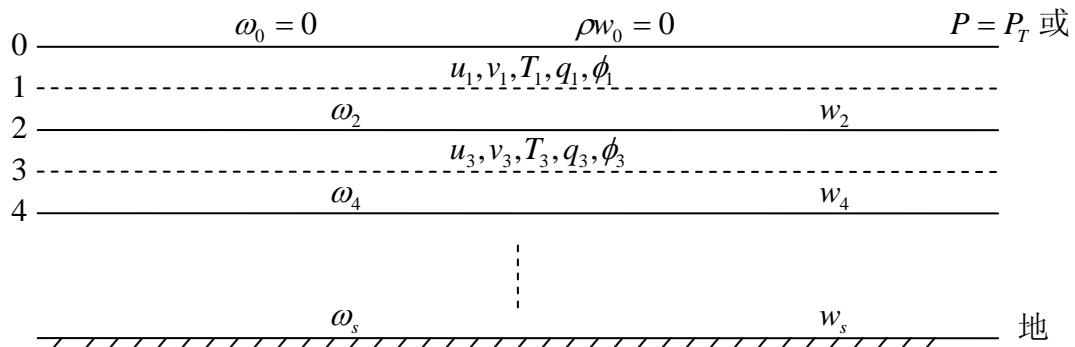
1、垂直分层

设计模式时，为了能考虑到大气在垂直方向上不均匀的特性（与大气斜压性

有关）。要把大气分成若干层，以便计算 $\frac{\partial}{\partial z}$ 或 $\frac{\partial}{\partial p}$ 项，通常分层办法为：先将大



气分为 K 层，在每层中加一个计算面，所以有 $2K+1$ 个面，包括大气层顶和地面。如下图：



2、垂直差分

将 u, v, T, ϕ, q 等变量放在奇数面上， w, ω 等放在偶数面上

如第 1 层与第 3 层之间垂直差分，以 P 坐标为例：

(1) 连续方程中 $\frac{\partial \omega}{\partial p} \sim \frac{\omega_2 - \omega_0}{\Delta p}$

(2) 个别变化项中的 $\omega \frac{\partial u}{\partial p}$ 等

一般把运动方程与连续方程一起，将运动方程写成通量形式，所以此项写成

$$\left. \frac{\partial(\omega u)}{\partial p} \right|_3 \sim \frac{1}{\Delta p} (\omega_4 \hat{u}_4 - \omega_2 \hat{u}_2)$$

因在第 2、4 层无 u ，所以 \hat{u}_4 、 \hat{u}_2 （或 \hat{v}_4 、 \hat{v}_2 等）用 u_5 、 u_3 和 u_3 、 u_1 插值来求。插值方法有各种，以后在适当章节中讲。

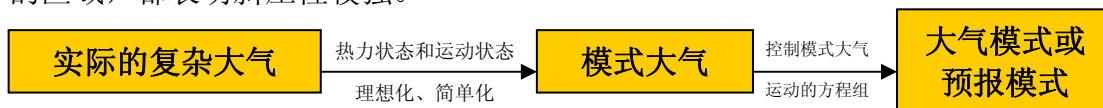


第五章 正压原始方程模式

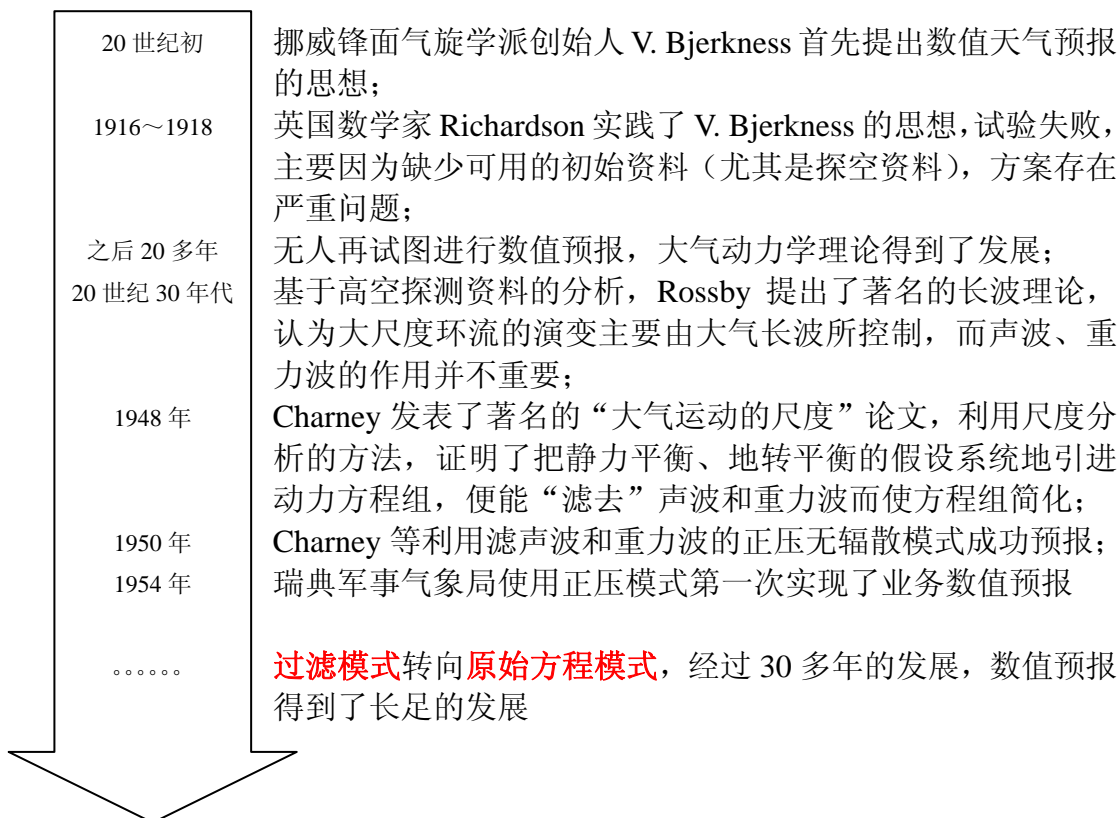
? 正压大气和斜压大气?

正压大气是指大气的密度 ρ 的分布只依赖于气压 P 的大气即 $\rho \equiv \rho(P)$ 。这是一种理想化的大气，比较简单，但对于研究大气中某些物理过程是很有用的。在这种理想化的大气模式中，等压面，等密度面和等温面都是重合的。在等压面上没有等温线，水平温度梯度为零。因此，地转风随高度的变化为零即不存在热成风。在这种模式中，等压面之间厚度处处相等。因而往往可以用某层等压面的运动状态代表整层大气运动状态（常有 500 百帕等压面），这种模式称为正压模式。

斜压大气则是指密度 ρ 的分布依赖于气压和温度的大气，即 $\rho = \rho(T, P)$ ，实际大气都是斜压大气。在斜压大气中，等压面与等密度面和等温面彼此相交，形成许多“力管”，等压面上等温线越密集表示大气的斜压性越强。在这种大气中，地转风随高度有变化，即存在热成风。在天气图上凡是锋区，急流区等温线密集的区域，都表明斜压性较强。



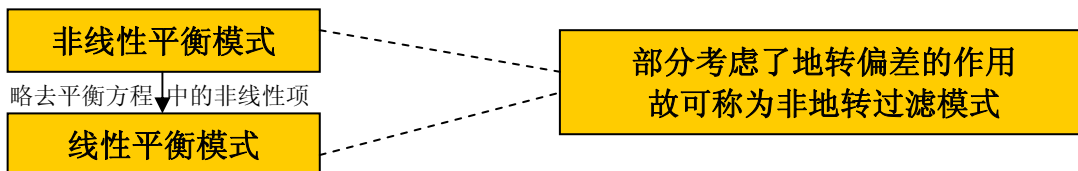
第一节 历史回顾





第二节 过滤模式

结合尺度分析，对涡度方程和散度方程进行简化，可以得到滤去声波、重力波的过滤模式——**平衡模式**和**准地转模式**。



准地转正压模式方程为正压准地转无辐散涡度方程：

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + V_{\Psi} \cdot \nabla(\zeta + f) = 0$$

其中

$$V_{\Psi} = k \times \nabla \Psi \quad \text{旋转风}$$

$$\Psi = \frac{1}{f} \phi \quad \text{流函数}$$

$$\zeta = \nabla^2 \Psi$$

绝对涡度平流

相对涡度的局地变化

模式中不包含垂直运动，不包含上下层之间的相互作用和热力因子影响。因此，准地转正压模式的预报能力是很有限的，适合用于制作 500hPa 等压面上的形势预报。

而且模式中只包含具有天气意义的大尺度波动——Rossby 波，声波和重力波被过滤了。

这一简单模式尚能描述中纬度大尺度运动准水平、准静力平衡、准地转平衡的特征，能够反映大气运动的某些整体性质，及控制大范围环流演变的主要波动——Rossby 波。

求准地转正压模式数值解应考虑的问题：

- (1) **客观分析**——把实际观测的资料插到网格点上
- (2) **初值化**——对已插到网格点上的初值进行处理，减少由于观测误差或客观分析误差导致的虚假小扰动。譬如采用 5 点平滑。
- (3) **侧边界条件**——对于有限区域预报，必须给出侧边界条件，譬如采用固定边界条件。
- (4) **空间网格距和时间步长**——为保证计算稳定，要根据线性计算稳定性条件确定网格距和时间步长。

准地转正压过滤模式的具体计算方案和步骤参见 p.111。

因为滤去了声波和重力波的过滤模式**不能描写大气中的地转适应过程**，而实



实际大气运动总是处于地转平衡不断破坏，又不断向地转平衡调整之中，在这个过程中往往伴随着天气剧烈变化，这正是需要预报的。

第三节 正压原始方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{dt} + f\mathbf{k} \times V = -\nabla\phi \\ \frac{\partial\phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p} \\ \nabla \cdot V + \frac{\partial\omega}{\partial p} = 0 \\ \frac{d \ln \theta}{dt} = 0 \\ \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial p} \end{array} \right.$$

原始方程模式取了准静力平衡近似，滤去了声波（Lamb 波除外），保留了大气长波和重力惯性波。**原始方程模式同时描写了大气运动的准地转演变过程和地转适应，这是与过滤模式最基本的区别。**原始方程模式的物理性能比过滤模式更完善，所能描述的大气动力过程更接近实际过程。

对于具有自由表面的均质不可压缩流体，从原始方程组可推导得到**浅水方程组**（参见 p.113）：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\phi - \phi_s)u + \frac{\partial}{\partial y}(\phi - \phi_s)v = 0 \end{array} \right.$$

它可用于大气中 500hPa 等压面。

在给定初始条件 $t=0, u=u_0(x, y), v=v_0(x, y), \phi=\phi_0(x, y)$ 和侧边界条件下即可求解。

第四节 正压原始方程模式的物理属性

正压模式假定流体是**均匀不可压缩**的，所以模式中**不会存在声波、重力内波解**，但在自由面上会产生重力外波，由于考虑了 f 的作用，出现的应是**重力惯性外波**。除此以外，因为模式中还考虑了 f 随纬度的变化，因而模式中还会产生



Rossby 波。

原始方程模式的时间步长比准地转模式小得多，因而模式的计算量大大增加。

模式大气整体性质（积分性质）：

性质 1： 质量守恒

性质 2： 平流过程中全球大气动量守恒

性质 3： 全球大气总能量守恒

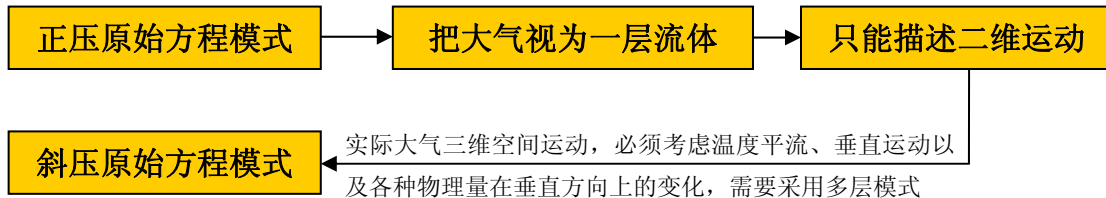
性质 4： 全球大气位涡和位涡拟能守恒

性质 5： 不计地球自转作用，无辐散大气涡度拟能守恒和水平尺度守恒（平均波数守恒）

模式大气的这些整体性质，不但对我们了解模式大气动力学特征有意义，对于制作数值预报也是重要的。具体制作数值预报时，总是要将连续空间离散化，进行差分近似计算，如果差分近似计算（差分格式）破坏了这些整体性质，就相当于引入了虚假的“源”与“汇”，预报结果就难以让人置信。所以，这些整体性质就为我们设计差分格式提供了约束条件。



第六章 斜压原始方程模式



第一节 模式方程组及其积分关系

通过 σ 坐标系中通量形式的模式方程组 (p.141 之 6.1~6.6) 可以推导出斜压大气整体性质的一些积分关系，其中主要包括垂直区间的约束关系、质量守恒关系、保守量的守恒性、水平气压梯度力的垂直积分关系以及总能量守恒等。

1、垂直区间约束关系

根据上下边界 $\sigma = 0$ 和 $\sigma = 1$ ，垂直方向上的积分满足：
$$\int_0^1 d\sigma = 1$$

2、质量守恒关系

$$\frac{\partial \bar{P}_s}{\partial t} = 0$$

在静力平衡条件下，地面气压变化取决于空气柱质量的变化，地面平均气压不随时间变化表示全球大气质量守恒。

3、变量的个别变化及其通量形式

对于保守量 B (空气微团的动量、位温或比湿)，有
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A \int_0^1 \pi B d\sigma dA = 0$$
。说明

物理量 B 对全球大气是守恒的。



保守量的任一函数 $F(B)$ 也是保守量。可推得 $\frac{\partial}{\partial t} \int_A \int_0^1 \pi F d\sigma dA = 0$ ，说明保守量

B 的任一函数 $F(B)$ ，如果其积分存在，则对全球大气也是守恒的。

4、水平气压梯度力的垂直积分

地表平坦时，水平气压梯度力的垂直积分沿水平面任意闭合曲线积分等于零。（**特殊积分条件**，参见 p.144）

5、总能量守恒

$\frac{\partial}{\partial t} \int_A \int_0^1 \pi (K + c_p T + \varphi_s) d\sigma dA = 0$ 表明在绝热无摩擦情况下全球大气总能量守

