

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. N. Smirnova, A. I. Bogdanova, Zuojin Zhu, A. S. Manenkova, N. N. Smirnov,
Mathematical modeling of traffic flows using continua approach. Visco–elastic effect
in traffic flows, *Matem. Mod.*, 2014, Volume 26, Number 7, 54–64

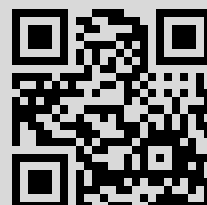
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms
of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 202.38.72.165

February 8, 2017, 05:00:10



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АВТОТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ С ЭЛЕМЕНТАМИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

© 2014 г. *М.Н. Смирнова, А.И. Богданова, Z.J. Zhu^{*}, А.С. Маненкова,
Н.Н. Смирнов*

Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

^{*} Multiphase-Reactive-Flow Division, DTSE, Hefei, Anhui, 230026, P.R. China
sashabogdanova@gmail.com; ebifsun1@mech.math.msu.su

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №13-01-12056) и NSFC (10972212).

Представлено дальнейшее развитие модели движения автотранспортных потоков методами механики сплошной среды. Рассмотрен случай переменной скорости распространения возмущений, построен график её зависимости от плотности потока. Приведены результаты расчетов движения потока с учетом вязкоупругих эффектов. Иными словами, проводится учет эффектов второго порядка, а именно, оценки водителем градиентов скорости между своим автомобилем и находящимися поблизости (впереди) транспортными средствами. Это позволяет прогнозировать дорожную ситуацию не только на основании текущей картины плотности потока, но и возможное уплотнение или разрежение потока на основании анализа градиентов скорости.

Ключевые слова: математическое моделирование, автотранспортные потоки, механика сплошной среды, вязкость.

MATHEMATICAL MODELING OF TRAFFIC FLOWS USING CONTINUA APPROACH. VISCO-ELASTIC EFFECT IN TRAFFIC FLOWS

M.N. Smirnova, A.I. Bogdanova, Zuojin Zhu^{}, A.S. Manenkova, N.N. Smirnov*

Lomonosov Moscow State University, the department of Mechanics and Mathematics

^{*} Multiphase-Reactive-Flow Division, DTSE, Hefei, Anhui, 230026, P.R. China

In this paper the further development of continua models for traffic flows simulations is presented. The model for changeable sound speed is developed. Numerical simulations of traffic flows using visco-elastic effect were performed. We consider the effects, based on the driver's estimation of velocity gradients between his automobile and the transport ahead. According to velocity gradients we can predict the traffic situation and the change of density of the traffic.

Key words: mathematical modeling, traffic flows, continua mechanics, viscosity.

1. Введение

Первые математические модели движения автотранспортных потоков с точки зрения механики сплошной среды опубликованы Лайтхиллом и Уиземом [1], а также Ричардсом [2]. Анализ основных полученных ими результатов дается в известной монографии Уизема [3]. С развитием вычислительной техники для изучения движения авто-

транспортных потоков стало широко применяться численное моделирование. С современным состоянием вопроса можно ознакомиться, например, прочитав учебное пособие по математическому моделированию транспортных потоков [4].

Изучение динамики автотранспортных потоков началось в нашей стране в конце 70-х годов 20 века на механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова в связи с подготовкой к Олимпийским играм 1980 г. в Москве. Результаты этих исследований неоднократно докладывались В.Н. Беловым на научно-исследовательском семинаре И.Н. Зверева. В настоящее время изучение автотранспортных потоков на факультете ведется под руководством Н.Н. Смирнова и А.Б. Киселева на кафедре газовой и волновой динамики и в лабораториях волновых процессов и динамики деформируемых сред. Эти исследования неоднократно поддерживались грантами Правительства г. Москвы и Правительства региона г. Брюсселя (Бельгия).

