Lec11: 假设检验(三)

张伟平

2011 年 4 月 28 日

1 一致最优检验与无偏检验

一、引言及定义

设有样本$\mathbf{X}$, 它取值于样本空间 $\mathscr{X}$, $\mathbf{X}$ 的分布属于分布族$\{F_\theta, \theta \in \Theta\}$, Θ为参数空间. 如§5.1所述, 参数θ 的假设检验问题可以表成如下的一般形式

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1, \tag{1.1}$$

此处Θ_0 为参数空间Θ 的非空真子集, $\Theta_1 = \Theta - \Theta_0$.

对检验问题(1.1)可用种种不同方法去检验, 这就产生不同检验的比较问题, 以及在种种意义下求“最优”检验问题. 这与我们在第三章参数估计问题中, 在无偏估计中找一致最小方差无偏估计的问题完全相似. 下面首先给出一致最优检验的定义.

定义5.4.1 设有检验问题(1.1),令$0 < \alpha < 1$, 记Φ_α为(1.1)的一切水平为α的检验的集合. 若$\varphi \in \Phi_\alpha$, 且对任何检验$\varphi_1 \in \Phi_\alpha$有

$$\beta_\varphi(\theta) \geq \beta_{\varphi_1}(\theta), \forall \quad \theta \in \Theta_1 \tag{1.2}$$

则称φ为(1.1)的一个水平为α的 一致最优检验 (Uniformly Most Powerful Test), 简称水平为α的UMP检验. 当φ为水平α的UMP检验时, 它在限制第一类错误概率不超过α的条件下, 总使第二类错误概率达到最小. 因此若以错误概率为衡量检验优劣的唯一量度, 且接受限制第一类错误概率的原则, 则UMP检验是最好的检验. 不过, UMP检验的存在一般是例外而不常见的. 理由如下: 若Θ_1不止包含一个点, 则当在其中取两个不同点θ_1和θ_2时, 为使$\beta_\varphi(\theta_1)$ 尽可能大的那种检验φ, 不见得同时也能使$\beta_\varphi(\theta_2)$大. 只有在Θ_0和Θ_1都只包含一点时, UMP检验才存在. 这就是下面Neyman-Pearson(简称NP)引理的内容.

二、Neyman–Pearson引理

定理5.4.1 (*NP基本引理*) 设样本$\mathbf{X}$的分布有概率函数$f(\mathbf{x}, \theta)$, 参数θ只有两个可能的值θ_0和θ_1, 考虑下列检验问题

$$H_0 : \theta = \theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta = \theta_1, \tag{1.3}$$

则对任给的$0 < \alpha < 1$有

(i) 存在性. 对检验问题(1.7)必存在一个检验函数$\varphi(\mathbf{x})$ 及非负常数c和$0 \leq r \leq 1$, 满足条件

(a)

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, \text{当} f(\mathbf{x}, \theta_1)/f(\mathbf{x}, \theta_0) > c \\ r, \text{当} f(\mathbf{x}, \theta_1)/f(\mathbf{x}, \theta_0) = c \\ 0, \text{当} f(\mathbf{x}, \theta_1)/f(\mathbf{x}, \theta_0) < c \end{cases} \tag{1.4}$$

(b)

$$E_{\theta_0}[\varphi(\mathbf{X})] = \alpha \tag{1.5}$$

(ii) 任何满足(1.4)和(1.5)的检验$\varphi(\mathbf{x})$是检验问题(1.7)的UMP检验.

注5.4.1

1. $r.v.\ X$为连续型分布时(1.4)式中的随机化是不必要的. 这时取$r = 0$, 即(1.4)式变为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, \text{当} f(\mathbf{x}, \theta_1)/f(\mathbf{x}, \theta_0) > c \\ 0, \text{当} f(\mathbf{x}, \theta_1)/f(\mathbf{x}, \theta_0) \leq c \end{cases}$$

   其中c由$E_{\theta_0}\varphi(\mathbf{X}) = P(f(\mathbf{X}, \theta_1)/f(\mathbf{X}, \theta_0) > c\,|H_0) = \alpha$来确定.

2. 从“似然性”的观点去看NP基本引理是很清楚的: 对每个样本$\mathbf{X}$, θ_0和θ_1的“似然度”分别为$f(\mathbf{x}, \theta_0)$和$f(\mathbf{x}, \theta_1)$. 比值$f(\mathbf{x}, \theta_1)/f(\mathbf{x}, \theta_0)$愈大, 就反映在得到样本$\mathbf{X}$时, θ愈像θ_1而非θ_0, 这样的样本$\mathbf{X}$就愈倾向于否定“$H_0 : \theta = \theta_0$”的假设.

证 (i)先证明存在性: 记随机变量$f(\mathbf{X}, \theta_1)/f(\mathbf{X}, \theta_0)$的分布函数为

$$G(y) = P(f(\mathbf{X}, \theta_1)/f(\mathbf{X}, \theta_0) \leq y), \qquad -\infty < y < \infty$$

则$G(y)$具有分布函数的性质: 单调、非降、右连续且$\lim\limits_{y\to-\infty} G(y) = 0$, $\lim\limits_{y\to\infty} G(y) = 1$. 从而由$0 < \alpha < 1$和$G(y)$的单调性可知:必存在$c$使得

$$G(c-0) \leq 1-\alpha \leq G(c).$$

如何确定r, 分下列三种情形讨论:

(a) 若$G(c) = 1-\alpha$, 则取$r = 0$, 这时由(1.4)确定的$\varphi(x)$满足

$$\begin{aligned} E_{\theta_0}[\varphi(X)] &= P_{\theta_0}\big(f(\mathbf{X}, \theta_1)/f(\mathbf{X}, \theta_0) > c\big) \\ &= 1 - P_{\theta_0}\big(f(\mathbf{X}, \theta_1)/f(\mathbf{X}, \theta_0) \leq c\big) = 1 - G(c) = \alpha. \end{aligned}$$

(b) 若$G(c-0) = 1-\alpha$, 则取$r = 1$, 此时由(1.4)定义的$\varphi(x)$满足

$$\begin{aligned} &E_{\theta_0}[\varphi(X)] = 1 - P\left(f(\mathbf{X}, \theta_1)/f(\mathbf{X}, \theta_0) < c\right) \\ &= 1 - G(c-0) = \alpha. \end{aligned}$$

(c) 若$G(c-0)<1-\alpha<G(c)$, 则取$r=[(1-\alpha)-G(c-0)]/[G(c)-G(c-0)]$, 显然, 此时对由(1.4)定义的$\varphi(x)$有

$$
\begin{aligned}
&E_{\theta_0}[\varphi(\mathbf{X})]=P\left(f(\mathbf{X},\theta_1)/f(\mathbf{X},\theta_0)>c\right)+r\cdot P\left(f(\mathbf{X},\theta_1)/f(\mathbf{X},\theta_0)=c\right)\\
&=1-G(c-0)-(G(c)-G(c-0))+\frac{(1-\alpha)-G(c-0)}{G(c)-G(c-0)}\cdot(G(c)-G(c-0))\\
&=1-(1-\alpha)=\alpha.
\end{aligned}
$$

故存在性证毕.