恒。

以上讨论了连续大气的几个重要积分关系，这些都是设计差分格式时所必须满足的约束条件。

第二节 变量配置与垂直差分格式

1、垂直分层与变量配置

见第四章第十节

2、垂直差分格式的构造

连续方程
个别变化项
气压梯度力
动能产生项
热力学方程
静力方程



第三节 斜压原始方程模式计算方案

(略)



第七章 初值处理

对大气动力方程组求解需要初值，因此，初值处理是数值模拟和数值预报的一个重要的部分，必不可少的部分。工作量也相当大，通常一个数值模式往往还有初值处理的配套程序。

一般初值处理包括两个部分：

- (1) 是将不规则分布的测站资料处理成格点资料和模式层的资料，这即是客观分析。
- (2) 是把格点上的资料进行初值化处理，使其能适用于模式，不因初值的误差而影响计算过程和计算结果。

第一节 客观分析

1、水平插值

如有水平面（或等压面）上各测站资料（或与本模式格点不同的格点资料），插值到模式的格点上。

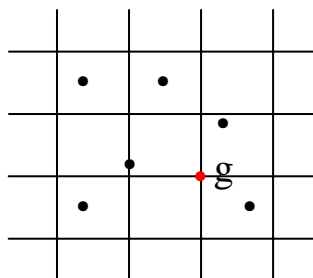
如图，格点 g 周围有若干点

(1) 水平内插法：

一个最简单又常用的插值方法。

选靠近 g 的 N 各测站资料

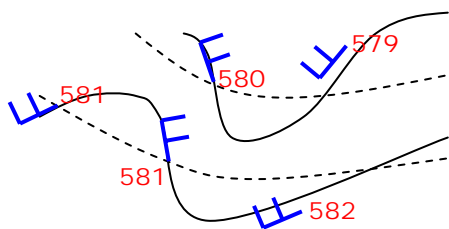
$$f_g = \frac{\sum_{i=1}^N f_i w_i}{\sum_{i=1}^N w_i}$$



其中 w_i 为权重。譬如 $w_i = \frac{1}{1+r_i^2}$ ， $(i=1,2,\dots,N)$ 表明各点的 f 值对 f_g 的贡献大小，如果 $r_i = 0$ ，则贡献为 100%。如 r 大则贡献小。

小，如果 $r_i = 0$ ，则贡献为 100%。如 r 大则贡献小。

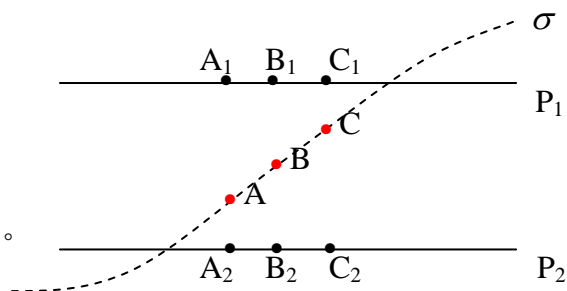
如果得到的不是测站资料，而是格点资料，但其格点与模式格点不一样，也可用类似方法来做（如网格嵌套为其他模式提供资料）。对于数值预报，初值要求更严些，常常要做些订正。如算出高度场后要用风来订正（地转风原理）。



如图，风订正（实线）与不订正不大一样。对短期数值预报很重要，但对长期数值模拟试验则不是很重要。

用这个方法插值时一定要注意：周围各点与格点 g 一定要在同一高度或同一等压面上。如果不在同一等压面上，则一定要先求出周围各点在与格点同一气压处的值再进行插值。所以通常是先在等压面上插值到各格点，再垂直插值到各模式层。要是反过来，先垂直插值再水平插值会很麻烦的。

如 σ 面上格点，不好用 σ 面上其他点的值来插（因为各点上 P 不一样）
要先在 P_1 面和 P_2 面上把观测值插到 A_1 、 B_1 、 C_1 上和 A_2 、 B_2 、 C_2 上，再垂直插值。



(2) 多项式法:

假设某气象场（如位势高度 Z ）可用一个 x 和 y 的多项式来描述，如：

$$Z = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j \quad i, j \geq 0, i + j \leq M$$

如 $M = 3$ 时为三次曲面， $M = 2$ 时为二次曲面。

例： $M = 2$ 时，

$$Z = a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{01}y + a_{02}y^2$$

只要求出 a_{ij} ，从各格点的 x 、 y ，就可以求出格点的 Z 值。

为了要定出系数 a_{ij} ，对于 $M = 2$ 时，至少要有 6 点的观测值，但有时多于 6 点，则更好。可以部分地去掉观测值的随机误差。如果有一组 (N 个测点) 的观测值 $Z_1^{ob}, Z_2^{ob}, \dots, Z_N^{ob}$ ，同时根据这 N 个点的位置 (x, y) 可以用上式写出：

$$\begin{aligned} Z_1 &= a_{00} + a_{10}x_1 + a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1y_1 + a_{01}y_1 + a_{02}y_1^2 \\ Z_2 &= a_{00} + a_{10}x_2 + a_{20}x_2^2 + a_{11}x_2y_2 + a_{01}y_2 + a_{02}y_2^2 \\ &\vdots \\ Z_N &= a_{00} + a_{10}x_N + a_{20}x_N^2 + a_{11}x_Ny_N + a_{01}y_N + a_{02}y_N^2 \end{aligned}$$

用最小二乘法就可以求出 a_{ij} 。

即令：



$$E = \sum_{n=1}^N (Z_n^{ob} - Z_n)^2 \text{ 达极小}$$

求 $\frac{\partial E}{\partial a_{ij}} = 0$ 时的 a_{ij} 。 $0 \leq i + j \leq 2$

由此可有 a_{ij} 的 6 个方程，可求出 a_{ij} 。

如果用上风的资料，计算的 Z 更好，此时可用上地转风近似。

$$E = \sum_{n=1}^N (Z_n^{ob} - Z_n)^2 + w_V^2 \sum_{n=1}^N [(u_n^{ob} - u_n)^2 + (v_n^{ob} - v_n)^2]$$

其中 u_n^{ob} 和 v_n^{ob} 为实测的。 u_n 和 v_n 用地转风公式。 w_V^2 是风的观测值对高度测值的权重（单位为秒）。

由 Z_n 来算：如 $M = 2$ 时，

$$u_n = -\frac{g}{f} \frac{\partial Z_n}{\partial y} = -\frac{g}{f} (a_{11}x_n + 2a_{02}y_n + a_{01})$$

$$v_n = \frac{g}{f} \frac{\partial Z_n}{\partial x} = \frac{g}{f} (2a_{20}x_n + a_{11}y_n + a_{10})$$

同样求 E 最小时的 a_{ij} ，即可。

实际工作中，这 N 个测站要选在要计算的格点附近，不要离得太远。

但是，有时候，在缺少测站的地方，在格点附近测站不到 6 个（ $M = 2$ 时），无法确定 a_{ij} 的值，这时可以这样做：

- ① 先做测站多的地区的格点；
- ② 把计算好的格点值当成测站值，加上另一些测站值来计算与它们相邻的格点的值。

此法**优点**：

考虑了地转风关系和网格点附近的水平方向的连续性，数学上比较严格。

缺点：

没有考虑时间连续性；在记录少的地区可能发生较大误差，产生计算不稳定；运算量比较大。

(3) **逐步订正法**：

为了克服多项式在记录稀少地区应用的困难，设计了逐步订正法。此法的思



路是，先作一个预备场，再利用预备场和观测值的差，进行订正。预备场可以是 12 小时前的预备值，或气候平均值，或最近一次的分析值，或这几种值的加权平均。

以高度场为例，订正方法如下：

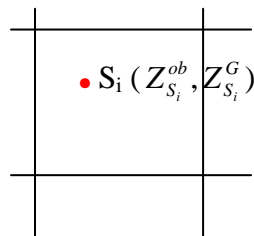
① 如果某测站 S_i 只有高度的观测值 $Z_{S_i}^{ob}$ ，附近格

点预备场的高度值为 Z_G 。从 Z_G 可以用前面的内

插值法求出 S_i 点处预备场的值 $Z_{S_i}^G$ ，于是，观测

值 $Z_{S_i}^{ob}$ 和 $Z_{S_i}^G$ 有一差值，用这差值来订正格点值

Z_G 。订正值为 $C_i^Z = w_i(Z_{S_i}^{ob} - Z_{S_i}^G)$ ，其中 w_i 为权重因子。如果在格点 G 周围选 N



个测站，则总订正值 $C_G = \frac{\sum_{i=1}^N C_i^Z}{\sum_{i=1}^N w_i}$ 。订正后的 Z_G 为 $\tilde{Z}_G = Z_G + C_G$

② 如果测站 S 中有高度观测值，又有测风值，则订正值为：

$$C_i^{ZV} = w_i \left[Z_{S_i}^{ob} + \frac{fk}{g} (v_{S_i}^{ob} \Delta x - u_{S_i}^{ob} \Delta y) - Z_{S_i}^G \right]$$

其中 k 表示实测风相对于高度的重要性，可由平均的 u_g / u 来决定。

取某一范围的半径 R ，取此范围内的测站来订正。若此范围内有 N_z 个点只有测

高资料， N_{zV} 个点有高度和风资料，则总的订正值为：

$$C_G = \frac{\sum_{i=1}^{N_z} C_i^Z + \sum_{i=1}^{N_{zV}} C_i^{ZV}}{\sum_{i=1}^{N_z} w_i + \sum_{i=1}^{N_{zV}} w_i}$$

w_i 有时用下式计算：

$$w_i = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2} \quad \text{当 } r < R$$

$$w_i = 0 \quad \text{当 } r > R$$

这里 r 和 R 都用格距为单位。

实际工作中进行多次订正。第一次订正后缩小 R ，再订正，故称为逐步订正



法。为了得到较好的分析结果，每次订正可采用不同的权重函数。如考虑权重不仅与 r 大小有关，还与测站和格点相对位置有关，与要素场的梯度有关，等等。

此外，还有多元最优插值法、哈佛函数分析、样条函数分析等等（这些方法将放在研究生课程）。

用以上各种方法将测站的资料处理成格点资料，一般称为客观分析。目前客观分析已全部自动化，自动将气象电报输入计算机，读出各测站的观测资料，进行误差检查和订正，然后再用上面的方法计算出格点上的资料。现在客观分析出来的资料不仅用于数值预报的初值，也可做成各种图、表，给预报员做预报用。

2、垂直插值

通常观测给出的资料是在标准等压面上的，如：1000hPa、850hPa、700hPa、500hPa、300hPa、200hPa、100hPa、50hPa、30hPa、10hPa …… 而模式分层不正好在这些面上，所以要把相应的值插到模式层上，这里介绍三种插值方法：

(1) 用多项式插值：

选取模式面上要插值的格点（其气压为 P ）附近的三个等压面，设这三个等压面的气压分别为 P_1 、 P_2 、 P_3 ，在垂直方向上与该格点对应的点的气象要素值（经过水平插值得到的）分别为 f_1 、 f_2 、 f_3 。则此格点的值为：

$$f_p = A_1 \cdot f_1 + A_2 \cdot f_2 + A_3 \cdot f_3$$

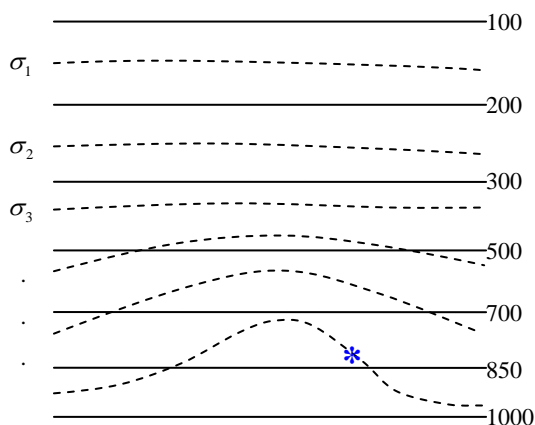
其中：

$$A_1 = \frac{(\ln P - \ln P_2)(\ln P - \ln P_3)}{(\ln P_1 - \ln P_2)(\ln P_1 - \ln P_3)}$$

$$A_2 = \frac{(\ln P - \ln P_1)(\ln P - \ln P_3)}{(\ln P_2 - \ln P_1)(\ln P_2 - \ln P_3)}$$

$$A_3 = \frac{(\ln P - \ln P_1)(\ln P - \ln P_2)}{(\ln P_3 - \ln P_1)(\ln P_3 - \ln P_2)}$$

例如：图中*点气压为 840hPa，取附近的等压面 700hPa、850hPa、



1000hPa，则： $f_p = A_{700} \cdot f_{700} + A_{850} \cdot f_{850} + A_{1000} \cdot f_{1000}$

其中

$$A_{700} = \frac{(\ln P - \ln 850)(\ln P - \ln 1000)}{(\ln 700 - \ln 850)(\ln 700 - \ln 1000)}$$

$$A_{850} = \frac{(\ln P - \ln 700)(\ln P - \ln 1000)}{(\ln 850 - \ln 700)(\ln 850 - \ln 1000)}$$

$$A_{1000} = \frac{(\ln P - \ln 700)(\ln P - \ln 850)}{(\ln 1000 - \ln 700)(\ln 1000 - \ln 850)}$$



代入上式可求出 f_p , f 可以是等压面位势高度 Z 、 u 、 v 、 T 。

(2) 利用两层中变量 f 的梯度求它们之间的 f 值 (线性插值)

如模式面上某格点气压在两等压面 (P_1 和 P_2) 之间, 可先求出这两等压面之间某函数 f 的梯度 (垂直梯度) $\frac{\partial f}{\partial z}$ (如温度 T , 则求 $\frac{T_2 - T_1}{Z_2 - Z_1}$), 或者因为等压面

位势高度与两等压面气压之对数成正比, 即 $Z \sim \ln P$, 所以也可以求 $\frac{\partial f}{\partial \ln P}$ (如

温度 T , 可求 $\frac{T_2 - T_1}{\ln P_2 - \ln P_1}$), 于是气压为 P 的点的 f 值为:

$$f_p = \frac{\partial f}{\partial z}(z - z_1) + f_{z_1} \quad \text{或} \quad f_p = \frac{\partial f}{\partial \ln P} \ln(P/P_1) + f_{P_1}$$