Существуют три традиционных «механических» подхода к моделированию движения транспортного потока. Микроскопические модели описывают воздействие предыдущего автомобиля на следующий за ним при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений, основанных на ньютоновской механике [5, 6]. Макроскопические модели основываются на уравнениях газовой динамики [1, 7, 8]. Мезоскопические модели представляют собой промежуточное звено между двумя предыдущими моделями. Они основаны на кинетических уравнениях бoльцмановского типа [9]. В рамках макроскопического или континуального подхода для описания движения потока транспорта используется уравнение неразрывности. В качестве второго уравнения некоторые из исследователей использовали эмпирическое соотношение, связывающее плотность и расход [10, 11]. Такая система позволяет описывать движение локально равновесного потока. Для описания неравновесного потока было предложено уравнение движения, учитывающее стремление водителя привести свою скорость в соответствие с некой равновесной скоростью [12]. Однако такой подход не позволяет адекватно описывать возникновение ударных волн плотности потока автомашин. Существующие газодинамические модели не учитывают влияния движения впереди идущих транспортных средств на движение автомобилей, следующих позади, и стремления водителя привести свою скорость в соответствие с максимально безопасной скоростью. На решение этих проблем и направлена предлагаемая модель. Ранее проведенные исследования, использующие ее, опубликованы в [13-19].

В данной работе, основанной на принципах механики жидкости, развита вязкоупругая модель транспортных потоков, в которой вязкость и упругость вычисляются с помощью скорости звука и времени релаксации. В предложенной модели время релаксации представляет собой время распространения бесконечно малого возмущения на заданное расстояние. Это время складывается собственно из времени распространения визуального сигнала и времени задержки реакции водителя. Поскольку время собственно распространения светового сигнала бесконечно мало, время релаксации можно считать равным времени задержки реакции водителя на изменение дорожной обстановки. Для описания транспортной системы была введена вязкоупругая модель по аналогии с моделями неньютоновской механики жидкости. Модель транспортного потока основана на законах сохранения массы и количества движения и содержит уравнения, похожие на соотношения для линейной вязкоупругой жидкости. Эффект упругости позволяет создавать модели более высокого порядка, в то время как использование времени релаксации

показывает, что водители транспортных средств регулируют своё поведение на дороге в соответствии с требованиями безопасности. Данное поведение описывается путём введения давления с точки зрения вязкоупругой механики жидкости. Вязкость и упругость могут быть получены с помощью использования времени релаксации и скорости звука транспортного потока. Анализ устойчивости показывает, что транспортный поток должен быть абсолютно неустойчивым к возмущениям с короткими длинами волн.

2. Модель движения транспортного потока по автомагистрали

Рассмотрим однонаправленный поток машин по однополосной дороге. Введем эйлерову систему координат x вдоль автомагистрали в направлении движения потока и время t . Введем основные понятия, участвующие в модели. Среднюю плотность потока $\rho(x, t)$ определим как отношение площади полосы движения, занятой транспортными средствами, к площади всего рассматриваемого участка полосы движения:

$$\rho = \frac{S_{tr}}{S} = \frac{hn\ell}{hL} = \frac{n\ell}{L},$$

где h – ширина полосы движения, L – длина контрольного участка дороги, ℓ – средняя длина транспортного средства с минимальным расстоянием между стоящими автомобилями, n – количество транспортных средств на контрольном участке. Так, введенная плотность является безразмерной величиной и изменяется в интервале $0 \leq \rho \leq 1$.

Введем скорость потока $v(x, t)$, которая может изменяться в пределах $0 \leq v \leq v_{\max}^0$, где $v_{\max}^0$ – максимально разрешенная скорость движения на магистрали вне систем регулирования дорожного движения. Из определений следует, что максимальная плотность $\rho = 1$ соответствует ситуации, когда машины располагаются практически вплотную. В этом случае естественно принять $v = 0$, т.е. на дороге образовалась «неподвижная пробка».

Условно называя «массой», сосредоточенной на участке длины L , величину

$$m = \int_0^L \rho dx,$$

можно записать закон изменения «массы» на автомагистрали. Для непрерывного потока машин будет иметь место уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Запишем уравнение динамики транспортного потока, точнее, уравнение изменения режима движения. Режим движения транспортных средств на дороге определяется следующими основными факторами: реакцией водителя на изменение дорожной обстановки, откликом транспортного средства на действия водителя и техническими характеристиками транспортных средств. При разработке модели динамики транспортных средств были сделаны следующие предположения:

– данная модель описывает усредненное движение множества транспортных средств, а не движение каждого автомобиля в отдельности. Вследствие этого не учитываются индивидуальные характеристики транспортных средств (мощность, тормозной путь и т.п.), модель оперирует с усредненными характеристиками автомобилей.