(ii)再证由(1.4)和(1.5)定义的$\varphi(\mathbf{x})$有UMP性质. 设$\varphi_1(\mathbf{x})$ 为检验问题(1.7)的任一水平为α的检验, 我们要证明$E_{\theta_1}[\varphi(\mathbf{X})]\geq E_{\theta_1}[\varphi_1(\mathbf{X})]$. 为此定义样本空间 $\mathscr{X}$上的子集:

$$S^+=\{\mathbf{x}:\ \varphi(\mathbf{x})>\varphi_1(\mathbf{x})\},\quad S^-=\{\mathbf{x}:\ \varphi(\mathbf{x})<\varphi_1(\mathbf{x})\}.$$

则在S^+上有: $\varphi(\mathbf{x})>\varphi_1(\mathbf{x})\geq 0$, 故由(1.4)可知此时

$$\frac{f(\mathbf{x},\theta_1)}{f(\mathbf{x},\theta_0)}\geq c;$$

当$\mathbf{x}\in S^-$时有: $\varphi(\mathbf{x})<\varphi_1(\mathbf{x})\leq 1$, 因此有$\varphi(\mathbf{x})<1$, 故由(1.7)可知此时必有

$$\frac{f(\mathbf{x},\theta_1)}{f(\mathbf{x},\theta_0)}\leq c.$$

故在$S=S^+\cup S^-$上必有

$$(\varphi(\mathbf{x})-\varphi_1(\mathbf{x}))(f(\mathbf{x},\theta_1)-cf(\mathbf{x},\theta_0))\geq 0$$

(因为在S^+上, 两因子皆正, 在S^-上两因子皆负) . 因此

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathscr{X}}\big(\varphi(\mathbf{x})-\varphi_1(\mathbf{x})\big)\big(f(\mathbf{x},\theta_1)-cf(\mathbf{x},\theta_0)\big)\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&=\int_{S^+\cup S^-}\big(\varphi(\mathbf{x})-\varphi_1(\mathbf{x})\big)\big(f(\mathbf{x},\theta_1)-cf(\mathbf{x},\theta_0)\big)\mathrm{d}\mathbf{x}\geq 0,
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathscr{X}}\varphi(\mathbf{x})f(\mathbf{x},\theta_1)\ d\mathbf{x}-\int_{\mathscr{X}}\varphi_1(\mathbf{x})f(\mathbf{x},\theta_1)d\mathbf{x}\\
&\geq c\left[\int_{\mathscr{X}}\varphi(\mathbf{x})f(\mathbf{x},\theta_0)\mathrm{d}\mathbf{x}-\int_{\mathscr{X}}\varphi_1(\mathbf{x})f(\mathbf{x},\theta_0)\mathrm{d}\mathbf{x}\right].
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

由(1.5)知$E_{\theta_0}[\varphi(\mathbf{X})]=\int_{\mathscr{X}}\varphi(\mathbf{x})f(\mathbf{x},\theta_0)d\mathbf{x}=\alpha$, 而$\varphi_1(\mathbf{x})$为检验问题(1.7)的水平为$\alpha$的任一检验, 故有$E_{\theta_1}[\varphi_1(\mathbf{X})]\leq\alpha$, 故知(1.6)式右边非负, 从而左边也非负, 因此有

$$\beta_\varphi(\theta_1)=\int_{\mathscr{X}}\varphi(\mathbf{x})f(\mathbf{x},\theta_1)d\mathbf{x}\geq\int_{\mathscr{X}}\varphi_1(\mathbf{x})f(\mathbf{x},\theta_1)d\mathbf{x}=\beta_{\varphi_1}(\theta_1).$$

这就证明了$\varphi(\mathbf{x})$为(1.7)的水平为α的UMP检验. 定理证毕.

例5.4.1 设$\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$为自正态总体$N(\mu,1)$中抽取的随机样本, 其中$\mu$未知, 求假设检验问题

$$H_0:\mu=0\longleftrightarrow H_1:\mu=\mu_1\quad(\mu_1>0)$$

的水平为α的UMP检验. 此处μ_1和α给定.

解 由NP引理, 先求$f_0(\mathbf{x})$和$f_1(\mathbf{x})$的表达式:

$$\begin{aligned} f_0(\mathbf{x}) &= (2\pi)^{-n/2}exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right\}, \\ f_1(\mathbf{x}) &= (2\pi)^{-n/2}exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_1)^2\right\}. \end{aligned}$$

似然比可表示为

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{f_1(\mathbf{x})}{f_0(\mathbf{x})} = \exp\Big\{-\frac{1}{2}n\mu_1^2 + n\mu_1\bar{x}\Big\}$$

显然当$\mu_1 > 0$时, $\lambda(\mathbf{x})$为$\bar{x}$的增函数, 故UMP检验的否定域为

$$D = \{\mathbf{X}:\ \lambda(\mathbf{X}) > c)\} = \{\mathbf{X}:\ \bar{X} > A\}$$

当H_0成立时, $\bar{X} \sim N(0, \frac{1}{n})$, 故由NP引理可知:

$$P(\bar{X} > A|H_0) = P(\sqrt{n}\bar{X} > \sqrt{n}A|H_0) = \alpha,$$

其中$\sqrt{n}\bar{X} \sim N(0,1)$. 由$\sqrt{n}A = u_\alpha \Longrightarrow A = u_\alpha/\sqrt{n}$, 即检验水平为$\alpha$的UMP检验的检验函数为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{当}\bar{x} > u_\alpha/\sqrt{n}, \\ 0, & \text{当}\bar{x} \le u_\alpha/\sqrt{n}. \end{cases}$$

可见$\varphi(\mathbf{x})$与μ_1无关, 可见上述检验函数$\varphi(\mathbf{x})$也是检验问题

$$H_0: \mu = 0 \longleftrightarrow H_1: \mu > 0$$

的水平为α的UMP检验.

注5.4.2 此例告诉我们: 在某些情况下, 如果由NP引理得到的UMP检验不依赖于对立假设的具体值, 则可由此得到一个扩大了的, 对立假设为复合假设的检验问题的水平为α的UMP检验.