这方法只有在变量垂直变化是线性或接近线性时才好用。如: 对流层温度 T 、 u 、 v , 在对流层和平流层之间 T 的变化不是线性的, 不要用这公式 (或者分层要很密)。

(3) 有些量如 Q (水汽混合比) 向上变化很快, 成指数递减, 可以用下式来做垂直插值:

$$\text{设} \quad r_Q = \frac{\ln Q_{P_2} - \ln Q_{P_1}}{\ln P_2 - \ln P_1}$$

$$\text{则} \quad Q_p = Q_{P_1} \cdot (P/P_1)^{r_Q}$$

第二节 资料初始化

必要性——直接用观测资料放到模式中计算, 容易出现高频振荡, 引起计算不稳定, 原因是:

- ① 观测资料或分析误差导致风与气压场的不平衡, 虚假的地转偏差造成高频波 (重力惯性波);
- ② 初始资料与模式不协调, 因而出现虚假的波。

初值化方法:

1、静处理方法

考虑到观测资料中温度场与气压场 (位势场) 比测风准确得多, 如同时用风与气压资料, 会造成初始地转不平衡, 而出现高频波。一般不同时用这两种资料



数值预报与数值模拟方法

——周任君 博士

做初值，而是假设风与气压场满足某种关系，用气压、Z 来求出风。

(1) 地转风关系 $u = -\frac{g}{f} \frac{\partial Z}{\partial y}, v = \frac{g}{f} \frac{\partial Z}{\partial x}$ 最简单，但在低纬地区要对 f 做修正

修正方法：

$$\textcircled{1} f = \begin{cases} f & \varphi > \varphi_0 \\ f_{\varphi_0} & \varphi \leq \varphi_0 \end{cases} \quad (\varphi_0 \text{ 一般取为 } 20^\circ \text{ 或 } 30^\circ \text{ 纬度})$$

$$\textcircled{2} f = \begin{cases} f & \varphi > \varphi_2 \\ f_{\varphi_1} + \frac{f_{\varphi_2} - f_{\varphi_1}}{f_{\varphi_2}} \varphi & \varphi_1 < \varphi \leq \varphi_2 \\ f_{\varphi_1} & \varphi \leq \varphi_1 \end{cases} \quad (\varphi_1 \text{ 一般取为 } 15^\circ \text{ 或 } 20^\circ \text{ 纬度})$$

(2) 采用平衡方程：通过位势高度场来求出流函数

$$\text{平衡方程为：} 2\left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}\right] - \frac{\partial f}{\partial y} u + f\left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right] - \nabla^2 \Phi = 0$$

$$\text{引入流函数 } \Psi, \quad u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, (\Delta \Phi = g \Delta Z)$$

$$\text{得：} f \nabla^2 \Psi + \nabla f \cdot \nabla \Psi - Z(\Psi_{xy}^2 - \Psi_{xx} \Psi_{yy}) = g \nabla^2 Z$$

$$\text{其中：} \Psi_{xy} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}, \Psi_{xx} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \Psi_{yy} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}$$

平衡方程反应了位势场 Z 与流函数 Ψ 的关系。

当 $\frac{1}{f}(g \nabla^2 Z - \nabla f \cdot \nabla \Psi) > -\frac{f}{2}$ 时，平衡方程是个椭圆型方程，可以解出 Ψ 。

$$\text{再由 } u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \text{ 可求出初值 } u, v$$

解平衡方程比较麻烦，要先把它写成差分形式，然后用迭代法求 Ψ 。

(3) 地转关系与平衡方程混合使用

由于低纬地区风场比气压场清楚（等压线稀疏，不好分析），所以可用风场反算 Z 场，具体做法：

① 用实测风求 Ψ

先用实测风求出散度 D 和涡度 ζ ，再由速度势与 D 的关系和流函数与涡



度的关系求出 χ 和 ψ

$\nabla^2 \chi = D$ ，边界上 $\chi = 0$ ，解泊松方程

求出 χ 后，由 $\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = -V_n + \frac{\partial \chi}{\partial n}$ 求出边界上的值

再由 $\nabla^2 \psi = \zeta$ 求出 ψ ，再求出风 V_ψ

② 由 ψ 用平衡方程反算高度场 Z

③ 加权平均求高度

在低纬用 V_ψ ，在中高纬用地转风 V_g ，它们之间用 V_ψ 与 V_g 的加权平均。

2、动处理方法

(研究生阶段讲)

3、变分处理方法

(研究生阶段讲)

第三节 四维同化

以上用客观分析处理的资料基本上是定时的常规观测资料。自从气象卫星升空（第一颗是 1960 年 Tiros 号——泰尔斯号）以后，不定时的非常规资料大量增加。如果能利用起来，对弥补洋面和沙漠地区观测资料的不足是很有用的。但有一个最大的问题，对于极轨卫星来说，它只能观测到其轨道下方（星下点）附近的带状区域，即某时刻只能观测某地区。随着地球自转，虽然可以得到全球资料，但是不同地区的资料观测时间不一样。

所谓四维同化就是把不同时刻 (t)、不同地区 (x,y)、不同高度 (Z)、不同性质 (常规或非常规) 的气象观测资料源源不断地输入计算机，通过一定的程序，把它们协调起来，溶合成常规的定时资料，为数值预报提供初值(或更新预报值)。

进行四维同化主要分为间歇资料同化和连续资料同化：

1、间歇资料同化

可用于提供初值和数值预报中间某一时间间隔引入卫星观测资料，它包含



三部分工作：

- ① 采用时间插值，得到指定时刻的值（卫星观测值）
- ② 空间插值，把卫星资料插值到格点上（用前述客观分析方法）
- ③ 调整模式预报值，向观测值逼近，且不激发气象噪音

2、连续资料同化

即在预报过程中不断引入卫星观测资料，因此必须使模式对新资料的“冲击”进行调整，否则很容易产生“噪音”。目前预报中一般不采用这种方法。但有人在发展一种伴随模式来进行连续同化，计算量很大，将来可能很有发展前途。



第八章 模式中物理过程的处理方法

一、影响大气运动的物理因子（物理过程）有：

- 1、辐射过程：包括太阳辐射和地气系统的红外热辐射
- 2、凝结过程和蒸发过程：包括云的分布对辐射的影响和潜热释放
- 3、边界层影响：感热、水汽垂直通量和地面摩擦作用
- 4、涡旋、湍流扩散
- 5、地形影响：动力和热力作用
地球上三对热源和热汇（高低纬，海陆，高原与周围大气）
- 6、海陆分布：海陆温差（热力环流、季风等），反照率，洋流与气流

解决上述问题，涉及到大气辐射、边界层气象、云物理、海洋学、海气相互作用、水文学……

本章结合 USTC 九层大气环流模式的物理过程处理方案来讲，参考资料为模式说明书，同时介绍 IAP 九层模式的方案，即 NCAR CCM1 的方案。

二、引起大气状态变化的两种作用

- 1、大气内部的动力过程和不稳定性——“自由的”
- 2、外界条件的作用——“受迫的” 如上面因素的作用，对长期、大尺度问题很重要

第一节 辐射过程：

分为太阳短波辐射和地气系统的红外热辐射（长波辐射），（这是一种外界强迫过程，对于短期、小尺度问题不考虑）

1、太阳辐射：

太阳辐射是大气运动的主要能源，它通过大气的吸收，地面吸收（再传给大气）使大气的温度发生变化，增加大气的内能和位能，在大气运动过程中再转化为大气的动能。

在模式中对于太阳辐射部分要计算什么呢？

- （1）计算大气中的介质对太阳辐射的吸收量，云的吸收量，进而计算太阳辐射对大气的加热率。
- （2）计算大气对太阳辐射的散射量和云的反射量，散射量对大气不加热，后向散射回太空，前向散射可透过大气到达地面。
- （3）计算太阳辐射经过吸收和散射之后到达地面的量和地面反射之后，地面吸



第八章 模式中物理过程的处理方法

收的太阳能，进而计算它对地球土壤的加热率。（以后再通过感热输送和长波辐射影响大气温度）

根据太阳辐射，大气对太阳辐射的吸收和散射的选择性特性，可分成三个波段来处理：

- ① 波长 $\lambda < 0.3\mu\text{m}$ 紫外部分，主要 O_3 吸收
- ② $0.3 \leq \lambda \leq 0.7\mu\text{m}$ 可见光部分， O_3 少部分吸收，一部分大气散射，剩余部分到达地面
- ③ $\lambda > 0.7\mu\text{m}$ 近红外部分，可吸收部分，吸收介质为 H_2O

到约 $5\mu\text{m}$

另外， CO_2 和分子氧也吸收少部分

若到达大气上界的太阳辐射通量密度（即太阳常数）为 S_0

$$S_0 = 1.96 \text{卡/厘米}^2 \cdot \text{分} \quad \text{或} \quad S_0 = 1353 \text{W/m}^2 \text{(71年NASA)} \quad S_0 = 1373 \text{W/m}^2 \text{(77年)}$$

$$S_0 = 1367 \pm 7 \text{W/m}^2 \text{(1981年WMO)} \quad \text{与观测精度相关}$$

上述三个波段的能量分别为：

$$S_0^{(1)} = 0.013S_0 \quad S_0^{(2)} = 0.4783S_0 \quad S_0^{(3)} = 0.5087S_0$$

（一）大气对太阳辐射的吸收及加热率计算：

z 高度单位质量大气对太阳辐射吸收量为： Q_s ，加热率为 $\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_s$

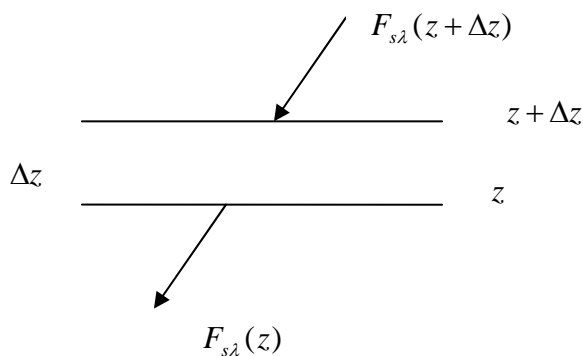
$$Q_s = \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_s(z)}{\partial z} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_s = \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial F_s(z)}{\partial z} \approx \frac{1}{\rho C_p} \frac{\Delta F_s(z)}{\Delta z}$$

$F_s(z)$ 在 z 高度的太阳辐射能

求 $\Delta F_s(z)$ 的方法：

1、精确法：

$$\Delta F_{s\lambda}^\downarrow(z) = \Delta F_{s\lambda}^\downarrow(z + \Delta z) - \Delta F_{s\lambda}^\downarrow(z)$$





$$= \Delta F_{s\lambda}^{\downarrow}(z + \Delta z) \cdot \alpha_{\lambda}(\Delta z)$$

其中 $\alpha_{\lambda}(\Delta z)$ 是 Δz 层中的吸收介质对波长为 λ 的入射辐射的吸收率。

$\alpha_{\lambda}(\Delta z)$ 是波长的函数，又与吸收介质的特性及其含量（光学质量）有关。

有了 $\Delta F_{s\lambda}^{\downarrow}(z)$ 以后，对整个波长积分

$$\Delta F_s(z) = \int_0^{\infty} \Delta F_{s\lambda}^{\downarrow}(z + \Delta z) \cdot \alpha_{\lambda}(\Delta z) d\lambda$$

用此方法，要对不同的吸收谱线计算出 $\alpha_{\lambda}(\Delta z)$ ，还要从上到下把 $F_{s\lambda}(z + \Delta z)$ 计算

出来，才能求得 $\Delta F_s(z)$ ，计算量大，如果要考虑由地面或云顶反射回去的太阳光，

$F_{s\lambda}^{\uparrow}(z)$ 再次被大气吸收，则还要加一部分 $\int_0^{\infty} \Delta F_{s\lambda}^{\uparrow}(z) \cdot \alpha_{\lambda}(\Delta z) d\lambda$ （在高原上是重要的），计算量更大，对数值模式用起来不便。

2、近似法（参数法方法）

设 z 到 $z + \Delta z$ 气层的介质吸收太阳能为：

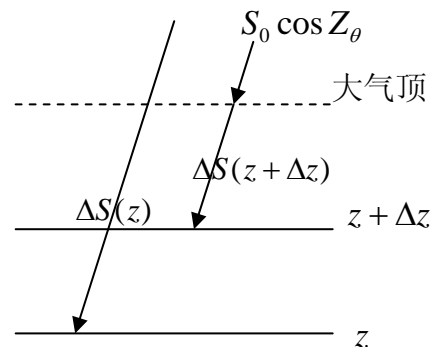
$$\Delta F_s(z) = [\Delta S(z) - \Delta S(z + \Delta z)] \cos Z_{\theta}$$

其中 $\Delta S(z)$ 是 z 高度以上大气中吸收介质对太阳辐射的吸收量

$$\Delta S(z) = S_0^{(n)} A(z)$$

$A(z)$ 是某种吸收介质对太阳辐射的吸收

率（用近似方法计算的）， $S_0^{(n)}$ 可以是 $S_0^{(1)}$ ， $S_0^{(2)}$ ， $S_0^{(3)}$ 中的某个或全部。



从 60 年代初到现在不少人进行了大量工作来设计 $A(z)$ 的计算方案，主要思路是找出 $A(z)$ 与 z 高度以上气层的介质的光学厚度之关系（或者是光学路径）。

下面介绍一些计算 $A(z)$ 的方案

(1) O_3 吸收太阳辐射量的 $A(z)$ 的计算，写为 $A_3(z)$

方案一：（用于 USTC 模式——借鉴俄勒岗大学方案）



第八章 模式中物理过程的处理方法

设 $X(z)$ 为 z 高度以上气层的 O_3 的厚度 (用 cmSTP 表示)

$$A_3(z) = a_i + b_i X(z) + c_i X^2(z) \quad X(z) \sim X(z) \cdot \sec Z_\theta$$

a_i, b_i, c_i 是通过大量资料和实验定出的系数, 随 $X(z)$ 值大小范围的不同而变化 (有表)