– модель предполагает в среднем адекватную реакцию всех водителей на изменение дорожной обстановки, а именно: предполагается, что видя красный сигнал светофора или знак ограничения скорости или скопление машин перед ним, водитель замедляет движение до последующей полной остановки или до допустимой скорости, а не продолжает ускоряться, чтобы впоследствии применить режим экстренного торможения.

Предполагается, что подавляющее большинство водителей соблюдают правила дорожного движения, в частности, не превышают максимально допустимого скоростного режима v_f , разрешенного на дороге, и выдерживают безопасный интервал между транспортными средствами в зависимости от скорости движения. Кроме того, движения транспорта задним ходом нет.

Тогда уравнение изменения скорости запишется в следующем виде:

$$\frac{dv}{dt} = a; \quad a = \max \left\{ -a^-; \min \{ a^+; a' \} \right\}; \quad (2)$$

$$a' = fa_p + \frac{(1-f)^{x+\Delta}}{\Delta} \int_x^{x+\Delta} a_p(t, y) dy + \frac{V(\rho) - v}{\tau}; \quad (3)$$

$$a_p = -\frac{k^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{S}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Здесь a – ускорение транспортного потока; a^+ – максимально возможное ускорение разгона; a^- – ускорение экстренного торможения; величины a^+ и a^- положительны и определяются техническими характеристиками транспортного средства. Δ – «расстояние принятия решения», то есть длина участка магистрали перед участником движения, где находятся транспортные средства, на характер движения которых реагирует рассматриваемое транспортное средство, f – безразмерный параметр ($0 \leq f \leq 1$), характеризующий «вес» локальной ситуации по сравнению с ситуацией на некотором расстоянии впереди автомобиля. Параметр $k > 0$ является скоростью распространения возмущений («скоростью звука») в транспортном потоке. Параметр τ имеет смысл времени задержки, обусловленной конечностью скорости реакции водителя на изменение дорожной обстановки и техническими характеристиками транспортного средства. Этот параметр отвечает за стремление водителя привести скорость автомобиля в соответствие с максимально безопасной скоростью движения $V(\rho)$ для плотности потока ρ . В зависимости от того, требуется ли для достижения максимальной безопасной скорости $V(\rho)$ притормаживать или разгоняться, значение параметра τ может быть различным:

$$\tau = \begin{cases} \tau^+, & V(\rho) < v, \\ \tau^-, & V(\rho) \geq v. \end{cases}$$

В уравнении (4), определяющем ускорение a_p , первый член отражает стремление водителей транспортных средств ускоряться при уменьшении плотности окружающего потока и замедлять движение при увеличении плотности транспортных средств вблизи данной точки. Второй член определяет влияние эффектов второго порядка, а именно, оценку водителем градиентов скорости между своим автомобилем и находящимися поблизости (впереди) транспортными средствами. Если градиент скорости возрастает, то в перспективе расстояние между транспортными средствами должно увеличиться и можно не снижать скорость при приближении к области повышенной плотности. Если же градиент убывает, то можно начинать снижение скорости, т.к. в перспективе плотность может возрасти. Параметр S отвечает за прогнозируемую тенденцию развития локальной дорожной ситуации. $S = 4S_0\rho(1-\rho)$, где S_0 – величина, имеющая размерность $\text{м}^2/\text{с}$, ρ – плотность, определенная в (1). Зависимость параметра S от плотности представлена на рис.1.

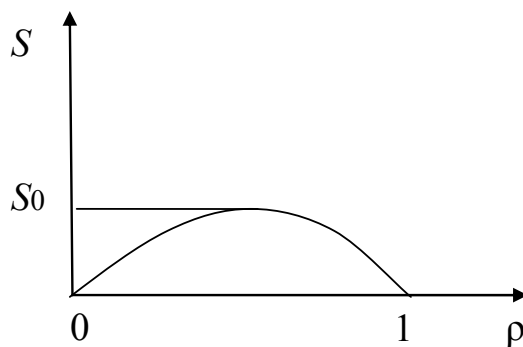


Рис.1.