类似本例可以求得检验问题$H_0: \mu = 0 \longleftrightarrow H_1: \mu < 0$的检验水平为$\alpha$的UMP检验.

例5.4.2 设$\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$为从两点分布$b(1,p)$中抽取的随机样本, 其中$p$为未知参数. 求检验问题

$$H_0: p = p_0 \longleftrightarrow H_1: p = p_1 \quad (p_1 > P_0)$$

的水平为α的UMP检验. 此处p_0, p_1和α给定.

解 由NP引理, 先求f_0和f_1的表达式:

$$\begin{aligned} f_0(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}, p_0) = p_0^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p_0)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \\ f_1(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}, p_1) = p_1^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p_1)^{n-\sum_{i=1}^n x_i} \end{aligned}$$

记$T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$, 似然比

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}, p_1)}{p(\mathbf{x}, p_0)} = \left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^n \left[\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}\right]^{T(\mathbf{x})}.$$

由于$p_1 > p_0$, $1-p_0 > 1-p_1$,因此$p_1(1-p_0)/p_0(1-p_1) > 1$, 故$\lambda(\mathbf{x})$关于$T(\mathbf{x})$单调增. 由于$r.v.\ T(\mathbf{X})$服从离散型分布, 故需要随机化. 由NP引理可知检验函数为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{当}T(\mathbf{x}) > c \\ r, & \text{当}T(\mathbf{x}) = c \\ c, & \text{当}T(\mathbf{x}) < c \end{cases}$$

当H_0成立时$T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$服从二项分布$b(n, p_0)$, 当$\alpha$给定时, c由下列不等式确定:

$$\sum_{k=c}^{n} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} > \alpha > \sum_{k=c+1}^{n} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k} = \alpha_1.$$

取

$$r = \frac{\alpha - \alpha_1}{\binom{n}{c} p_0^c (1-p_0)^{n-c}},$$

则必有

$$E_{p_0}[\varphi(\mathbf{X})] = P_{p_0}(T(\mathbf{X}) > c) + r \cdot P_{p_0}(T(\mathbf{X}) = c) = \alpha.$$

因此$\varphi(\mathbf{X})$为水平为α的UMP检验.

由于上述检验函数$\varphi(\mathbf{x})$与p_1无关, 故它也是检验问题

$$H_0 : p = p_0 \longleftrightarrow H_1 : p > p_0$$

的水平为α的UMP检验.

注5.4.3 关于随机化检验问题. 本例中当出现$T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i = c$时, 先做一个具有成功率为$r$的$Benoulli$试验. 若该试验成功, 则否定$H_0$; 若不然则接受$H_0$. 如$r = \frac{1}{2}$则可通过掷一均匀硬币, 规定出现正面为成功. 若掷出正面则否定H_0; 若不然则接受H_0.

如我们在§5.1中所述, 对随机化检验分两步走: (i)首先通过试验获得样本观察, (ii)有了样本后, 当样本出现特殊值(如本例中$\sum_{i=1}^n x_i = c$) 需随机化时再作一次试验. 试验结果为A或$\bar{A}$, 发生概率为$P(A) = r$, 若A发生, 则拒绝H_0; 否则接受H_0.

例5.4.3 设$\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$是来自均匀分布$U(0, \theta)$, $\theta > 0$的随机样本, 求下列检验问题

$$H_0 : \theta = \theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta = \theta_1 \ (\theta_1 > \theta_0 > 0)$$

的水平为α的UMP检验.

解 服从均匀分布的样本$\mathbf{X}$的密度函数和似然比分别为

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \theta) &= \frac{1}{\theta^n} I_{[0 < x_{(1)} \le x_{(n)} < \theta]}, \\ \lambda(\mathbf{x}) &= \frac{f(\mathbf{x}, \theta_1)}{f(\mathbf{x}, \theta_0)} = \begin{cases} \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n, & 0 < x_{(n)} < \theta_0 \\ \infty, & \theta_0 < x_{(n)} < \theta_1. \end{cases} \end{aligned}$$

故由NP引理, 可知水平为α的UMP检验函数有形式

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{当}x_{(n)} > c; \\ 0, & \text{当}x_{(n)} \le c. \end{cases}$$

$T = X_{(n)}$的密度函数为

$$g_\theta(t) = \frac{nt^{n-1}}{\theta^n} I_{[0<t<\theta]}$$

故当H_0成立时, $T(\mathbf{X})$的密度函数为$g_{\theta_0}(t) = \frac{nt^{n-1}}{\theta_0^n} I_{[0<t<\theta_0]}$, 因此有

$$E_{\theta_0}[\varphi(\mathbf{X})] = \int_0 \varphi(t) g_{\theta_0}(t) \mathrm{d}t = \int_c^{\theta_0} \frac{nt^{n-1}}{\theta_0^n} \mathrm{d}t = 1 - \frac{c^n}{\theta_0^n} = \alpha$$

故得$c = \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha}$, 因此

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \text{当} X_{(n)} > \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha}; \\ 0, & \text{当} X_{(n)} \le \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha}. \end{cases}$$

为一个水平为α的UMP检验.

由于此检验$\varphi(\mathbf{X})$与θ_1无关, 故它也是

$$H_0 : \theta = \theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta > \theta_0$$

的水平为α的UMP检验.

注5.4.4 由上面三个例子可见UMP检验函数$\varphi(\mathbf{x})$皆为充分统计量的函数, 这是否具有普遍意义呢?我们有下列结论:

设$r.v.\ X$的密度函数为$f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta$ 为未知参数, $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$为自总体$X$中抽取的随机样本, $T = T(\mathbf{X})$为θ的充分统计量, 则由(1.4)和(1.5) 定义的检验函数$\varphi(\mathbf{x})$是充分统计量T的函数.

这一结果的证明并不难, 只要利用充分统计量的因子分解定理即可证得.