于是 $\Delta F_{O_3}(z) = S_0 [A_3(z) - A_3(z + \Delta z)] \cos Z_\theta$

其中 $\cos Z_\theta = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t_n$

方案二: (用于 IAP 模式——来自 NCAR 模式)

$$\Delta S_{O_3}(z) = \frac{0.02118X(z)}{1+0.042X(z)+0.000323X^2(z)} + \frac{1.082X(z)}{[1+138.6X(z)]^{0.805}} + \frac{0.0658X(z)}{1+[103.6X(z)]^3}$$

已将 S_0 乘入, 右边第一项为 O_3 在可见光段的吸收, 后两项是在紫外波段的吸收量。

(2) 水汽对太阳辐射吸收量的计算

方案一:

① 晴空或云顶以上气层

设 $W(z)$ 为水汽的有效光学路径 (z 高度以上)

$$W(z) = M_w \sec Z_\theta \quad M_w \text{ 为 } z \text{ 高度以上气柱的水汽含量}$$

则: $\Delta S_w = BW^{0.303}(z)$

B 为系数, 如 ΔS_w 单位为 $Jcm^{-2} \min^{-2}$, 则为 0.7787

如 ΔS_w 单位为卡/ cm^2 分, 则 $B \sim 0.186$

后来进步研究表明, 上述幂公式 (power law) 只是对 W 值为某一范围时比较准, 在 W 较小或特别大时, 应该用其他公式, 归纳为

$$\Delta S_w(z) = \begin{cases} 0.45W^{0.515}(z) & 10^{-6} \leq W(z) \leq 10^{-2} \left(\frac{g}{m}\right) \\ 0.06581W^{0.515}(z) + 0.14275W^{0.3}(z) & 10^{-2} \leq W(z) \leq 0.45 \\ 0.2W^{0.3}(z) & 0.45 \leq W(z) \leq 15 \\ 0.12817 + 0.27183 \log W(z) & 15 \leq W(z) \leq 50 \end{cases}$$

以上是晴空时的计算方法, 云顶以上也用此公式。

② 考虑有云时的反射和吸收



数值预报与数值模拟方法

——周任君 博士

有云时：云顶要反射一部分太阳辐射，在云顶以下，太阳光变成漫射的。在云中的某一薄层 Δz 对太阳辐射的吸收量的计算比较麻烦，要知道云量，云状，云高等等，不同情况下其反射率和吸收率不同，做精确计算时才做，一般数值模式中还是用近似方法。如设某一个格点计算的水汽过饱和，就假定有云，而用下式求云中各层的水汽和对太阳辐射的吸收量

$$\Delta F_{sc}(z) = B(1 - R_c^*)(W^{0.303}(z) - W^{0.303}(z + \Delta z))$$

其中： $W(z) = M_T \sec Z_\theta + 1.66M_{Tz}$

M_{Tz} 是从云顶到计算层 z 处的水汽含量

M_T 是云顶以上气层的水汽含量

R_c^* 为云的有效反射系数，约等于 0.5

$$\sec Z_\theta = \frac{1}{\cos Z_\theta} \quad Z_\theta \text{ 为太阳天顶角}$$

$$\cos Z_\theta = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t_n$$

方案二：分为水汽对直射光的吸收和对漫射光的吸收来处理

① 水汽对太阳直射光的吸收量

$$\Delta S_w(z) = \frac{W_{eff}^{(z)}}{a + b(W_{eff}^{(z)})^c + dW_{eff}^{(z)}}$$

其中： $W_{eff}^{(z)} = W(z)\left(\frac{T}{273}\right)^\varepsilon$ $W(z)$ 我们前面晴空时一样计算

$$\varepsilon = 0.6 - 0.2 |\lg P_{eff} + 0.5|$$

$$P_{eff} = P\left(\frac{273}{T}\right)^{0.62}$$

$$a = 0.1084 + 0.016(-\lg P_{eff})^{1.681}$$

$$b = 3.8083 + 2.836P_{eff}^{-0.5} + P_{eff}^2$$

$$c = 0.49072 + 0.08679P_{eff}^{0.5}$$

$$d = 3.2094 + 2.1094(-\lg P_{eff})$$

② 水汽对漫射光的吸收



第八章 模式中物理过程的处理方法

$$\Delta S_w(z) = \frac{2.9y}{(1+141.5y)^{0.635} + 5.925y}$$

y 为水汽含量，折算到厘米为单位。

③ 二氧化碳在太阳近红外波段的吸收量

$$\text{方案二: } \Delta S_{CO_2}(z) = 0.00253(\chi(z) + 0.0129)^{0.262} - 0.00075$$

④ 分子氧的吸收:

$$\Delta S_{O_2} = 0.0288 \ln(1 + \sqrt{0.04\chi(z)})$$

$\chi(z)$ 为 CO_2 或分子氧的含量，折算到厘米为单位。

有了不同层的 $\Delta S(z)$ ，就可以求出 $\Delta F_s(z)$ ，也就可求出 Q_s 和 $\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_s$

(二) 大气对太阳辐射的散射

主要考虑分子散射（在 $0.3 < \lambda < 0.7 \mu m$ 波段）及云的反射，这部分吸收不多（除 O_3 吸收外），对大气增温率贡献不大，故模式中只需计算太阳辐射时被大气分子和云散射回太空多少（以便以后计算到达地面多少）。

方案一：设入射的太阳辐射经过整个大气层到达地面时被散射回去的部分为 $S_0^{(2)} \cdot a_{0s}$ ， a_{0s} 为晴空大气分子散射时产生的反照率（相对于 $S_0^{(2)}$ 而言的，实际定义为 $S_0 a_{0s}$ ，相对于太阳常数）， a_{0s} 的大小与大气的光学路径长度 m 有关， m 定义为：

$$m = [P_s \sec z_\theta] / 1000$$

由 m 可用下面经验公式计算 a_{0s}

$$a_{0s} = 0.10097m - 0.0184m^2 \quad (0 \leq m < 1)$$

$$a_{0s} = 0.0180 + 0.0686m - 0.0042m^2 \quad (1 \leq m \leq 16)$$

与说明书中相比，已将 0.47834 除了

a_{0s} 是晴空大气整层大气分子散射的反照率，在有云时，考虑云的反射，如



果云的反射率为 R_c ， a_c 为云以上大气和云的反射作用产生的反照率，则

$$a_c = a_{0s} + (1 - a_{0s})R_c$$

有云时，入射辐射经过整层大气散射回去的太阳能为 $a_c \cdot S_0^{(2)}$ ， R_c 取为 0.5。

方案二：把大气分子对太阳辐射的散射产生的反照率分为对直射阳光的散射反照率 α_R^{dr} 和对漫射阳光（云下）的散射反照率 α_R^{df} 。

其中：
$$\alpha_R^{dr} = \frac{0.28}{1.0 + 6.43 \cos z_\theta}$$

$$\alpha_R^{df} = 0.0685$$

(三) 到达地面和被地面吸收的太阳辐射

方案一：设紫外部分到达地面很少，可略（作 O_3 作用时除外）

(1) 近红外部分，到达地面的 $\lambda > 0.7 \mu m$ 的太阳辐射能为

$$S_{es}^{(3)} = (S_0^{(3)} - \Delta S_s^{(3)}) \cos z_\theta$$

其中 $\Delta S_s^{(3)}$ 是整层大气中水汽吸收的太阳辐射（顶—地面）

若地面反照率为 a_s ，则地面吸收的 $\lambda > 0.7 \mu m$ 的太阳辐射能为：

$$\Delta S_g^{(3)} = (1 - a_s) S_{es}^{(3)}$$

地面反照率不同的地区（下垫面）不同季节不大一样。一般海上取为 0.1，低地、平原取为 0.2，高地、高原 0.3，雪面、冰面可到 0.5~0.8。

（本来反射回去的太阳能还会被大气再吸收，但较烦，我们模式未考虑，所以温度计算有些误差）

(2) 可见光部分： $0.3 < \lambda < 0.7$ 的太阳辐射被大气散射掉 $a_{0s} S_0^{(2)}$ 之后，到达地面的部分为 $S_0^{(2)}(1 - a_{0s})$ ，由于地面的反射，一部分被反射回去，反射量为 $S_0^{(2)}(1 - a_{0s})a_s$ ，这部分太阳辐射能再通过大气层时又会被大气散射回地面（逆散



第八章 模式中物理过程的处理方法

射), 逆散射回地面的部分为 $S_0^{(2)}(1-a_{0s})a_s a_{0s}$, 再次反射和逆散射回地面的部分为 $S_0^{(2)}(1-a_{0s})a_s^2 a_{0s}^2 \cdots$, 经过多次反射和逆散射之后, 到达地面的波长为 $0.3 < \lambda < 0.7$ 的太阳辐射为:

$$\begin{aligned} S_{es}^{(2)} &= S_0^{(2)}(1-a_{0s}) + S_0^{(2)}(1-a_{0s})a_s a_{0s} + S_0^{(2)}(1-a_{0s})a_s^2 a_{0s}^2 + \cdots \\ &= S_0^{(2)}(1-a_{0s})(1+a_s a_{0s} + a_s^2 a_{0s}^2 + a_s^3 a_{0s}^3 + \cdots) \\ &= S_0^{(2)}(1-a_{0s})/(1-a_s a_{0s}) \end{aligned}$$

由于地面反射, $S_{es}^{(2)}$ 中只有部分被地面吸收, 这部分为:

$$\Delta S_g^{(2)} = S_0^{(2)}(1-a_{0s})(1-a_s)/(1-a_s a_{0s})$$

当有云时, 要用前面给出的 a_c 代替 a_{0s}

方案二:

(1) 近红外部分, 晴天情况下:

$$\Delta S_g^{(3)} = S_I f_{clear} (0.353 - \Delta S_w - \Delta S_{CO_2} - \Delta S_{O_2})(1-a_s^{(3)})$$

其中, ΔS_w , ΔS_{CO_2} , ΔS_{O_2} 是整个气柱的水汽, CO_2 , O_2 对太阳辐射的吸收量, $a_s^{(3)}$ 是地面对近红外部分的反照率。

(2) 紫外和可见光部分

$$\Delta S_g^{(1,2)} = S_I f_{clear} (0.647 - \Delta S_{O_3} - \alpha_R^{dr}) [(1-a_s^{dr}) + \frac{a_s^{dr} \alpha_R^{df} (1-Q_s^{df})}{1-a_R^{df} a_s^{df}}]$$

其中, S_I 是大气顶入射的太阳辐射

$$S_I = S_0 \cos z_\theta \cdot f_d \cdot \varepsilon$$

f_d —— 白天日照系数 (依赖于日期和纬度)

ε —— 离心力因子 (依赖于日期)

f_{clear} —— 大气柱中的晴空比例

a_s^{dr} 和 a_s^{df} 分别为地面对此部分太阳辐射的直射光和漫射光的反照率。

有云时, 分为非重叠云和重叠云两种情况来处理, 这里不多讲, 看毕业论文。



总的到达地面被地面吸收的太阳辐射即为 $\Delta S_g^{(2)}$ 和 $\Delta S_g^{(3)}$ 之和，留作以后算地面温度时用，记做 ΔS_g 。

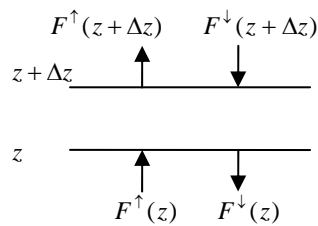
2、地气系统的红外热辐射（长波辐射）

气层净得（失）长波辐射：

$$Q_L(z) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} [F^\uparrow(z) - F^\downarrow(z)]$$

长波加热率或降温率：

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_L = \frac{-1}{\rho C_p} \frac{\partial}{\partial t} [F^\uparrow(z) - F^\downarrow(z)]$$



地气系统红外辐射传导方程的来源参见廖洞贤《数值天气预报原理及应用》(P.406 附录十和十一)：

P.407.中 (A 11.6) 和 (A 11.7) 可写成：

(注：书中 $U_\lambda \rightarrow F_\lambda^\uparrow$ $D_\lambda \rightarrow F_\lambda^\downarrow$ $\pi E_\lambda(T) \rightarrow B_\lambda(T)$)

$$F_\lambda^\uparrow(z) = B_\lambda(T_s) \tau_f(\alpha_\lambda u_z) + \int_0^{u_z} B_\lambda(u) \frac{d}{du} \tau_f[\alpha_\lambda(u_z - u)] du$$

$$F_\lambda^\downarrow(z) = -\int_{u_z}^{u_\infty} B_\lambda(u) \frac{d}{du} \tau_f[\alpha_\lambda(u - u_z)] du$$

为了计算方便，也有人用温度 T 代替 u 作积分元，有：

$$\frac{d\tau_f}{du} \cdot du = \frac{d\tau_f}{dT} \cdot \frac{dT}{du} \cdot du = \frac{d\tau_f}{dT} \cdot dT$$

代入上二式作分部积分，且考虑 $\tau_f(0) = 1$ ，有：

$$\begin{aligned} F_\lambda^\uparrow(z) &= B_\lambda(T_s) \tau_f(\alpha_\lambda u_z) + \int_{T_s}^{T_z} B_\lambda(T) \frac{d}{dT} \tau_f[\alpha_\lambda(u_z - u)] dT \\ &= B_\lambda(T_s) \tau_f(\alpha_\lambda u_z) + \int_{T_s}^{T_z} \frac{d}{dT} (B_\lambda(T) \cdot \tau_f[\alpha_\lambda(u_z - u)]) dT - \int_{T_s}^{T_z} \frac{dB_\lambda(T)}{dT} \cdot \tau_f[\alpha_\lambda(u_z - u)] dT \\ &= B_\lambda(T_s) \tau_f(\alpha_\lambda u_z) + B_\lambda(T_s) \tau_f[\alpha_\lambda(u_z - u_z)] - B_\lambda(T_s) \tau_f[\alpha_\lambda(u_z - u_s)] - \int_{T_s}^{T_z} \dots \\ &= B_\lambda(T_s) + \int_{T_s}^{T_z} \frac{dB_\lambda(T)}{dT} \cdot \tau_f[\alpha_\lambda(u_z - u)] dT \end{aligned}$$