В выражении (3) для ускорения транспортного потока a' первое слагаемое отвечает за влияние на поведение водителя локальной ситуации, второе за влияние ситуации вперед по потоку, а третье за стремление водителя привести свою скорость в соответствие с максимально безопасной скоростью.

Данное представление закона движения аналогично введению так называемой «вязко-упругой» модели. Действительно, уравнение (4) позволяет ввести функцию

$$T = -p + S \frac{\partial v}{\partial x}, \quad p = \int k^2(\rho) d\rho, \quad (5)$$

которую можно условно называть напряжением в транспортном потоке, содержащем давление p и вязкую составляющую. Пусть $q = \rho v$ – поток транспортных средств. Тогда система уравнений (1), (2) для описания динамики транспортного потока примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= 0; \\ \rho \frac{dv}{dt} &= f \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{(1-f)}{\Delta} \rho \int_x^{x+\Delta} a_p(t, y) dy + \frac{\rho V(\rho) - \rho v}{\tau}. \end{aligned} \quad (6)$$

2.1. Основные модификации модели. 1. Если в (6) принять $f=0$, то выражение для ускорения примет следующий вид:

$$a' = \frac{1}{\Delta} \int_x^{x+\Delta} a_p(t, y) dy + \frac{V(\rho) - v}{\tau},$$

то есть будет зависеть только от величины ускорения на участке длины Δ , где Δ – расстояние принятия решения, и от стремления водителя привести свою скорость в соответствие с максимально безопасной скоростью.

2. При $f=1$ исходное выражение принимает следующий вид:

$$a' = a_p + \frac{V(\rho) - v}{\tau}.$$

Следовательно, ускорение зависит от локальной ситуации, а также от стремления водителя привести скорость автомобиля в соответствие с максимально безопасной скоростью движения.

3. Модель с переменной скоростью распространения возмущений. Рассмотрим случай, когда параметр k в формулах (4), (5) зависит от скорости v и плотности потока ρ . Предположим, что транспортному средству (водителю) требуется время τ_p для реакции на изменение дорожной обстановки впереди по потоку: $k = \ell' / \tau_p$, где τ_p – время реакции водителя, ℓ' – расстояние между транспортными средствами, рис.2. По определению плотности: $\ell' = \ell / \rho$, следовательно $k = k_1 / \rho$, где $k_1 = \ell / \tau_p$.

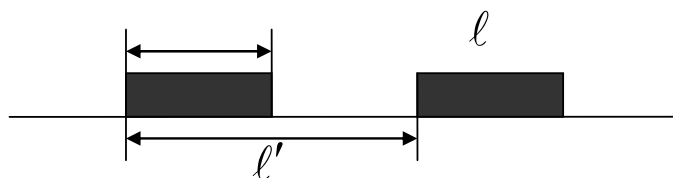


Рис.2.

Считаем, что когда дорога пустая (отсутствуют машины, на которые реагирует водитель), скорость распространения возмущений возрастает линейно вместе с плотностью, до того момента, пока плотность не станет равной $\rho_0 = L / \Delta$, где L – длина контрольного участка дороги, Δ – длина участка, где находятся транспортные средства, на характер движения которых реагирует водитель (то есть, пока в поле зрения водителя не попадется хотя бы один автомобиль).

Наблюдения за движением транспортного потока показали, что при небольшой плотности потока возмущения распространяются с постоянной скоростью.

Зависимость скорости распространения возмущений от плотности, при $\rho > \rho_{kp}$, $\rho_{kp} = k_1 / k_0$, была показана выше.