定理5.4.1' (*NP基本引理的逆*) 设样本$\mathbf{X}$的分布有概率函数$f(\mathbf{x}, \theta)$, 参数θ只有两个可能的值θ_0和θ_1, 考虑下列检验问题

$$H_0 : \theta = \theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta = \theta_1, \tag{1.7}$$

则对任给的$0 < \alpha < 1$, 假设$H_0 \leftrightarrow H_1$存在一个水平α UMP检验$\varphi(\mathbf{x})$, 则

(a)必存在一个非负常数c使得

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, \ \text{当} f(\mathbf{x}, \theta_1)/f(\mathbf{x}, \theta_0) > c \\ 0, \ \text{当} f(\mathbf{x}, \theta_1)/f(\mathbf{x}, \theta_0) < c \end{cases} \tag{1.8}$$

(b) 若进一步还有$E_{\theta_1}[\varphi(\mathbf{X})] = \int \varphi(\mathbf{X}) f(\mathbf{x}, \theta_1) d\mathbf{x} < 1$, 则必有

$$E_{\theta_0}[\varphi(\mathbf{X})] = \alpha \tag{1.9}$$

证明 由NP引理知存在一个水平α UMP检验$\tilde{\varphi}$满足

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, \ \text{当} f(\mathbf{x}, \theta_1)/f(\mathbf{x}, \theta_0) > c \\ 0, \ \text{当} f(\mathbf{x}, \theta_1)/f(\mathbf{x}, \theta_0) < c \end{cases} \tag{1.10}$$

记$S^+ = \{\mathbf{x}:\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) > \varphi(\mathbf{x})\}$,$S^- = \{\mathbf{x}:\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) < \varphi(\mathbf{x})\}$以及$S = (S^+\bigcup S^-)\bigcap\{\mathbf{x}: f(\mathbf{x},\theta_1)/f(\mathbf{x},\theta_0)\neq c\}$, 则在$S$上有

$$(\tilde{\varphi}(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x}))(f(\mathbf{x},\theta_1)-cf(\mathbf{x},\theta_0))>0$$

从而如果$P(S)>0$, 将有

$$\int_{\mathcal{X}}(\tilde{\varphi}(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x}))(f(\mathbf{x},\theta_1)-cf(\mathbf{x},\theta_0))d\mathbf{x}=\int_S(\tilde{\varphi}(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x}))(f(\mathbf{x},\theta_1)-cf(\mathbf{x},\theta_0))d\mathbf{x}>0$$

因此

$$\int_{\mathcal{X}}(\tilde{\varphi}(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x}))f(\mathbf{x},\theta_1)>c[\alpha-E_{\theta_0}\varphi(\mathbf{x})\geq 0.$$

此即$\beta_{\tilde{\varphi}}(\theta_1)>\beta_{\varphi}(\theta_1)$, 这与$\varphi$为水平$\alpha$ UMP矛盾. 因此有$P(S)=0$, 即$\tilde{\varphi}$和φ在$\{\mathbf{x}:f(\mathbf{x},\theta_1)/f(\mathbf{x},\theta_0)\neq c\}$上以概率1相等. 于是(a)得证.

对(b), 如果$E_{\theta_0}\varphi(\mathbf{X})<\alpha$,则令

$$\phi(\mathbf{x})=\min\{1,\varphi(\mathbf{x})+\alpha-E_{\theta_0}\varphi(\mathbf{X})\}$$

则$E_{\theta_0}\phi(\mathbf{X})\leq\alpha$, 即$\phi$为水平$\alpha$检验. 另一方面对所有$\mathbf{x}$, 有$\phi(\mathbf{x})\geq\varphi(\mathbf{x})$ 且等式成立当且仅当$\varphi(\mathbf{x})=1$. 由于$E_{\theta_1}\varphi(\mathbf{X})<1$, 故$P_{\theta_1}(\varphi(\mathbf{X})=1)<1$, 这将得出$E_{\theta_1}\varphi(\mathbf{X})<E_{\theta_1}\phi(\mathbf{X})$与$\tilde{\varphi}$为水平$\alpha$UMP矛盾, 因此必有$E_{\theta_0}\varphi(\mathbf{X})=\alpha$.

例5.4.4 设$\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$为自正态总体$N(\mu,1)$中抽取的随机样本, 其中$\mu$未知, 证明假设检验问题

$$H_0:\mu=0\longleftrightarrow H_1:\mu\neq 0$$

不存在水平为α的UMP检验.

三、利用NP引理求UMP检验

NP引理的作用主要不在于求象检验问题(1.2)那样的UMP检验, 因为实际应用中象(1.2) 那样的检验问题是不常见的. 一般情形是零假设和对立假设都是复合的情形. NP引理的主要作用是在于它是求更复杂情形下UMP检验的工具. 在前面的例5.4.1、例5.4.2和例5.4.3这三个例子中已经将检验问题推广到对立假设是复合的情形. 更一般的假设检验问题如(1.1)所示, 即$H_0:\theta\in\Theta_0\longleftrightarrow H_1:\theta\in\Theta_1$, 其中$\Theta_0$和$\Theta_1$皆为复合情形(即其中包含参数空间$\Theta$ 中的点不止一个) . 寻找这类检验问题的UMP检验的一般想法是: 在Θ_0 中挑一个θ_0尽可能与Θ_1接近, 再在Θ_1中挑一个θ_1, 用NP引理做出如(1.4)和(1.5)的UMP检验φ_{θ_1}. 一般当θ_1在Θ_1中变动时, φ_{θ_1}不随θ_1的变化而变化, 即不论θ_1 在Θ_1中如何变化, $\varphi_{\theta_1}=\varphi$与$\theta_1$无关, 则$\varphi$也是$H_0:\theta=\theta_0\longleftrightarrow H_1:\theta\in\Theta_1$的UMP检验. 因此, 更进一步若能证明: 此检验对任何$\theta\in\Theta_0$皆有检验水平α, 则φ也是$H_0:\theta\in\Theta_0\longleftrightarrow H_1:\theta\in\Theta_1$的水平为$\alpha$的UMP检验.

此法要行得通也不容易. 只有在参数空间为一维欧氏空间R_1或其一区间, 而检验的假设是单边的, 即为$H_0:\theta\leq\theta_0\longleftrightarrow H_1:\theta>\theta_0$或者$H_0:\theta\geq\theta_0\longleftrightarrow H_1:\theta<\theta_0$时, 且对样本分布有一定要求时, 上述方法才可行. 特别当样本分布具有单调似然比性质时, 上述两类单边检验的UMP检验是存在的. 下面就来讨论之.

定义 (MLR) 称随机变量X的分布$f(x,\theta)$具有单调似然比性质, 如果存在一个实值函数$T(x)$, 使得对任意的$\theta < \theta'$,

(1) 分布$f(x,\theta)$与$f(x,\theta')$是不相同的;

(2) 比值$f(x,\theta')/f(x,\theta)$为$T(x)$的非降函数.