第八章 模式中物理过程的处理方法

$$\begin{aligned}
 F_{\lambda}^{\downarrow}(z) &= -\int_{T_z}^{T_{\infty}} B_{\lambda}(T) \frac{d}{dT} \tau_f[\alpha_{\lambda}(u-u_z)] dT \\
 &= -\int_{T_z}^{T_{\infty}} \frac{d}{dT} \{B_{\lambda}(T) \tau_f[\alpha_{\lambda}(u-u_z)]\} dT + \int_{T_z}^{T_{\infty}} \frac{dB_{\lambda}(T)}{dT} \tau_f[\alpha_{\lambda}(u-u_z)] dT \\
 &= -B_{\lambda}(T_{\infty}) \tau_f[\alpha_{\lambda}(u_{\infty}-u_z)] + B_{\lambda}(T_z) \tau_f[\alpha_{\lambda}(u_z-u_z)] + \int_{T_z}^{T_{\infty}} \frac{dB_{\lambda}(T)}{dT} \tau_f[\alpha_{\lambda}(u-u_z)] dT \\
 &= B_{\lambda}(T_z) - B_{\lambda}(T_{\infty}) \tau_f[\alpha_{\lambda}(u_{\infty}-u_z)] + \int_{T_z}^{T_{\infty}} \frac{dB_{\lambda}(T)}{dT} \tau_f[\alpha_{\lambda}(u-u_z)] dT
 \end{aligned}$$

所以，长波辐射传导方程可以变成：

$$\begin{aligned}
 F^{\uparrow}(z) &= \int_0^{\infty} B_{\lambda}(T_z) d\lambda + \int_0^{\infty} \int_{T_z}^{T_s} \frac{dB_{\lambda}(T)}{dT} \tau_f[\alpha_{\lambda}(u_z-u)] dT d\lambda \\
 F^{\downarrow}(z) &= \int_0^{\infty} B_{\lambda}(T_z) d\lambda - \int_0^{\infty} B_{\lambda}(T_r) \tau_f[\alpha_{\lambda}(u_r-u)] d\lambda + \int_0^{\infty} \int_{T_z}^{T_r} \frac{dB_{\lambda}(T)}{dT} \tau_f[\alpha_{\lambda}(u-u_z)] dT d\lambda
 \end{aligned}$$

其中： T_s 为地面温度， T_z 为 z 高度的温度， T_r 为大气顶的温度， τ_f 为透过率， α_{λ} 为吸收系数，与波长及吸收介质的光学路径有关。

$$u_z = \sec z_{\theta} \int_0^z \rho_w dz \quad (\text{水汽})$$

$B_{\lambda}(T)$ 是半球各方向积分的黑体辐射强度

$$B_{\lambda}(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)}$$

c 是光速， $h = 6.6262 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{S}$ ——普朗克常数

$k = 1.3806 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ ——波尔兹曼常数

从 F^{\uparrow} 和 F^{\downarrow} 的表达式来看，要计算它们，关键是求 τ_f ，而 τ_f 与 α_{λ} 有关， α_{λ} 随波长变化很快，且无规律，为了求出 z 高度的辐射通量，必须要对数千条谱线分别求出 α_{λ} 和 $B_{\lambda}(T)$ 。然后积分（求和），计算量很大，因而要设计一些简易的计算方案。

方案一：（Kuo 方案）

主要思路：不考虑单色辐射，而是把长波辐射谱分成有限几个波段，求出各波段的平均黑体辐射和平均透过率，然后求各波段向上和向下的辐射。

USTC 模式的方案是把长度辐射分成四个波段。

第一波段： $\lambda \geq 20 \mu\text{m}$ 为水汽的强吸收段



数值预报与数值模拟方法

——周任君 博士

第二波段： $12.5 \leq \lambda \leq 20 \mu m$ 为水汽和 CO_2 吸收重叠波段

第三波段： $8.0 \leq \lambda \leq 12.5 \mu m$ 为水汽的弱吸收波段（大气窗）

第四波段： $4.44 \leq \lambda < 8.0 \mu m$ 为水汽的强吸收波段

若每个波段的 F^\uparrow 和 F^\downarrow 用 F_j^\uparrow 和 F_j^\downarrow 表示， $j=1,2,3,4$ ，由上面传导方程可得：

$$F_j^\uparrow(z) = B_j(T_z) + \int_{B_j(T_z)}^{B_j(T_s)} \overline{\tau_j}(u_z - u) dB_j(T)$$

若以 $\overline{\tau_j}(u_z - u_s)$ 为 z_s 到 z 之间的介质平均透过率

$$\begin{aligned} F_j^\uparrow(z) &= B_j(T_z) + \overline{\tau_j}(u_z - u_s) B_j(T_s) - \overline{\tau_j}(u_z - u_s) B_j(T_z) \\ &= B_j(T_s) \overline{\tau_j}(u_z - u_s) + B_j(T_z) (1 - \overline{\tau_j}(u_z - u_s)) \end{aligned}$$

即 $F_j^\uparrow(z)$ 等于下层来的辐射，经过 $z_s \rightarrow z$ 气层吸收剩余部分（透过部分）加上本气层放射部分即为此层向上放射部分。

$$\text{因而有： } F_j^\uparrow(z + \Delta z) = F_j^\uparrow(z) \overline{\tau_j}(u_{z+\Delta z} - u_z) + B_j(z + \Delta z) [1 - \overline{\tau_j}(u_{z+\Delta z} - u_z)]$$

$$\text{同理有： } F_j^\downarrow(z) = F_j^\downarrow(z + \Delta z) \overline{\tau_j}(u_{z+\Delta z} - u_z) + B_j(z) [1 - \overline{\tau_j}(u_{z+\Delta z} - u_z)]$$

$$\text{于是： } Q_L = \frac{1}{\rho} \left[\sum_{i=1}^4 F_j^\downarrow(z + \Delta z) - F_j^\downarrow(z) + F_j^\uparrow - F_j^\uparrow(z + \Delta z) \right] / \Delta z$$

计算时，按大气垂直分层，先从上向下算 F_j^\downarrow ，

大气顶无放射介质， $F_j^\downarrow(0) = 0$ 。一层一层往下算：

$$F_j^\downarrow(1) = B_j(T_1) [1 - \overline{\tau_j}(u_1 - u_0)]$$

$$F_j^\downarrow(2) = F_j^\downarrow(1) \overline{\tau_j}(u_1 - u_2) + B_j(T_2) [1 - \overline{\tau_j}(u_1 - u_2)]$$

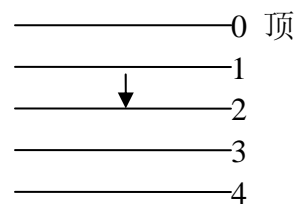
$$F_j^\downarrow(3) = F_j^\downarrow(2) \overline{\tau_j}(u_2 - u_3) + B_j(T_3) [1 - \overline{\tau_j}(u_2 - u_3)]$$

... ..

算到 $F_j^\downarrow(0)$ 一到达地面的长波辐射（长波逆辐射），用它与其他热量一起用地面

热平衡方程算出 T_s （地面温度）后再向上算 F_j^\uparrow （地面 $\overline{\tau_j} = 0$ ）。

Kuo 方案就是设计 $\overline{\tau_j}$ 的计算方案（分四个波段来算）。假设 $\overline{\tau_j}$ 只与气层中介





第八章 模式中物理过程的处理方法

质的光学质量（或光学厚度有关），计算 $\overline{\tau_j}$ 的方法为：

第一波段：

$$\overline{\tau_1^{(w)}}(\Delta z) = 0.20001E_1(Y_{1l}) - 0.3999E_1(Y_{1h}) + 0.199998E_1(Y_{2l})$$

$$\text{其中 } Y_{1h} = \frac{56.234m_v}{\sqrt{m_v + 0.0001}} \quad m_v = \frac{5}{3} \int_z^{z+\Delta z} \rho_w \frac{P}{P_s} dz$$

$$Y_{1l} = Y_{1h} e^{-1.675} \quad Y_{2l} = Y_{1h} e^{-3.325}$$

$$E_1(y) = \int_y^\infty y^{-1} e^{-y} dy \quad \text{为一阶指数积分函数}$$

第二波段：

$$\overline{\tau_2^{(w)}}(\Delta z) = \frac{1}{3} [E_1(0.001791Y_{2l}) - E_1(Y_{2l})]$$

$$\overline{\tau_2^{(c)}}(\Delta z) = \frac{1}{3} \{0.4[E_1(\eta) - E_1(518\eta)] + 0.053[E_1(z_1) - E_1(z_0)]\}$$

$$\text{其中 } \eta = 0.0041\sqrt{m_c}, \quad z_1 = 1.5 \times 10^6 m_c, \quad z_0 = 1258z_1$$

m_c 计算公式用 m_v ，但用 $cmSTP$ 为单位：

第二波段总透过率为：

$$\overline{\tau_2} = \overline{\tau_2^{(w)}} \cdot \overline{\tau_2^{(c)}}$$

第三波段：

$$\overline{\tau_3^{(w)}}(\Delta z) = 0.644[E_1(Y_{3l}) - E_1(Y_{3h})]$$

$$\text{其中 } Y_{3h} = \frac{0.5427m_v}{\sqrt{1+4m_v}}, \quad Y_{3l} = 0.2117Y_{3h}$$

第四波段：

$$\overline{\tau_4^{(w)}}(\Delta z) = 0.2506[E_1(Y_{4h}) - E_1(Y_{4l})]$$

$$\text{其中 } Y_{4h} = 0.01518Y_{1h}, \quad Y_{4l} = 0.2291Y_{1h}$$

有云情况下，云顶、云底和地面一样作为边界，云和地面当成黑体辐射（即对长波辐射是完全吸收和完全放射），即令云中 $\overline{\tau_j} = 0$ ，即从上面或下面进来的辐射全部吸收，而自己则以本身的温度放射黑体辐射。

方案二：

定义一个放射率 ε_f 和平均吸收率 $\overline{\varepsilon_f}$



$$\varepsilon_f(z_1, z_2) = \frac{1}{B(T)} \int_0^\infty [1 - \tau_f(y, T)] B_\lambda(T) d\lambda$$

$$\tilde{\varepsilon}_f(z_1, z_2) = 1 - \bar{\varepsilon}_f(y, T) \quad \text{其中 } y = u_{z_1} - u_{z_2}$$

把长波辐射传导方程变为：

$$F^\downarrow(z) = B(z_1) \cdot \varepsilon_f(z_1) + \int_{B(z_2)}^{B(z_1)} \tilde{\varepsilon}_f(z', z) dB(T)$$

$$F^\uparrow(z) = \sigma T_s^4 + \int_{B(T_s)}^{B(T_z)} \tilde{\varepsilon}_f(z', z) dB(T)$$

根据气层中水汽、 CO_2 、 O_3 等的光学厚度来计算 ε_f 和 $\tilde{\varepsilon}_f$ ，公式复杂，可参看程序和说明书。

第二节 湍流和湍流扩散作用

又称次网格尺度过程，可将大尺度能量向次网格尺度运动扩散，另外还起到滤噪声的作用，增加稳定性。

这里主要讲方程组中 f_u ， f_v ， f_T ， f_q 项的处理， f_u ， f_v ， f_T ， f_q 项可分为水平扩散和垂直扩散部分，以 f_A 代替上面的 f_u ， f_v ， f_T ， f_q ……
有：

$$f_A = \kappa_A \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_A}{\partial z}$$

其中， A 代表 u ， v ， T ， q 等变量

一般水平扩散部分 $\kappa_A \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right)$ 比较小，而垂直扩散部分 $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_A}{\partial z}$ 比较大，而

且通常 τ_A 对于 T 和 q 有另外一种写法：

$$\text{对于 } u, v \rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \quad \text{和} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \quad \bar{\tau} = \rho \kappa_m \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$$

$$\text{对于 } T \rightarrow -\frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial H}{\partial z} \quad H = -\rho C_p \kappa_T \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{或} \quad H = -\rho C_p \kappa_\theta \frac{\partial \theta}{\partial z})$$

$$\text{对于 } q \rightarrow -\frac{1}{\rho} \frac{\partial E}{\partial z} \quad E = -\rho \kappa_q \frac{\partial q}{\partial z}$$



第八章 模式中物理过程的处理方法

关于湍流扩散系数 κ_m 、 κ_T 、 κ_q ，它们不完全相同，但有相同的量级，所以通常令：

$$\kappa_m = \kappa_T = \kappa_q = \kappa_z \quad \text{——垂直湍流扩散系数}$$

它的大小与垂直方向的湍流脉动有关，所以它依赖于地面粗糙度、风速、大气静力稳定度以及高度（离地面的距离）。

一、在边界层 κ_z 的确定：

采用湍流混合长理论来确定 κ_z （参看叶笃正《动力气象》第十章或赵鸣等《边界层气象学教程》）：

$$\kappa_z = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \quad \text{——Prandtl 理论}$$

其中 l 为混合长度（相当于分子运动的平均自由程）， u 为风速。

1、对于中性层结大气

在考虑地面粗糙度的情况下，1932年 Rossby 假设：

$$l = k(z + z_0) \quad \text{——混合长度与高度的线性关系}$$

其中 k 为卡曼(Karman)常数， $k \approx 0.35 \sim 0.43$ （来自实验）。 z_0 为地面粗糙度，即在高度为 z_0 处风速 $u_0 = 0$ 。 z 为实际高度。

z_0 表征地面的凸凹不平的程度：

在光滑水面和泥面： $z_0 \approx 10^{-4} \sim 10^{-5}(m)$

雪面上： $z_0 \approx 10^{-3}(m)$

草地上： $z_0 \approx 10^{-3} \sim 10^{-2}(m)$

树、庄稼地： $z_0 \approx 0.05(m)$

城市中心、山前地： $z_0 \approx 1 \sim 5(m)$

在混合长与高度的线性关系的假定下可推出：

$$\kappa_z = \frac{k^2 u(z + z_0)}{\ln\left(\frac{z + z_0}{z_0}\right)}$$

2、非中性层结

稳定层结（即静力稳定性）对湍流输送有显著影响。这时，混合长 l 与高度 z 的关系为指数关系：



$$l = A(\varepsilon)z^{1-\varepsilon}$$

可求出, $\kappa_z = A^2(\varepsilon) \cdot u \cdot \varepsilon \cdot z^{(1-\varepsilon)} / (z^\varepsilon - z_0^\varepsilon)$

其中 $A(\varepsilon) = \frac{kz_0^\varepsilon}{1-\varepsilon}$, ε 随温度垂直分布而变, 一般小于 1。

在逆温情况下, ε 为正值: $0 < \varepsilon < 0.5$

在对流情况下, ε 为负值: $-0.5 < \varepsilon < 0$

二、在自由大气中:

κ_m 、 κ_T 、 κ_q (κ_z) 受地面粗糙度影响小些, 主要与高度和大气的稳定度关系比较密切, 通常分为白天和夜间、高度、稳定度, 给不同值。如 USTC 模式, 海面上和陆地上空夜间 κ_z 设为常数, 陆地上空白天时, κ_z 的计算公式为:

令 $\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z}$, $\gamma_c = 6^\circ\text{C}/\text{km}$ ——对流层平均温度直减率。

当 $\gamma < \gamma_c$ 时, 很稳定。

$$\kappa_z = \{3 + 2[1 + 10(\gamma_c - \gamma)]^{-1}\} \cdot [1 + 0.2(k - 4)]$$

其中, k 是模式中计算层的标号。

当 $\gamma \geq \gamma_c$ 时,

$$\kappa_z = \{5 + 10[1 - e^{10(\gamma_c - \gamma)}]\} \cdot [1 + 0.2(k - 4)]$$

第三节 边界层处理

在模式最底层 (贴地层) 计算地面向上的 τ_u , τ_v , τ_T 和 τ_q , 公式为:

$$\tau_A = \rho C_D (A_b - A_s) |V_s|$$

其中拖曳系数 C_D 的推导过程与前面 κ_z 类似, 可以得出:

$$\text{在中性层结下, } C_D = \frac{k^2}{\left(\ln \frac{z - z_0}{z}\right)^2}$$

$$\text{在非中性层结下, } C_D = \frac{A^2(\varepsilon) \cdot \varepsilon^2}{(z^\varepsilon - z_0^\varepsilon)^2}$$



第八章 模式中物理过程的处理方法

由于 z_0 和 $A(\varepsilon)$ 分别与地面状况和温度垂直分布有关。

在模式中要详细、充分考虑很难，都做一些假定。如：假定海上、陆地（平的）、高原的差异。

在 USTC 模式中分为：

$$\text{海上：} \quad C_D = 0.002$$

$$\text{平原、低地：} \quad C_D = 0.003$$

$$\text{山地、高原（} z_s \geq 1500m \text{）：} \quad C_D = 0.005$$

美国气象局模式，只分陆地、海洋，但考虑稳定性。

$$\text{陆地：稳定状态 } C_D = 0.0003 \quad \text{不稳定 } C_D = 0.004$$

$$\text{海洋：稳定状态 } C_D = 0.0002 \quad \text{不稳定 } C_D = 0.002$$

UCLA 模式（Mintz—Arakawa）

$$C_D = \begin{cases} 2 \times 10^{-3} \left(1 + \frac{3z_g}{500}\right) & (z_g \text{ — 海拔高度}) \text{ 陆地、冰雪} \\ \min\{10^{-3}(1 + 0.07V_1), 2.5 \times 10^{-3}\} & (V_1 \text{ — 风速}) \text{ 海上} \end{cases}$$

如考虑 C_D 随稳定度变化，设 C_{DN} 为中性时的 C_D 。

$$C_D = \begin{cases} C_{DN} \left(1 + \frac{7\Delta T_1}{V_1}\right)^{-1} & \Delta T_1 \geq 0 \\ C_{DN} \left(1 + \sqrt{\frac{|\Delta T_1|}{V_1^2}}\right) & \Delta T_1 < 0 \end{cases}$$

ΔT_1 是最下层格点处与地面温度之差，另外还有些方案，参看《边界层气象学教程》。

计算地面到之上地层之间的动量，热量和水汽的交换， τ_u ， τ_v ， τ_T ， τ_q 从地面向上的通量，在模式中需要设计一个边界层，和一个下垫面层（下垫面层可以是一个薄层，也可以是一个模式（如海洋模式），要计算地面向上的感热和水汽通量）， τ_{T_0} 和 τ_{q_0}

1. SH 和 LH 公式为

$$SH = \rho_s C_D C_p (T_s - T_b) |v_s|$$

$$LH = \rho_s C_D C_p (q_s(T_s) - q_b) |v_s|$$

其中， SH 为地面向上的感热通量， LH 为湿地面或海面向上蒸发时吸收的蒸发热（或称潜热），当它凝结时还给大气。



为了要计算 SH 和 LH ，或 E_v （蒸发量），要知道 T_s （地面或海面温度），用热平衡方程来求

$$\Delta S_g + F^\downarrow(0) - SH - LH - h_s - \sigma T_s^4 = 0$$

其中 h_s 是地表向下的热传导。

2. 地面向下热量输送 h 与土壤（或海水）的温度垂直梯度有关

$$h = \lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial z} \quad T^* \text{ 是土壤（或海水）温度}$$

而土壤温度的变化又与向下输送的热量（净得量）有关：

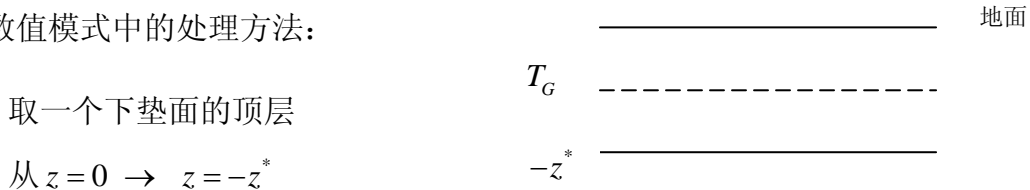
$$\frac{\partial T^*}{\partial t} = \frac{1}{\rho_e C_e} \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\lambda^*}{\rho_e C_e} \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} = k_e \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2}$$

这是土壤温度的预报方程。

其中 ρ_e 和 C_e 分别是介质的密度和热容量。

$\lambda^* = \rho_e C_e k_e$ ， λ^* 和 k_e 都叫做介质的热传导系数， k_e 是对单位质量介质的， λ^* 是对单位体积介质的，而且转换成了温度变化的单位。

在数值模式中的处理方法：



取 $\Delta z = \frac{1}{2} z^*$ 处的土壤温度为 T_G ，且设 z^* 正好取在地面上热量往下正好传不到的地方，则：

$$h_s = \lambda^* \left. \frac{\partial T^*}{\partial z} \right|_s = \lambda^* \frac{(T_s - T_G)}{\frac{1}{2} z^*} = 2 \rho_e C_e k_e (T_s - T_G) / z^*$$

$$\frac{\partial T_G}{\partial t} = \frac{h_s - h_{z^*}}{\rho_e C_e z^*} \quad \text{但 } h_{z^*} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial T_G}{\partial t} = \frac{h_s}{\rho_e C_e z^*} = 2 k_e \frac{T_s - T_G}{z^{*2}}$$

在我们模式中：

$$\text{海洋上取 } z^* = 1m, \quad k_e = 2.0cm^2/s$$



第八章 模式中物理过程的处理方法

陆地上取 $z^* = 40\text{cm}$, k_e 随土壤而变, 沙漠中砂土 k_e 小些, 可查表

ρ_e , C_e 也可查表。

3. T_s 的确定

把前面算出的 ΔS_g 和 $F^\downarrow(0)$ 代入地面热平衡方程, 其他项都写成与 T_s 有关的形式, 然后用迭代的方法求出 T_s 。

即用:

$$\sigma T_s^4 + SH(T_s) + LH(T_s) + h_s(T_s) = \Delta S_g + F^\downarrow(0)$$

求 T_s 。

第四节 地形作用

分为热力作用和动力作用。

1、地形的热力作用

1. 对辐射状况的影响:

- (1) 地形以上气层薄, 对太阳辐射吸收和散射少, 地面可吸收的太阳辐射多, 但高原积雪又会使反照率大, 吸收少。
- (2) 地面海拔高, 对长波辐射而言, 近于黑体辐射, 对其上和四周空气加热多。

2. 对感热而言, C_D 大, 是夏天向上感热变大。

3. 对潜热而言, 地形迎风坡积云对流多, 凝结潜热释放多。

总而言之, 大地形使其四周空气加热多, 常常起热对流作用。

2、地形动力作用

1. 爬坡作用, 产生垂直运动。
2. 绕流, 在背风坡产生动力槽、尾涡。

3、模式中对地形的处理

1. 考虑热力作用, 给不同的 C_D , 不同的反照率, 长波辐射作为黑体处理。



2. 考虑动力作用。

下边界条件：

$$Z \text{ 坐标时, } W_s = V_s \cdot \nabla Z_s$$

$$P \text{ 坐标时, } \omega_s = \frac{\partial P_s}{\partial t} + V_s \cdot \nabla P_s$$

或采用

第五节 凝结加热

分为大尺度凝结和小尺度对流。(本讲义略)



附录一 Fortran 在大气科学数值模拟中的运用

● Fortran=Formula Translation “公式翻译”

Fortran 的起源,要追溯到 1954 年 IBM 公司的一项计划。由约翰·贝克斯(John Backus)领导的一个小组,尝试着在 IBM 704 计算机上面发展一套程序,它可以把使用接近数学语言的文字,翻译成机械语言。1957 年,他们提交了第一套 Fortran 编译器, Fortran 语言也就因此诞生。

旧版的 Fortran77 是在 1978 年由美国国家标准局(ANSI)所正式公布的,之后改版有 1992 年提出的 Fortran90 以及 1997 年的 Fortran95,本章教学将采用 Fortran90。

● 典型 Fortran 编译器简介:

Windows 平台:

Fortran Powerstation 4.0(Microsoft)、Compaq Visual Fortran 6.x(Compaq)、Intel Visual Fortran(Intel)

Unix/Linux 平台:

自带 F77、F90 编译器, Intel Fortran、PGI Fortran

一、FORTRAN 基础

1、字符集

字符集是指使用 FORTRAN 的时候,所能使用的所有字符有符号。FORTRAN 所能使用的字符集有:

- ◆ 英文 26 个字母: 大小写不分
- ◆ 数字: 0 到 9
- ◆ 22 个特殊符号: 有冒号、等号、加号、减号、惊叹号...等等

2、程序书写格式

FORTRAN 程序代码的写作格式有两种, **FREE FORMAT(自由格式)**以及 **FIXED FORMAT(固定格式)**。简单来说, FIXED FORMAT 是属于旧式的写法,



附录一 Fortran 在大气科学数值模拟中的运用

它在写作版面上有很多限制。FREE FORMAT 是 FORTRAN90 之后的新写法，取消了许多旧的限制。FIXED FORMAT 程序的扩展名通常为*.F 或*.FOR，而 FREE FORMAT 则通常以*.F90 为扩展名。**建议采用 FREE FORMAT 来编写程序。**

FIXED FORMAT:

固定格式之中，规定了程序代码每一行中每个字符字段的意义。如下表所示：

第 1 个字符	如果是字母 c,C 或*(星号)，表示此行是批注
第 1-5 个字符	如果这边是数字，表示这一行的代号，否则应为空白
第 6 个字符	如果是 0 以外的字符，表示这一行程序会接续上一行
第 7-72 个字符	FORTRAN 程序代码的写作区域
第 73 个字符之后	不使用，超过部份会被忽略，有的编译器会有错误讯息

FREE FORMAT:

FREE FORMAT 基本上允许非常自由的写作格式，它没有再去规定每一行的第几个字符有什么作用。需要注意的事项只有下面几点：

- ◆ **感叹号「！」后面的文字都是批注。**
- ◆ **每行可以写作 132 个字符。** (**注意** 并不是无限长)
- ◆ **行号放在每行程序的最前面。**
- ◆ **一程序代码的最后如果是符号&，代表下一行程序会和这一行连接。**

第一个 Fortran 程序：

```
print*, 'Hello, World'
end
```

3、变量

- ◆ 整数
整数的声明法很简单，如下：
`integer a` !声明a为一个整数，内定范围为 $2^{32} \sim -2^{32}$
- ◆ 浮点数
`real a` !声明a为一个浮点数，默认值为单精度浮点数
`real*4 a` !声明a为一个单精度浮点数，大小为4byte
`real*8 a` !声明a为一个双精度浮点数，大小为8byte
单精度可记录的数值最大为 3.4×10^{38} ，最小为 -3.4×10^{38}
- ◆ 复数
FORTRAN 是少数有提供复数型态的程序语言，声明方法如下
`complex a`
设定复数的方法如下：



`a=(x, y)` !x 为实部, y 为虚部

例如 `a=(3,8)`, 就表示 a 是 $3+8i$

◆ 字符及字符串

声明一个字符的方法如下

```
character a
```

声明字符串的方法如下

```
character(10) a !声明a这个字符串的最大长度为10
```

另外使用下面几种声明语法也是相同的结果

```
character*10 a
```

```
character(len=10) a
```

```
character*(10) a
```

声明好之后, 要给予这个变量一个初始值的方法如下:

```
a="字符串内容" !可以采用单引号或双引号
```

4、变量名称的取名原则

变量名称的长度限制随着各家编译器而有所不同。**Fortran77规定6个字符**, **Fortran90则规定为31个字符**。变量的名字最好是取成一个有意义的英文单字, 这样可以减少程序写作时出错的机会。**在Fortran中变量具有隐式声明, 但容易造成错误。为了避免编写程序时错误的发生, 通常在程序中添加 `implicit none` 来取消变量的隐式声明。**

而常数的声明通常有以下两种方式:

◆ `real pi`

```
parameter(pi=3.14159)
```

◆ `real, parameter :: pi=3.14159`

5、程序结构

Fortran 的程序结构如下:

```
program XXX
```

```
implicit none
```

```
integer int1, int2
```

```
real real1, real2
```

```
.....
```

变量声明区

```
read(*,*) int1, int2
```

```
write(*,*) int1+int2
```

```
.....
```

程序主体



```
stop  
end
```

其中变量声明区不能与程序主体交错。

6、输入/输出

◆ 输入

输入指令的基本语法如下：

```
integer a  
read(*,*) a      !读入一个整数，并存储到 a 内  
read(5,*) a      !同上  
read(unit=5,fmt=*) a !同上
```

第一个星号表示输入的来源为标准的输入设备，第二个星号表示不指定输入格式。标准的输入设备为键盘输入，其设备号为 5，所以可以用星号代替键盘输入。

◆ 输出

write 指令就是作为输出用，write(*,*)之中两个星号各有各的意义，前面的星号表示输出到缺省的输出设备，即屏幕；后面的星号表示采用自由格式输出。

下面三种输出格式其实会得到一样的结果：

```
write(*,*) "hello"  
write(6,*) "hello"  
write(unit=6,fmt=*) "hello"
```