Тогда, исходя из предположений, скорость распространения возмущений можно вычислять по формуле

$$k(\rho) = \begin{cases} k_0 \rho / \rho_0, & 0 \leq \rho \leq \rho_0, \\ k_0, & \rho_0 \leq \rho \leq \rho_{kp}, \\ k_1 / \rho, & \rho_{kp} \leq \rho \leq 1. \end{cases}$$

График этой зависимости представлен ниже (рис.3):

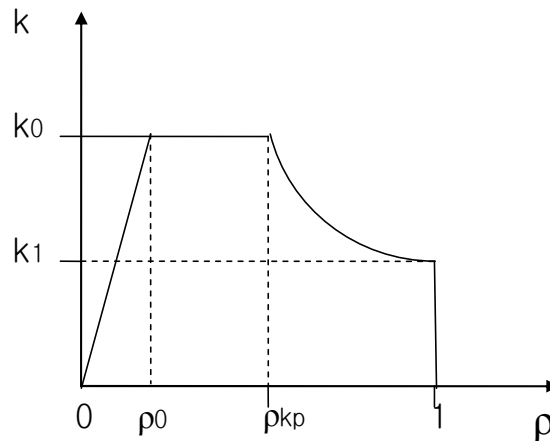


Рис.3.

4. Рассмотрим случай, когда напряжение транспортного потока может быть выражено следующей формулой:

$$T = -p + S \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (7)$$

В соответствии с существующими моделями (6) рассмотрим случай, когда на группы транспортных средств действуют силы

$$F = \frac{\rho(V(\rho) - v)}{\tau} + \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (8)$$

В целях упрощения постановки задачи примем линейную зависимость оптимального потока q_e от плотности в треугольной форме, как показано на рис.4.

$$q_e = \rho v = \begin{cases} v_f \rho & \text{для } \rho \leq \rho_c, \\ v_f \rho_c (\rho_m - \rho) / (\rho_m - \rho_c) & \text{для } \rho > \rho_c, \end{cases} \quad (9)$$

$$p = p_m (1 - \alpha)(\rho / \rho_m) / [1 - \alpha(\rho / \rho_m)], \quad (10)$$

$\alpha = l \rho_0$, l – средняя длина транспортного средства (величина параметра α должна быть меньше единицы), ρ_m – плотность затора (неподвижно стоящих автомобилей), p_m – давление при $\rho = \rho_c$, V – оптимальная скорость свободного потока, v_f – максимально разрешенная скорость, ρ_c – плотность насыщения. Давление в транспортном потоке предполагается пропорциональным обратной величине продвижения транспортных

средств. Продвижение зависит от длины транспортного средства. Предполагается, что давление в заторе приблизительно равно общему давлению насыщения. Таким образом,

$$p_m \approx \frac{(1 - \alpha \rho_c / \rho_m) \rho_c / \rho_m}{2(1 - \rho_c / \rho_m)} \rho_m v_f^2 = k_0^2 \rho_m, \quad (11)$$

где

$$k_0^2 = \frac{(1 - \alpha \rho_c / \rho_m) \rho_c / \rho_m}{2(1 - \rho_c / \rho_m)} v_f^2 \quad (12)$$

является вспомогательным коэффициентом.

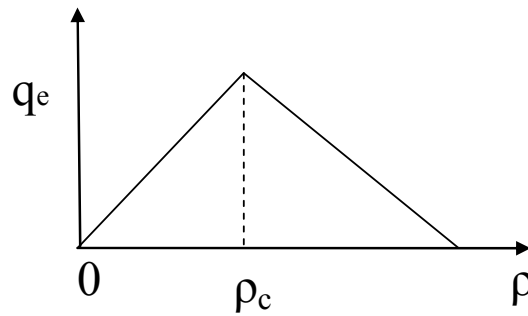


Рис.4. Фундаментальная диаграмма транспортного потока.

Плотности насыщения и затора зависят от состояния дороги, а скорость звука может быть представлена как

$$k(\rho) = \begin{cases} k_0 \sqrt{(1 - \alpha)} / [1 - \alpha(\rho / \rho_m)] & \text{для } 0 \leq \rho \leq \rho_m, \\ k_0 / \sqrt{(1 - \alpha)} & \text{для } \rho_m \leq \rho \leq \rho_0, \\ k_1 / \rho & \text{для } \rho_0 \leq \rho \leq 1. \end{cases} \quad (13)$$