当样本分布具有MLR性质时,对如下单边检验问题

$$H_0 : \theta \le \theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta > \theta_0 \tag{1.11}$$

有下列结论:

定理5.4.2 设样本$\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$的分布具有MLR性质, 参数空间$\Theta$为$R_1 = (-\infty, +\infty)$的一有限或无限区间, θ_0为Θ的一个内点, 则检验问题(1.11)的水平为α的UMP检验存在($0 < \alpha < 1$), 且有形式

$$\varphi_\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & 当T(\mathbf{x}) > c \\ r, & 当T(\mathbf{x}) = c \\ 0, & 当T(\mathbf{x}) < c \end{cases} \tag{1.12}$$

其中c和r ($0 \le r \le 1$)满足条件:

$$P_{\theta_0}(T(\mathbf{X}) > c) + r \cdot P_{\theta_0}(T(\mathbf{X}) = c) = \alpha \tag{1.13}$$

证 任取$\theta_1 > \theta_0$, 首先考虑检验问题

$$H_o' : \theta = \theta_0 \longleftrightarrow H_1' : \theta = \theta_1 \tag{1.14}$$

有似然比

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}, \theta_1)}{f(\mathbf{x}, \theta_0)}.$$

由MLR性质,$\lambda(\mathbf{x})$为$T(x)$的非降函数因此由NP引理可知检验问题(1.14)的UMP检验函数为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & 当\lambda(\mathbf{x}) > c' \\ r, & 当\lambda(\mathbf{x}) = c' \\ 0, & 当\lambda(\mathbf{x}) < c' \end{cases} \Longleftrightarrow \quad \varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & 当T(\mathbf{x}) > c \\ r, & 当T(\mathbf{x}) = c \\ 0, & 当T(\mathbf{x}) < c, \end{cases}$$

其中常数c和r满足下式

$$E_{\theta_0}[\varphi(\mathbf{X})] = P_{\theta_0}(T(\mathbf{X}) > c) + rP_{\theta_0}(T(\mathbf{X}) = c) = \alpha$$

由于c和r与θ_1无关, 故由(1.12)和(1.13)确定的检验函数$\varphi(\mathbf{x})$ 也是下述检验问题

$$H_0' : \theta = \theta_0 \longleftrightarrow H_1' : \theta > \theta_0$$

的水平为α的UMP检验.

我们只要证明$\varphi(\mathbf{x})$作为检验问题(1.11)的检验, 具有水平α, 即可完成证明. 为此我们只需证明$\varphi(\mathbf{x})$的功效函数$\beta_\varphi(\theta)$是θ的单调增函数即可. 下面我们来证明这一事实.

任取$\theta' < \theta''$, 记$A = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}, \theta'') < f(\mathbf{x}, \theta')\}$,$B = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}, \theta'') > f(\mathbf{x}, \theta')\}$ 以及$\sup\limits_A \varphi(\mathbf{x}) = a, \inf\limits_B \varphi(\mathbf{x}) = b$, 注意到$\varphi(\mathbf{x})$为$T(x)$的非降函数, 于是$b - a \geq 0$. 所以

$$
\begin{aligned}
\beta_\varphi(\theta'') - \beta_\varphi(\theta') &= \int_{\mathscr{X}} \varphi(\mathbf{x})[f(\mathbf{x}, \theta'') - f(\mathbf{x}, \theta')]\mathrm{d}\mathbf{x} \\
\geq \quad & a \int_A [f(\mathbf{x}, \theta'') - f(\mathbf{x}, \theta')]\mathrm{d}\mathbf{x} + b \int_B [f(\mathbf{x}, \theta'') - f(\mathbf{x}, \theta')]\mathrm{d}\mathbf{x} \\
= \quad & (b - a) \int_B [f(\mathbf{x}, \theta'') - f(\mathbf{x}, \theta')]\mathrm{d}\mathbf{x} \geq 0,
\end{aligned}
$$

即$\beta_\varphi(\theta'') > \beta_\varphi(\theta')$, 对任给的$\theta'' > \theta'$成立, 这就证明了$\beta_\varphi(\theta)$为$\theta$的单调增函数, 故有

$$
\sup_{\theta \leq \theta_0} \beta_\varphi(\theta) \leq \beta_\varphi(\theta_0) = E_{\theta_0}[\varphi(\mathbf{X})] = \alpha
$$

因此由(1.12)和(1.13)确定的$\varphi(\mathbf{X})$为检验问题(1.11) 的水平为α的UMP检验. 定理证毕.

注5.4.5

1. 在定理5.4.2中若样本分布是连续型分布, 则UMP检验不需要随机化. 故检验问题(1.11)的水平为α的UMP检验, 通过(1.12)和(1.13)中令$r = 0$获得.

2. 特别当样本分布为如下指数族时,

$$
f(\mathbf{x}, \theta) = c(\theta) \exp\{Q(\theta)T(\mathbf{x})\}h(\mathbf{x}), \tag{1.15}
$$

   其中$c(\theta) > 0$和$Q(\theta)$为θ的严格增函数, $T(\mathbf{x})$和$h(\mathbf{x})$ 是样本$\mathbf{x}$的函数. 则$f(\mathbf{x}, \theta)$具有单调似然比性质, 于是定理5.4.2成立. 若$Q(\theta)$为θ的严格降函数, 其余不变, 则检验问题(1.11)的水平为α的UMP检验, 需要通过将(1.12)和(1.13)式中的不等号反向(等号不变) , 即可得到.

考虑与(1.11)相反的单边检验问题

$$
H_0 : \theta \geq \theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta < \theta_0 \tag{1.16}
$$

关于这一检验问题的水平为α的UMP检验有下列定理.

定理5.4.3 若定理5.4.2的条件成立, 则检验问题(1.16)的水平为α的UMP检验存在, 且有形式

$$
\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & 当T(\mathbf{x}) < c; \\ r, & 当T(\mathbf{x}) = c; \\ 0, & 当T(\mathbf{x}) > c; \end{cases} \tag{1.17}
$$

其中c和r $(0 \leq r \leq 1)$满足条件:

$$
P_{\theta_0}(T(\mathbf{X}) < c) + r \cdot P_{\theta_0}(T(\mathbf{X}) = c) = \alpha, \tag{1.18}
$$

此定理得证明方法与定理5.4.2类似, 从略.

例5.4.4 问题与例5.4.1相同, 即设$\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$为从正态总体$N(\theta, 1)$中抽取的简单样本，求检验问题$H_0 : \theta \leq \theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta > \theta_0$的UMP检验, 此处$\theta_0$和检验水平$\alpha$给定.