关于 write 还有几点要注意：

1. 每一次执行 write 指令之后，会自动换到下一行来准备做下一次的输出。
2. 因为双引号是用来包装字符串用的，所以想要印出双引号的时候，要连用两个双引号，或者双引号和单引号结合使用。
3. Fortran90 可以使用双引号或单引号来包装字符串，Fortran77 标准中只能使用单引号，不过大部份的 Fortran77 还是可以接受双引号。

print 指令用法大致上和 write 相同，只是专门针对屏幕作输出，因此少了指定输出的能力，它也具有限定输出格式的功能，其语法如下：

```
print *, "输出字符串"
```

◆ 格式化输出

格式化输出的控制字符非常丰富，但是常用的并不多，在这里只示范几个比较常用的部份。



a) 关于 I

```
write(*,“(I5)”) 100 !用 5 个字符的字段来输出一个整数
```

```
output: __ 1 0 0
```

```
write(*,“(I3)”) 100000
```

```
output: * * *
```

输出 10000 需要 5 个字段，但是输出格式只给三个字的字段，因此印出三颗星号作为警告

```
write(*,“(I5.4)”) 3 !输出五个字符字段，至少输出 4 位，不足补 0
```

```
output: _ 0 0 0 3
```

b) 关于 F

```
write(*,“(F9.3)”) 123.45 !输出 9 个字符字段，包括小数部份 3 位数
```

```
output: __ 1 2 3 . 4 5 0
```

c) 关于 E

```
write(*,“(E15.7)”) 123.45 !用科学表示法，输出 15 个字符，小数 7 位
```

```
output: __ 0 . 1 2 3 4 5 0 0 e + 0 3
```

d) 关于 A

```
write (*,“(A10)”) “hello” !用 10 个字符宽度输出字符串
```

```
output: _ _ _ _ _ h e l l o
```

```
write (*,“(A3)”) “hello”
```

```
output: h e l
```

e) 关于 B

```
write (*,“(B6.5)”) 3 !把 3 变成二进制，6 个字符宽，至少输出 5 位
```

```
output: _ 0 0 0 1 1
```

f) 关于 X

```
write (*,“(3X)”) 20 !输出前先填 3 个空格符
```

```
output: _ _ _ 2 0
```

7、选择结构

IF...THEN...ELSE 基本语法如下：

```
if(逻辑表达式) then
    执行动作 1
else
    执行动作 2
end if
```

逻辑表达式：



	Fortran 90	Fortran 77
相等	==	.eq.
不相等	/=	.ne.
大于	>	.gt.
大于等于	>=	.ge.
小于	<	.lt.
小于等于	<=	.le.
.and.	如果两边式子都成立，整个条件就成立	
.or.	两边的式子只要有一个成立，整个条件就成立	
.not.	如果后面的式子不成立，整个式子就算成立	
.eqv.	两边式子的逻辑运算结果相同时，整个式子就成立	
.neqv.	两边式子的逻辑运算结果不同时，整个式子就成立	

8、循环结构

DO 循环基本语法如下：

```
do 变量=起始值, 终止值, 步长
  执行动作
end do
```

DO WHILE 的基本语法如下：

```
do while(逻辑运算)
  执行动作
end do
```

9、数组的声明与使用

声明数组有以下几种方法：

```
integer a(10)           !声明a这个数组有10个元素
integer, dimension(10) :: a  ! 同上，另一种作法
```

而在Fortran77当中，必需用下面这种方法

```
integer a
dimension a(10)
```

请记住在Fortran当中的**数组是从1开始算**，也就是a(1), a(2)一直到a(10)

要使用已经声明的数组，直接利用其index即可，例如：

```
a(1)=18
```




也可以利用DATA这个叙述

```
integer a(3)
data a /36, 24, 36/
```

在Fortran90中，还可以省略data这个叙述

```
integer :: a(3) = (/36, 26, 36/)
```

使用这个方式必需注意，**括号跟除号之间不能有空格，并且冒号不能省略。**

10、文件的基本读写操作

- ◆ 文件的打开

```
open([unit=]unit, file="...", .....
```

- ◆ 文件的关闭

```
close([unit]=unit, ....)
```

- ◆ 文件的读写

```
read(unit, ...) write(unit, ...)
```

11、子程序 SUBROUTINE

写程序时，可以把某一段常常被使用、具备特定功能的程序代码独立出来，包装成子程序，以后只要经由调用的CALL 指令就可以执行这一段程序代码。一个包含子程序的Fortran程序在结构上大概如下：

```
program main
  ...
  call sub1()
  ...
  call sub2()
  ...
end

subroutine sub1()
  ...
end subroutine

subroutine sub2()
  ...
end subroutine
```

主程序不一定要放在程序的最开头，它可以安排在程序中的任意位置，可以先写子程序再写主程序也无妨。子程序的最后一个指令通常是return，表示程序



要返回原来调用它的地方来继续执行程序。在主程序内调用subroutine就使用call这个指令。Fortran在传递参数的时候是使用**传址调用(call by reference)**，这个意思是说调用时所传递出去的参数，和子程序中接收的参数，它们会使用相同的内存地址来记录数据。

12、函数 FUNCTION

函数的运作基本上跟SUBROUTINE非常类似，它也是要经由调用才能执行，也可以独立声明变量，参数传递的方法也如同SUBROUTINE一样，它和子程序只有两点不同：

- ◆ **调用自订函数之前必需先声明。**
- ◆ **函数执行后会传回一个数值。**

函数的声明方法如下：

```
real, external :: add
```

其中external这个字表示声明的是个函数。

二、差分法 Fortran 实例

计算地转风：

$$\text{用 } P \text{ 坐标地转风公式 } \begin{cases} u_g = -\frac{g}{f} \frac{\partial Z}{\partial y} \\ v_g = \frac{g}{f} \frac{\partial Z}{\partial x} \end{cases}, \text{ 编程, 计算地转风}$$



附录二 Grads 的应用

- ◆ **Grads = Grid Analysis and Display System**

- ◆ 本章实例教学需要如下两个文件：

Model.dat 数据文件（二进制文件），5天的全球格点数据(72×46)

Modelctl Grads 数据描述文件（文本文件），用来说明数据文件 Model.dat 中的数据。

- ◆ 启动 Grads：

运行\PCGrADS\win32e\grads.exe，在 ga->命令提示符下开始交互操作。

1、基本使用操作

打开描述文件

```
ga-> open d:\example\modelctl
```

查询数据文件说明

```
ga-> q file
```

显示数据变量

```
ga-> d ps
```

显示具体时刻具体位置的数据

```
ga-> c
```

```
ga-> set lon -90
```

```
ga-> set lat 40
```

```
ga-> set lev 500
```

```
ga-> set t 1
```

```
ga-> d z
```

```
ga-> set lon -180 0
```

```
ga-> d z
```

```
ga-> c
```

```
ga-> set lat 0 90
```

```
ga-> d z
```

```
ga-> c
```

```
ga-> set t 1 5
```



```
ga-> d z
```

```
ga-> c
```

```
ga-> set lon -90
```

```
ga-> set lat -90 90
```

```
ga-> set lev 1000 100
```

```
ga-> set t 1
```

```
ga-> d t
```

```
ga-> d u
```

```
ga-> c
```

```
ga-> set lon -180 0
```

```
ga-> set lat 40
```

```
ga-> set lev 500
```

```
ga-> set t 1 5
```

```
ga-> d z
```

```
ga-> c
```

```
ga-> set lon -180 0
```

```
ga-> set lat 0 90
```

```
ga-> set lev 500
```

```
ga-> set t 1
```

```
ga-> d (t-273.16)*9/5+32
```

```
ga-> c
```

```
ga-> d sqrt(u*u+v*v)
```

```
ga-> d mag(u,v)
```

```
ga-> c
```

```
ga-> d ave(z, t=1, t=5)
```

```
ga-> d z-ave(z, t=1, t=5)
```

```
ga-> c
```

```
ga-> d z-ave(z, x=1, x=72)
```

```
ga-> d z
```

```
ga-> c
```

```
ga-> d z(t=2)-z(t=1)
```

```
ga-> d z(t+1)-z
```

```
ga-> d z.2-z.1
```

```
ga-> c
```



```
ga-> d hcurl(u,v)
ga-> c
ga-> d vint(ps,q,275)

ga-> c
ga-> set cint 30
ga-> d z
ga-> c
ga-> set ccolor 3
ga-> d z
ga-> c
ga-> set gxout shaded
ga-> d hcurl(u,v)
ga-> c
ga-> set csmooth on
ga-> d hcurl(u,v)
ga-> set gxout contour
ga-> set ccolor 0
ga-> set cint 30
ga-> d z
ga-> draw title 500mb Heights and Vorticity

ga-> c
ga-> set gxout vector
ga-> d u;v
ga-> d u;v;q
ga-> d u;v;hcurl(u,v)

ga-> c
ga-> d mag(u,v); q*10000

ga-> c
ga-> set gxout stream
ga-> d u;v;hcurl(u,v)

ga-> c
ga-> set gxout grid
ga-> d u

ga-> c
ga-> set lon -110 -70
ga-> set lat 30 45
ga-> set mpdset nam
```



```
ga-> set  digsize  0.2
ga-> set  dignum   2

ga-> d  u

ga-> set  lon  -140  -40
ga-> set  lat   15   80
ga-> set  mpvals  -120  -75  25  65
ga-> set  mproj  nps
ga-> set  gxout  contour
ga-> set  cint   30
ga-> d  z
```

2、Fortran 写 Grads 数据文件

练习 1 中数据文件 zuv.dat(文本文件)转二进制数据文件 zuv.grd 的 Fortran 代码:

```
implicit none

! 声明变量
real z(12,8), u(12,8), v(12,8)
integer i,j

! 从文本文件 zuv.dat 读入 z,u,v 数据
open(10,file='d:\example\zuv.dat')
read(10,*)((z(i,j),j=1,8),i=1,12)
read(10,*)((u(i,j),j=1,8),i=1,12)
read(10,*)((v(i,j),j=1,8),i=1,12)
close(10)

! 将 z,u,v 写入二进制文件 zuv.grd
open(11,file='d:\example\zuv.grd',form='binary')
write(11)((z(i,j),i=1,12),j=1,8)
write(11)((u(i,j),i=1,12),j=1,8)
write(11)((v(i,j),i=1,12),j=1,8)
close(11)

end
```

二进制数据文件 zuv.grd 的描述文件 zuvctl:



```
dset d:\example\zuv.grd
undef -9.99e33
xdef 12 linear 110 5
ydef 8 linear 10 5
zdef 1 levels 1000
tdef 1 linear jan2006 1dy
vars 3
z 0 99 geopotential heights
u 0 99 u winds
v 0 99 v winds
endvars
```

3、Matlab 写 Grads 数据文件

```
fid=fopen('zuv.grd', 'wb');
fwrite(fid, z, 'float32');
fwrite(fid, u, 'float32');
fwrite(fid, v, 'float32');
fclose(fid);
```




实习一 差分方法

- 一. 用差分代替微分, 计算地转风、散度、涡度和地转风涡度。
(采用 P 坐标的地转风公式)

资料说明:

1. 本练习所用资料存于 `zuv.dat` 文件中, 其中包含位势高度 Z , 风速分量 u 和 v 。
2. 计算范围: $10^\circ \text{ N} \sim 45^\circ \text{ N}$, $110^\circ \text{ E} \sim 165^\circ \text{ E}$. 用 $5^\circ \times 5^\circ$ 经纬度网格, 共 12×8 个格点 ($i=1, 12, j=1, 8$), 1° 纬距=111 公里。
3. 资料排列顺序: 用的是 E15.6 输入格式, 每排 4 个数, 依 $Z(12, 8)$, $u(12, 8)$, $v(12, 8)$ 的次序, 由南向北, 由西向东排列。即最先读 $i=1, j=1, 8$, 再读 $i=2, j=1, 8$ 读完 z 再读 u 和 v 。

要求:

1. 采用中央差格式。
2. 写出计算公式 (包括公式的微分形式和差分形式)、计算程序。

上机计算出结果并讨论之。



实习二 时间积分格式

用差分法解下列方程组：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - g \frac{\partial Z}{\partial x} + fv$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - g \frac{\partial Z}{\partial y} - fu$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -u \frac{\partial Z}{\partial x} - v \frac{\partial Z}{\partial y} - H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

其中 $H = 8000 \text{ m}$ 为标高。

要求：

解方程时，时间积分格式用蛙跃格式，起步用欧拉后差格式（即松野格式）。积分 24 小时，求出 24 小时后的 Z, u, v 。（即做 24 小时预报）。设积分过程中边界值不变。时间步长由稳定性条件来决定。

资料说明：

4. 本练习所用资料存于 `zuv00.dat` 文件中，其中包含位势高度 Z ，东西风分量 u 和 v 。用来作解方程时的初值。
5. 计算范围： $90^\circ \text{ E} \sim 165^\circ \text{ E}$ ， $0^\circ \sim 55^\circ \text{ N}$ 。用 $5^\circ \times 5^\circ$ 经纬度网格，共 16×12 个格点， 1° 纬距=111.195 公里。
6. 资料排列顺序：由西向东，由南向北。每排 8 个数，依 $Z(16, 12)$ ， $u(16, 12)$ ， $v(16, 12)$ 的次序排列。



数值预报和数值模拟方法练习 (二)

主讲：周任君 陈月娟

用差分法解下列方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - g \frac{\partial Z}{\partial x} + fv$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - g \frac{\partial Z}{\partial y} - fu$$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -u \frac{\partial Z}{\partial x} - v \frac{\partial Z}{\partial y} - H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