3. Численный анализ

Для тестирования модели и анализа ее свойств было проведено моделирование поведения транспортных средств на замкнутой дороге. Параметры моделирования приведены в табл.1 и 2. Увидеть разницу в модели потока можно используя иллюстрации контуров скоростей движения транспортного потока. Видно, что при уменьшении вязкости возрастают осцилляции скорости (рис.5). При этом фактическая скорость потока и оптимальная скорость изменяются в одной фазе. Изменения оптимальной скорости происходят вследствие осцилляций плотности потока. Актуальная скорость определяется режимом движения. Изменения скорости потока в координатах (x, t) представлены на рис.6, откуда видно, что при уменьшении параметра, характеризующего прогнозирование водителем движения ближайших транспортных средств (параметра «вязкости»), амплитуда периодических изменений скорости возрастает и поток становится более неустойчивым.

Таблица I. Фиксированные параметры потока при моделировании.

v (км/ч)	ρ_m (т.с./км)	v_{av} (км/ч)	$X(v)$ (м)	l (м)
110	150	55	50	5,8

Таблица II. Переменные параметры потока при моделировании.

Случай	$\hat{S} = \left[\frac{S}{\tau} \cdot \frac{t_0}{l_0^2 q_0} \right]^a$
I	0.25
II	0.125
III	0.0625
IV	0.03175

^a Для транспортного потока скорость и время определяются так $q_0 = \rho_* v$, $v_0 = l_0 / t_0$, $t_0 = l_0 \rho_0 / q_0$.

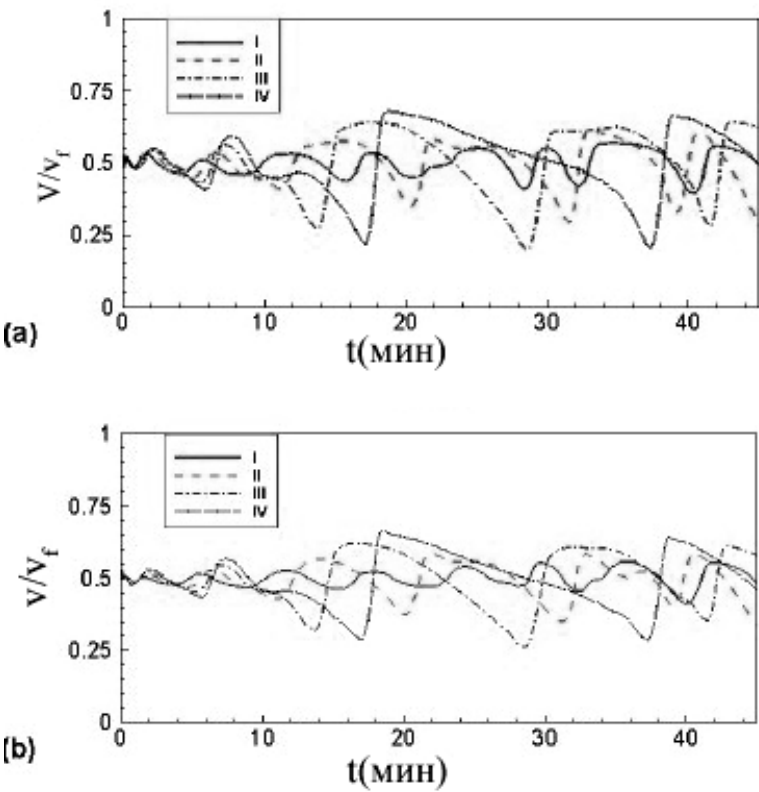


Рис.5. Сравнение результатов для различных коэффициентах вязкости, при $x=20$ для параметров, взятых из табл.II. Рисунку (а) соответствует V / v_f ; (b) соответствует v / v_f .