解 正态分布为指数族分布, 样本密度为

$$\begin{aligned} f(x_1,\cdots,\theta) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\{-n\theta^2/2\}\exp\{n\theta\bar{x}\}\exp\Big\{-\sum_{i=1}^n x_i^2/2\Big\}, \\ &= c(\theta)exp\{Q(\theta)T(\mathbf{X})\}h(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

此处$c(\theta)=(2\pi)^{n/2}\exp\{-n\theta^2/2\}$, $h(\mathbf{x})=\exp\{-\sum_{i=1}^n x_i^2/2\}$, $T(\mathbf{X})=\bar{X}$, $Q(\theta)=n\theta$为θ的严格增函数, 由定理5.4.2 (由于正态分布为连续分布, 检验函数不需要随机化) 可知水平为α的UMP检验由下式给出:

$$\varphi(\mathbf{x})=\begin{cases}1, & T(\mathbf{x})>c;\\ 0, & T(\mathbf{x})\le c;\end{cases}.$$

由于$T(\mathbf{X})=\bar{X}\sim N(\theta,1/n)$, 故$\sqrt{n}(\bar{X}-\theta)\sim N(0,1)$, 令

$$\alpha=E_{\theta_0}[\varphi(\mathbf{X})]=P_{\theta_0}(T(\mathbf{X})>c)=P_{\theta_0}(\sqrt{n}(\bar{X}-\theta_0)>\sqrt{n}(c-\theta_0)),$$

可知$\sqrt{n}(c-\theta_0)=u_\alpha$, 即$c=\theta_0+\frac{1}{\sqrt{n}}u_\alpha$. 故知水平为$\alpha$的UMP检验为

$$\varphi(\mathbf{x})=\begin{cases}1, & T(\mathbf{x})>\theta_0+u_\alpha/\sqrt{n};\\ 0, & T(\mathbf{x})\le\theta_0+u_\alpha/\sqrt{n};\end{cases}.$$

特别取$\theta_0=0$就与例5.4.1中的检验结果相同.

例5.4.5 从一大批产品中抽取n个检查其结果, 得样本$\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$, 其中$X_i=1$,若第i个产品为废品,否则为0, $i=1,\cdots,n$.求

$$H_0:p\le p_0\longleftrightarrow H_1:p>p_0$$

的水平为α的UMP检验. 其中p_0和α给定.

解 令$T(\mathbf{X})=\sum\limits_{i=1}^n X_i$为$n$个产品中的废品数, 则$T\sim$ 二项分布 $b(n,p)$. 二项分布为指数族, 其概率分布为

$$f(t,p)=\binom{n}{t}p^t(1-p)^{n-t}=\binom{n}{x}(1-p)^n\exp\Big\{\log\Big(\frac{p}{1-p}\Big)T(\mathbf{x})\Big\}$$

其中$c(p)=(1-p)^n$, $T(\mathbf{x})=\sum\limits_{i=1}^n X_i$, $h(\mathbf{x})=\binom{n}{x}$, $Q(p)=\log\frac{p}{1-p}$为p的严格单调增函数, 故由定理5.4.2可知

$$\varphi(\mathbf{x})=\begin{cases}1, & \text{当}T(\mathbf{x})>c;\\ r, & \text{当}T(\mathbf{x})=c;\\ 0, & \text{当}T(\mathbf{x})<c;\end{cases}$$

其中c有下列不等式决定

$$\alpha_1=\sum_{i=c+1}^n\binom{n}{i}p_0^i(1-p_0)^{n-i}<\alpha<\sum_{i=c}^n\binom{n}{i}p_0^i(1-p_0)^{n-i},$$

取r为

$$r=\frac{\alpha-\alpha_1}{\binom{n}{c}p_0^c(1-p_0)^{n-c}},$$

则必有

$$E_{\varphi_0}[\varphi(\mathbf{X})] = P_{\varphi_0}(T(\mathbf{X}) > c) + r \cdot P(T(\mathbf{X}) = c) = \alpha,$$

因此上述检验$\varphi(x)$为水平为α的UMP检验.这是对例5.4.2的补充。

例5.4.6 设$\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$为自Poisson总体$P(\lambda)$中抽取的随机样本, $\lambda > 0$为未知参数. 求

$$H_0 : \lambda \le \lambda_0 \longleftrightarrow H_1 : \lambda > \lambda_0$$

的水平为α的UMP检验. 其中λ_0和α给定.

解 Poisson分布为指数族分布. 样本$\mathbf{X}$的密度函数为

$$f(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^n x_i!} = \frac{e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^n x_i!} \exp\big\{(\log \lambda) T(x)\big\},$$

此处$c(\lambda) = e^{-n\lambda}$, $T(x) = \sum_{i=1}^n X_i$, $h(x) = 1 \big/ \prod_{i=1}^n x_i!$, $Q(\lambda) = \log \lambda$为$\lambda$的严格增函数, 由定理5.4.2可知

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & T(x) > c; \\ r, & T(x) = c; \\ 0, & T(x) < c; \end{cases}$$

其中c由下列不等式确定(注意检验条件量$T(X) = \sum\limits_{i=1}^n X_i \sim P(n\lambda)$) :

$$\alpha_1 = \sum_{k=c+1}^{\infty} \frac{(n\lambda_0)^k e^{-n\lambda_0}}{k!} \le \alpha < \sum_{k=c}^{\infty} \frac{(n\lambda_0)^k e^{-n\lambda_0}}{k!}.$$

取r为

$$r = \frac{(\alpha - \alpha_0) c!}{(n\lambda_0)^c e^{-n\lambda_0}},$$

则必有

$$E_{\lambda_0}[\varphi(X)] = P_{\lambda_0}(T(X) > c) + r \cdot P_{\theta_0}(T(X) = c) = \alpha,$$

故上述检验$\varphi(x)$为水平为α的UMP检验.

例5.4.7 设$\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$为自指数分布总体$EP(\lambda)$中抽取的随机样本, $\lambda > 0$为未知参数. 求

$$H_0 : \lambda \le \lambda_0 \longleftrightarrow H_1 : \lambda > 0$$

的水为α的UMP检验, 此处λ_0和α给定.

解 指数分布属于指数族. 样本X的密度函数为

$$f(\mathbf{x}, \lambda) = \lambda^n \exp\Big\{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i\Big\} I_{[x_i > 0,\ i=1,2\cdots,n]},$$

此处$c(\lambda) = \lambda^n$, $h(\mathbf{x}) = I_{[x_i > 0, i=1,2\cdots,n]}$, $T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$, $Q(\lambda) = -\lambda$为λ的单调降函数, 故由定理5.4.2的注5.4.5可知

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{当} T(\mathbf{x}) < c; \\ 0, & \text{当} T(\mathbf{x}) \ge c; \end{cases}.$$

由推理2.4.5可知$2nT(\mathbf{X})\sim\chi^2_{2n}$, 故有

$$\alpha=P_{\lambda_0}(T(\mathbf{X})<c)=P_{\lambda_0}(2\lambda_0T(\mathbf{X})<2\lambda_0c),$$

因此$2\lambda_0c=\chi^2_{2n}(1-\alpha)$, 即$c=\frac{1}{2\lambda_0}\chi^2_{2n}(1-\alpha)$. 因此

$$\varphi(\mathbf{x})=\begin{cases}1, & \text{当}T(\mathbf{x})<\frac{1}{2\lambda_0}\chi^2_{2n}(1-\alpha);\\ 0, & \text{当}T(\mathbf{x})\geq\frac{1}{2\lambda_0}\chi^2_{2n}(1-\alpha);\end{cases}$$

为水为α的UMP检验.