其中 $H = 8000 \text{ m}$ 为标高。

要求：

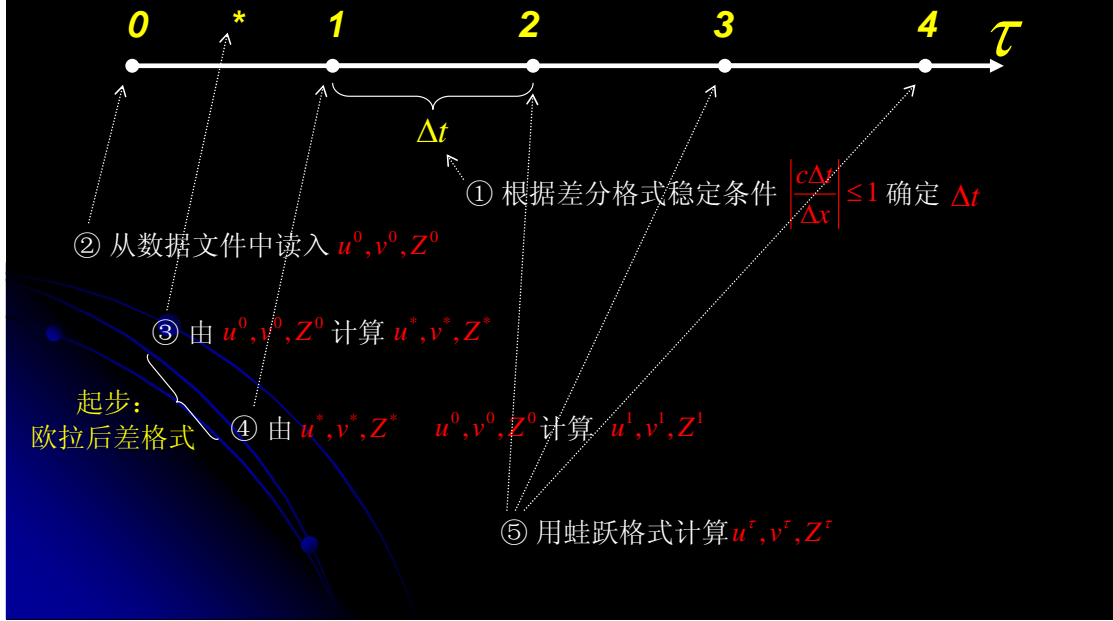
解方程时，时间积分格式用**蛙跃格式**，**起步用欧拉后差格式**（即松野格式）。积分24小时，求出24小时后的 Z, u, v 。（即做24小时预报）。设积分过程中边界值不变。时间步长由**稳定性条件**来决定。

资料说明：

本练习所用资料存于 `zuv00.dat` 文件中，其中包含位势高度 Z ，东西风分量 u 和 v 。用来作解方程时的初值。计算范围： $90^\circ \text{ E} \sim 165^\circ \text{ E}$ ， $0^\circ \sim 55^\circ \text{ N}$ 。用 $5^\circ \times 5^\circ$ 经纬度网格，共 16×12 个格点， 1° 纬距= 111.195 公里。资料排列顺序：由西向东，由南向北。每排8个数，依 $Z(16,12), u(16,12), v(16,12)$ 的次序排列。



求 u^τ, v^τ, Z^τ ($\tau = 1, 2, 3 \dots$)



起步：欧拉后差格式（Matsuno格式）

两步显式格式

● 第一步

$$u_{i,j}^* = u_{i,j}^0 - \frac{\Delta t u_{i,j}^0}{2d} (u_{i+1,j}^0 - u_{i-1,j}^0) - \frac{\Delta t v_{i,j}^\tau}{2d} (u_{i,j+1}^0 - u_{i,j-1}^0) - \dots$$

● 第二步

$$u_{i,j}^1 = u_{i,j}^0 - \frac{\Delta t u_{i,j}^*}{2d} (u_{i+1,j}^* - u_{i-1,j}^*) - \frac{\Delta t v_{i,j}^*}{2d} (u_{i,j+1}^* - u_{i,j-1}^*) - \dots$$

● 稳定性条件： $\left| \frac{c \Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$



蛙跃格式（中央差格式）

- 时间中央差
- 空间中央差

$$u_{i,j}^{\tau+1} = u_{i,j}^{\tau-1} - \frac{\Delta t u_{i,j}^{\tau}}{d} (u_{i+1,j}^{\tau} - u_{i-1,j}^{\tau}) - \frac{\Delta t v_{i,j}^{\tau}}{d} (u_{i,j+1}^{\tau} - u_{i,j-1}^{\tau}) - \dots$$

$$u_{i,j}^2 = u_{i,j}^0 - \frac{\Delta t u_{i,j}^1}{d} (u_{i+1,j}^1 - u_{i-1,j}^1) - \frac{\Delta t v_{i,j}^1}{d} (u_{i,j+1}^1 - u_{i,j-1}^1) - \dots \quad \tau=1$$

$$u_{i,j}^3 = u_{i,j}^1 - \frac{\Delta t u_{i,j}^2}{d} (u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2) - \frac{\Delta t v_{i,j}^2}{d} (u_{i,j+1}^2 - u_{i,j-1}^2) - \dots \quad \tau=2$$

.....



2006-5-17 20:15

ex2. f90

```

implicit none
real z0(16,12), u0(16,12), v0(16,12)
real z1(16,12), u1(16,12), v1(16,12)
real z2(16,12), u2(16,12), v2(16,12)
integer i, j, t, dt, sn
real, parameter ::g=9.8, omega=7.29E-5, H=8000, Re=6371000, pi=3.1415926
real ::lat, f, dx, dy= Re*5*pi/180

! Step 1: 确定deltaf
dt=900
sn=24*3600/dt
! 取deltaf为15分钟
! 确定计算步数

! Step 2: 读入z0, u0, v0
open(10, file='zuv00.dat')
read(10,*) z0, u0, v0
close(10)

z1=z0; z2=z0;
u1=u0; u2=u0;
v1=v0; v2=v0;

open(12, file='zuv.dat', form='binary')
write(12) z0, u0, v0

! Step 3: 起步, 采用松野格式(欧拉后差格式)
! 第一步, 先计算带*的量, 下面代码中将*的量存为u2, v2, z2
do j=2, 11
  lat=(j-1)*5
  dx=Re*cos(lat*pi/180)*5*pi/180
  f=2*omega*sin(lat*pi/180)
  do i=2, 15
    u2(i, j)=u0(i, j)+dt*(-u0(i, j)*u0(i+1, j)-u0(i-1, j))/(2*dx)-v0(i, j)*(u0(i, j+1)-u0(i, j-1))/(2*dy) &
      -g*(z0(i+1, j)-z0(i-1, j))/(2*dx)+f*v0(i, j)
    v2(i, j)=v0(i, j)+dt*(-u0(i, j)*v0(i+1, j)-v0(i-1, j))/(2*dx)-u0(i, j)*(v0(i, j+1)-v0(i, j-1))/(2*dy) &
      -g*(z0(i, j+1)-z0(i, j-1))/(2*dy)-f*u0(i, j)
    z2(i, j)=z0(i, j)+dt*(-u0(i, j)*(z0(i+1, j)-z0(i-1, j)))/(2*dx)-v0(i, j)*(z0(i, j+1)-z0(i, j-1))/(2*dy) &
      -H*((u0(i+1, j)-u0(i-1, j))/(2*dx)+(v0(i, j+1)-v0(i, j-1))/(2*dy))
  end do
end do

```

```

ex2.ctl文件内容如下:

dset E:\research\ex2\zuv.dat
title Ex2
undef -9999
xdef 16 linear 90 5
ydef 12 linear 0 5
zdef 1 levels 1000
tdef 97 linear 01May2006 15mn
vars 3
z 0 99 z
u 0 99 u
v 0 99 v
endvars

```

! 将z, u, v的变量赋值为z0, u0, v0
! 下面程序代码中只修改网格内点
! 这样可以保证边界值不变

! 指定输出的二进制文件名
! 输出初始时刻的z, u, v

! Step 3: 起步, 采用松野格式(欧拉后差格式)
! 第一步, 先计算带*的量, 下面代码中将*的量存为u2, v2, z2

! 纬度
! 经向网格距



```

! 第二步, 用z0, u0, v0以及前步计算的*量计算u1, v1, z1
do j=2, 11
  lat=(j-1)*5
  dx=Re*cos(lat*pi/180)*5*pi/180
  f=2*omega*sin(lat*pi/180)
  do i=2, 15
    u1(i, j)=u0(i, j)+dt*((-u2(i, j))*(u2(i+1, j)-u2(i-1, j)))/(2*dx)-v2(i, j)*(v2(i, j+1)-v2(i, j-1))/(2*dy) &
      -g*(z2(i+1, j)-z2(i-1, j))/(2*dx)+f*v2(i, j))
    v1(i, j)=v0(i, j)+dt*((v2(i+1, j)-v2(i-1, j)))/(2*dx)-u2(i, j)*(v2(i, j+1)-v2(i, j-1))/(2*dy) &
      -g*(z2(i, j+1)-z2(i, j-1))/(2*dy)-f*u2(i, j))
    z1(i, j)=z0(i, j)+dt*((-u2(i, j))*(z2(i+1, j)-z2(i-1, j)))/(2*dx)-v2(i, j)*(z2(i, j+1)-z2(i, j-1))/(2*dy) &
      -H*((u2(i+1, j)-u2(i-1, j))/(2*dx)+(v2(i, j+1)-v2(i, j-1))/(2*dy)))
  end do
end do
write(i2) z1, u1, v1
! 输出第一步的z, u, v

! Step 4: 循环采用蛙跃格式
do t=2, sn
  do j=2, 11
    lat=(j-1)*5
    dx=Re*cos(lat*pi/180)*5*pi/180
    f=2*omega*sin(lat*pi/180)
    do i=2, 15
      u2(i, j)=u0(i, j)+dt*((-u1(i, j))*(u1(i+1, j)-u1(i-1, j))/dx-v1(i, j)*(v1(i, j+1)-v1(i, j-1))/dy) &
        -g*(z1(i+1, j)-z1(i-1, j))/dx+f*v1(i, j))
      v2(i, j)=v0(i, j)+dt*((-u1(i, j))*(v1(i+1, j)-v1(i-1, j))/dx-v1(i, j)*(v1(i, j+1)-v1(i, j-1))/dy) &
        -g*(z1(i, j+1)-z1(i, j-1))/dy-f*u1(i, j))
      z2(i, j)=z0(i, j)+dt*((-u1(i, j))*(z1(i+1, j)-z1(i-1, j))/dx-v1(i, j)*(z1(i, j+1)-z1(i, j-1))/dy) &
        -H*((u1(i+1, j)-u1(i-1, j))/dx+(v1(i, j+1)-v1(i, j-1))/dy))
    end do
  end do
  write(i2) z2, u2, v2
! 输出每步的z, u, v

u0=u1; v0=v1; z0=z1;
u1=u2; v1=v2; z1=z2;
end do
close(i2)
end

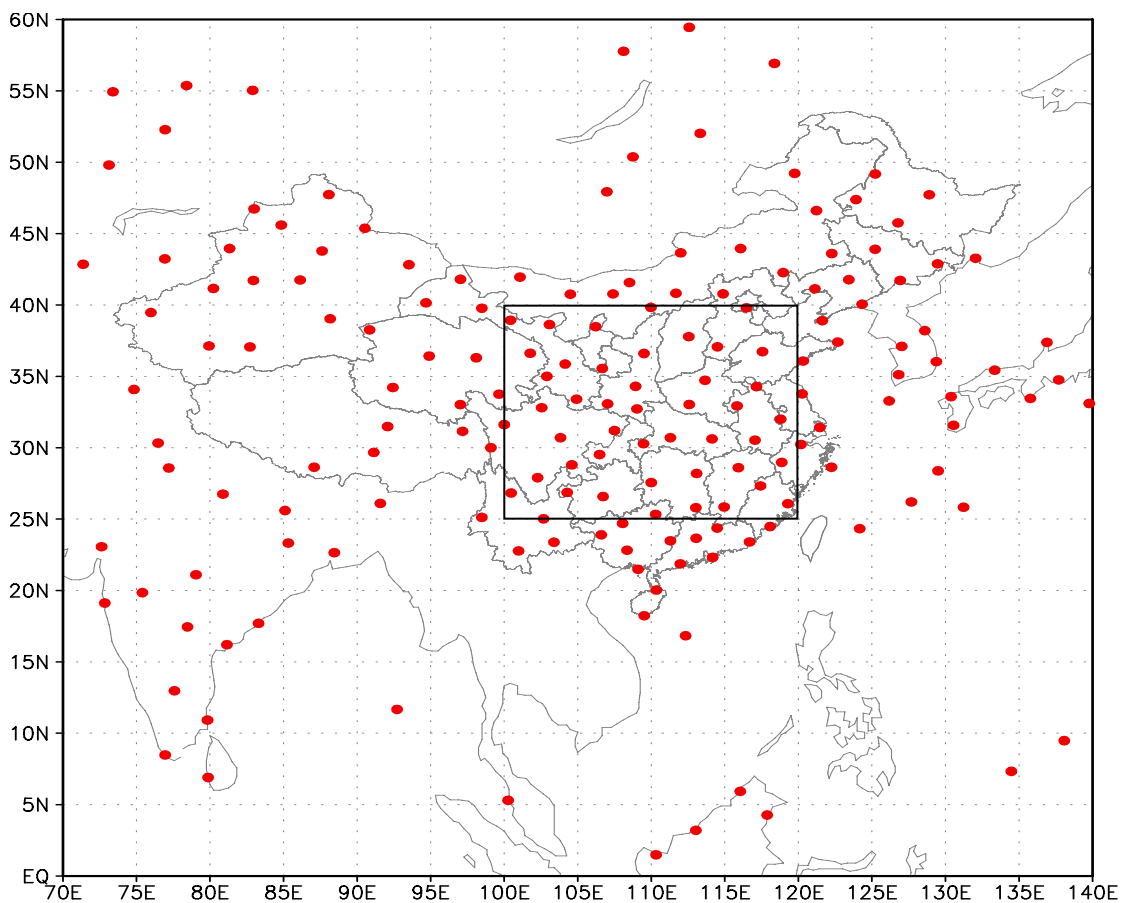
```




实习三 水平内插

采用 $f_g = \frac{\sum_{i=1}^N f_i w_i}{\sum_{i=1}^N w_i}$ 将测站资料 f_i 插值到格点 f_g ，其中 $w_i = \frac{1}{1+r_i^2}$ 。

数据位于文件 data.txt。总共 177 个测站资料，第 1 列测站经度，第 2 列测站纬度，第 3 列 Z，第 4 列风速，第 5 列风向，其中正北风为 0，正东风 90，正南风 180， ...





实习四 USTC9 层模式

采用 USTC9 层模式进行数值预报和数值模拟分析。



致 谢

该讲义一些章节来自于陈月娟教授提供的讲义底稿，特此感谢！