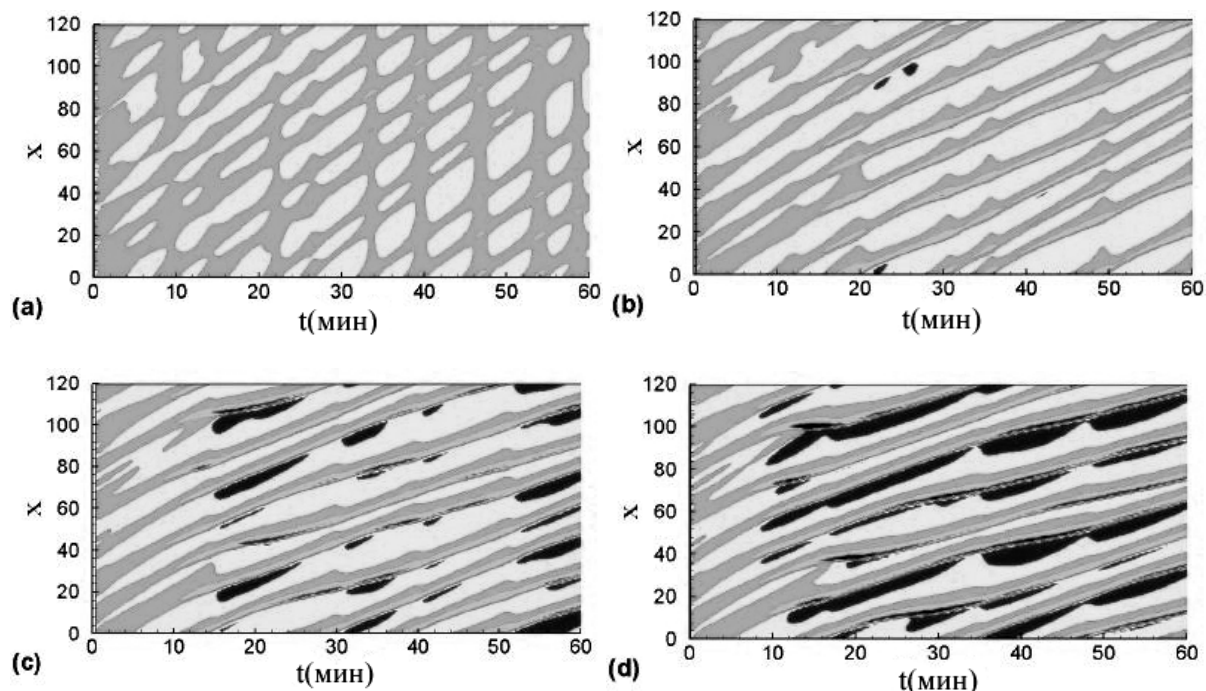


Рис.6. Поля скорости в плоскости $x-t$ для случаев, когда а) $\hat{S}=0.25$, б) $\hat{S}=0.125$, в) $\hat{S}=0.0625$, д) $\hat{S}=0.03175$. Отметим, что контуры скоростей потока обозначены серым, когда $0.4 \leq v/V < 0.5$, светло-серым при $0.5 \leq v/V < 0.6$ и черным при $v/V \geq 0.6$.

4. Вывод

В этой работе рассмотрена модель описания транспортного потока с учетом реакции водителя на изменение дорожной обстановки, отдельно рассмотрен случай переменной скорости распространения возмущений, построен график зависимости «скорости звука» от плотности потока. Главное отличие представленной модели от предыдущих, заключается во введении в рассмотрение члена, отвечающего за прогнозирование тенденции изменения локальной дорожной ситуации. При этом проводится учет эффектов второго порядка, а именно, оценки водителем градиентов скорости между своим автомобилем и находящимися поблизости (впереди) транспортными средствами, что позволяет прогнозировать дорожную ситуацию не только на основании текущей картины плотности потока, но и возможное уплотнение или разрежение потока на основании анализа градиентов скорости. Результаты исследования данной модели на примере движения по замкнутой дороге показали, что в целом поток транспортных средств характеризуется возникновением неустойчивости, которая проявляется в периодических осцилляциях скорости и плотности на отдельно взятом участке дороги. При этом возрастание параметра, характеризующего влияние прогнозирования эффектов второго порядка на выбираемый водителем режим движения, приводит к уменьшению осцилляций параметров потока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lighthill M.G., Whitham G.B.* On kinetic waves II. A theory of traffic flow on ling crowded roads // Proc. Roy. Soc. London. Ser.A., 1955, v.229, № 1178, p.317–345.
2. *Richards P.L.* Shock waves on the highway // Operations Research, 1956, v.4, № 1, p.42–51.

3. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977.
4. Буслаев А.П., Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б., Яшина М.В. Введение в математическое моделирование транспортных потоков / Под ред. А.В. Гасникова, с предисловием акад. А.А. Петрова и приложениями М.Л. Бланка, А.В. Колесникова, В.А. Малышева, А.М. Райгородского. – М.: МФТИ, 2010.
5. Bando M., Hasebe K., Nakanish K., Nakayama A. Delay of Vehicle Motion in Traffic Dynamics // Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 2000, v.17, p.275.
6. Algers S., Bernauer E., Boero M., Breheret L., Di Taranto C., Dougherty M., Fox K., Gabard G.-F. Review of Micro-Simulation Models. Review Report of the SMARTTEST project, 1997, (<http://www.its.leeds.ac.uk/projects/smartest/deliv3.html>).
7. Карамзин Ю.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г. Двумерная модель автомобильных потоков // Математическое моделирование, 2006, т.18, № 6, с.85-95.
8. Смирнов Н.Н., Киселев А.Б., Никитин В.Ф., Юмашев М.В. Математическое моделирование автотранспортных потоков. – М.: Механико-математический ф-т МГУ им. М.В. Ломоносова, 1999.
9. Prigogine I., Resibois P. On a Generalized Boltzmann-like Approach for Traffic Flow // Bull. Cl. Sci., Acad. Roy. Belg., 1962, v.48, № 9, p.805–814.
10. Greenberg H. An Analysis of Traffic Flow // Operations Research, 1959, v.7, № 1, p.79–85.
11. Payne H.J. Models of Freeway Traffic and Control. - In: Berkey G.A. Mathematical Models of Public Systems, 1971, v.1, p.51-61.
12. Смирнов Н.Н., Киселев А.Б., Никитин В.Ф., Юмашев М.В. Математическое моделирование автомобильных потоков на магистралях // Вестн. МГУ. Сер.1. Матем. Механ., 2000, №4, с.39-44.
13. Киселев А.Б., Никитин В.Ф., Смирнов Н.Н., Юмашев М.В. Неустановившиеся движения автотранспорта на кольцевой магистрали // Прикл. матем. и механ. (ПММ), 2000, т.64, вып.4, с.671-678.
14. Kiselev A.B., Smirnov N.N., Nikitin V.F., Yumashev M.V. Mathematical modelling of traffic flow // Proc. of 9th IFAC Symposium in Transportation Systems 2000 (June 13- 15, 2000, Braunschweig, Germany). - Elsevier Science Ltd., Oxford, 2000, p.223-232.
15. Смирнов Н.Н., Киселев А.Б., Никитин В.Ф., Асташова Е.Г., Асташов Н.А. Математическое моделирование динамики автотранспортных потоков и вызываемого ими загрязнения атмосферного воздуха в автомобильных тоннелях // Научные технологии, 2003, т.4, № 9, с.29-43.
16. Киселев А.Б., Кокорева А.В., Никитин В.Ф., Смирнов Н.Н. Математическое моделирование автотранспортных потоков на регулируемых дорогах // Прикл. матем. и механ. (ПММ), 2004, т.68, вып.6, с.1047-1054.
17. Киселев А.Б., Кокорева А.В., Никитин В.Ф., Смирнов Н.Н. Математическое моделирование движения двухполосного автотранспортного потока, регулируемого светофором // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. Механ., 2006, № 4, с.35-40.
18. Kiselev A.B., Kokoreva A.V., Nikitin V.F., Smirnov N.N. Computational modelling of traffic flows // European Conf. on Computational Fluid Dynamics (Egmond aan Zee, The Netherlands, 5-8 Sept. 2006), Proc. on CD-ROM, 10 p.
19. Киселев А.Б., Кокорева А.В., Никитин В.Ф., Смирнов Н.Н. Математическое моделирование движения автотранспортных потоков методами механики сплошной среды. Исследование влияния искусственных дорожных неровностей на пропускную способность участка дороги // Современные проблемы математики и механики. Том I. Прикладные исследования / Под редакцией В.В. Александрова и В.Б. Кудрявцева. – М.: Изд-во МГУ, 2009, с.311-322.

Поступила в редакцию 23.04.2013.