例5.4.8 设$X=(X_1,\cdots,X_n)$为自正态总体$N(0,\sigma^2)$中抽取的随机样本, σ^2为未知参数. 求

$$H_0:\sigma^2\geq\sigma_0^2\longleftrightarrow H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$$

的水为α的UMP检验, 此处σ_0^2和α给定.

解 正态分布$N(0,\sigma^2)$为指数族, 样本密度函数为

$$f(\mathbf{x},\sigma^2)=\prod_{i=1}^n f(x_i,\sigma^e)=\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\Big)^n\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2\Big\},$$

此处$c(\sigma)=\big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\big)^n$, $h(\mathbf{x})\equiv1$, $T(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^n x_i^2$, $Q(\sigma^2)=-\frac{1}{2\sigma^2}$为$\sigma^2$的严格单调增函数, 由定理5.4.3可知

$$\varphi(\mathbf{x})=\begin{cases}1, & T(\mathbf{x})<c;\\ 0, & T(\mathbf{x})\geq c;\end{cases}$$

由于$\sum\limits_{i=1}^n X_i^2/\sigma^2\sim\chi^2_n$, 令

$$\alpha=E_{\sigma_0^2}[\varphi(\mathbf{X})]=P_{\sigma_0^2}\left(\sum_{i=1}^n X_1^2<c\right)=P_{\sigma_0^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_1^2}{\sigma_0^2}<\frac{c}{\sigma_0^2}\right),$$

故有$c/\sigma_0^2=\chi^2_n(1-\alpha)$, 即$c=\sigma_0^2\chi^2_n(1-\alpha)$. 因此

$$\varphi(\mathbf{x})=\begin{cases}1, & \text{当}T(\mathbf{x})<\sigma_0^2\chi^2_n(1-\alpha);\\ 0, & \text{当}T(\mathbf{x})\geq\sigma_0^2\chi^2_n(1-\alpha);\end{cases}$$

为水平为α的UMP检验.

四、无偏检验*

前面已经说过, UMP检验存在是很少的例外. 因此作为一致最优检验的准则, 它的作用是有限的. 为了得到适用范围更广的检验准则, 可采取下列办法: 先对所考虑的检验施加某种合理的一般性的限制, 这样就缩小了所考虑的检验的范围, 然后在这缩小了的范围中找一致最优检验. 正如在点估计问题中, 我们先限制估计量必须是无偏的, 然后在无偏估计类中, 去寻找方差一致最小的无偏估计. 基于这种想法引进无偏检验的定义.

定义5.4.2 设φ为检验问题(1.1)的一个检验, $\beta_\varphi(\theta)$为其功效函数. 若对任何$\theta_1 \in \Theta_0$及$\theta_2 \in \Theta_1$, 总有$\beta_\varphi(\theta_1) \le \beta_\varphi(\theta_2)$, 则称$\varphi$是(1.1)的一个无偏检验 (Unbiased Test). 若无偏检验有水平α, 则称φ为水平α的无偏检验.

这个定义的一个等价形式叙述如下: 设φ为检验问题(1.1)的一个检验, 若其功效函数$\beta_\varphi(\theta)$满足条件: 对$\forall\ \theta_1 \in \Theta_0$ 有$\beta_\varphi(\theta) \le \alpha$, 对$\forall\ \theta_2 \in \Theta_1$有$\beta_\varphi(\theta) \ge \alpha$, 则称$\varphi$为水平为$\alpha$的无偏检验, 或简为无偏检验.

无偏检验的直观意义很清楚: 若φ为$H_0 \longleftrightarrow H_1$的无偏检验, 则其犯第一类错误的概率不应超过不犯第二类错误的概率.

下面给出一致最优无偏检验的定义. 记

$$U_\alpha = \{\varphi: \varphi \text{ 为水平 } \alpha \text{ 的无偏检验}\}$$

即U_α为一切水平为α的无偏检验的类.

定义5.4.3 若$\varphi \in U_\alpha$, 且对任何$\varphi_1 \in U_\alpha$, 有

$$\beta_\varphi(\theta) \ge \beta_{\varphi_1}(\theta), \text{ 对一切 } \theta \in \Theta_1,$$

则称φ是(1.1)的一个水平为α的一致最优无偏检验 (Uniformly Most Powerful Unbiased Test,简记为UMPU检验).

注5.4.7 由上述定义可知任一UMP检验必为UMPU检验. 说明如下: 记UMP检验φ的功效函数为$\beta_\varphi(\theta)$, 由UMP检验的定义可知$\beta_\varphi(\theta) \le \alpha$, 对一切$\theta \in \Theta_0$, 又显见$\varphi^* \equiv \alpha$是水平为$\alpha$的检验, 由UMP检验定义可知$\beta_\varphi(\theta) \ge \beta_{\varphi^*}(\theta) \equiv \alpha$, 对一切$\theta \in \Theta_1$, 可见有

$$\beta_\varphi(\theta_2) \ge \alpha \ge \beta_\varphi(\theta_1), \text{ 对任给 } \theta_1 \in \Theta_0,\ \theta_2 \in \Theta_1,$$

故检验φ是无偏的, 又是UMP检验, 因此必为UMPU检验.

UMPU检验存在的情况比UMP要广一些. 对下列单参数指数族

$$f(x,\theta) = c(\theta)\exp\{Q(\theta)T(x)\}h(x)$$

我们在前面的定理5.4.2和定理5.4.3中已证明了下列检验问题的水平为α的UMP检验存在, 因而也是UMPU的.

(1) $H_0: \theta \le \theta_0 \longleftrightarrow H_1: \theta > \theta_0$,

(2) $H_0: \theta \ge \theta_0 \longleftrightarrow H_1: \theta < \theta_0$.

还可进一步证明下列两类单参指数族的水平为α的UMPU检验是存在的:

(3) $H_0: \theta = \theta_0 \longleftrightarrow H_1: \theta \ne \theta_0$,

(4) $H_0: \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \longleftrightarrow H_1: \theta < \theta_1$ 或 $\theta > \theta_2$,

其中(3)和(4)两类检验问题的UMPU检验的存在性已超出本书的范围, 有兴趣的同学可参看参考文献[1]P_{359}.

2 似然比检验

似然比检验是Neymen和Pearson在1928年提出的构造假设检验的一般方法. 它在假设检验中的地位, 相当于极大似然估计在点估计中的地位. 它可视为$Fisher$的极大似然原理在假设检验问题中的体现. 由这种方法构造出来的检验, 一般说有比较良好的性质, 前几节提到的不少重要检验都是似然比检验. 这个方法的一个重要优点就是适用面广. 就是说, 它对分布族的形式没有什么特殊的要求.

一. 似然比检验的定义

设有分布族$\{f(x,\theta),\ \theta\in\Theta\}$, Θ为参数空间. 令$\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$为自上述分布族中抽取的简单随机样本, $f(\mathbf{x},\theta)$为样本的概率函数.要考虑检验问题(**??**). 在有了样本$\mathbf{x}$后将$f(\mathbf{x},\theta)$视为θ的函数, 称为似然函数. 如第三章介绍极大似然估计时所述. 若$f(\mathbf{x},\theta_1)<f(\mathbf{x},\theta_2)$,则我们认为真参数为$\theta_2$的“似然性”较其为$\theta_1$的“似然性”大. 由于假设检验在“$\theta\in\Theta_0$与$\theta\in\Theta_1$”这二者中选其一, 我们自然考虑以下两个量

$$L_{\Theta_0}(\mathbf{x})=\sup_{\theta\in\Theta_0} f(\mathbf{x},\theta),$$
$$L_{\Theta_1}(\mathbf{x})=\sup_{\theta\in\Theta_1} f(\mathbf{x},\theta).$$

考虑其比值$L_{\Theta_1}(\mathbf{x})/L_{\Theta_0}(\mathbf{x})$, 若此比值较大, 则说明真参数在$\Theta_1$内的“似然性”较大, 因而我们倾向于否定假设“$\theta\in\Theta_0$”. 反之, 若此比值较小, 我们倾向于接受假设“$\theta\in\Theta_0$”.

若记$\lambda(\mathbf{x})=L_{\Theta}(\mathbf{x})/L_{\Theta_0}(\mathbf{x})$, 其中$L_{\Theta}(\mathbf{x})=\sup_{\theta\in\Theta} f(\mathbf{x},\theta)$.由于$\lambda(\mathbf{x})$ 与$L_{\Theta_1}(\mathbf{x})/L_{\Theta_{0}(\mathbf{x})}$同增或同减, 我们可用$\lambda(\mathbf{x})$代替比值$L_{\Theta_1}(\mathbf{x})/L_{\Theta_{0}(\mathbf{x})}$, 这样做的好处是$L_{\Theta}(\mathbf{x})=\sup_{\theta\in\Theta} f(\mathbf{x},\theta)$的计算比$L_{\Theta_1}(\mathbf{x})$要容易. 因此得到如下定义.

定义5.5.1 设样本$\mathbf{X}$有概率函数$f(\mathbf{x},\theta)$, $\theta\in\Theta$, 而Θ_0 为参数空间Θ的真子集, 考虑检验问题(**??**),则统计量

$$\lambda(\mathbf{x})=\sup_{\theta\in\Theta} f(\mathbf{x},\theta)\Big/\sup_{\theta\in\Theta_0} f(\mathbf{x},\theta) \tag{2.1}$$

称为关于该检验问题的似然比. 而由下述定义的检验函数

$$\varphi(\mathbf{x})=\begin{cases}1, & \text{当}\ \lambda(\mathbf{x})>c;\\ r, & \text{当}\ \lambda(\mathbf{x})=c;\\ 0, & \text{当}\ \lambda(\mathbf{x})<c.\end{cases} \tag{2.2}$$

其中c, r $(0\le r\le 1)$为待定常数, 称为检验问题(**??**)的一个似然比检验 (Likelihood Ratio Test),有些文献中也称为广义似然比检验.

如我们在§5.4中所述, 若样本分布为连续型分布时, 在(2.2)中令$r=0$.即

$$\varphi(\mathbf{x})=\begin{cases}1, & \text{当}\ \lambda(\mathbf{x})>c;\\ 0, & \text{当}\ \lambda(\mathbf{x})\le c.\end{cases}$$

在(2.2)中常数c和r的选择是要使检验具有给定的水平α.

根据上面所说, 找似然比检验有以下步骤:

1.求似然函数$f(\mathbf{x},\theta)$, 并明确参数空间Θ和Θ_0是什么.

2.算出$L_\Theta(\mathbf{x})=\sup\limits_{\theta\in\Theta}f(\mathbf{x},\theta)$和$L_{\Theta_0}(\mathbf{x})=\sup\limits_{\theta\in\Theta_0}f(\mathbf{x},\theta)$.

3.求出$\lambda(\mathbf{X})$或与其等价的统计量的分布.

4.确定c和r使(2.2)具有给定的检验水平α.

其中, 最关键的是第三步. 一般$\lambda(\mathbf{x})$的表达式复杂, 求其分布不易. 但若$\lambda(\mathbf{x})=g(T(\mathbf{x}))$ 为$T(\mathbf{x})$的单调上升(或下降) 函数, 则检验(2.2)显然等价于

$$\varphi(\mathbf{x})=\begin{cases}1, & \text{当 } T(\mathbf{x})>c;\\ r, & \text{当 } T(\mathbf{x})=c;\\ 0, & \text{当 } T(\mathbf{x})<c.\end{cases}$$

因此代替求$\lambda(\mathbf{X})$的分布, 我们只要求出$T(\mathbf{X})$的分布即可(若$\lambda(\mathbf{x})$ 为$T(\mathbf{x})$的单调下降函数,则将$\varphi(\mathbf{x})$中的不等式反向).

如果$\lambda(\mathbf{X})$分布无法求得, 可用其极限分布近似代替, 这在本节最后一段介绍.

二、若干例子

例5.5.1 设$\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$是从正态分布族$N(\mu,\sigma^2),-\infty<\mu<+\infty,\ \sigma^2>0$中抽取的随机样本, 求下列检验问题的水平为$\alpha$的似然比检验

$$H_0:\mu=\mu_0\longleftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0. \tag{2.3}$$

解 记$\theta=(\mu,\sigma^2)$,似然函数为

$$f(\mathbf{x},\theta)=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2\}, \tag{2.4}$$

在这里, 参数空间为

$$\Theta=\{\theta=(\mu,\sigma^2):\ -\infty<\mu<+\infty,\ \sigma^2>0\}.$$

零假设H_0对应的Θ的子集为

$$\Theta_0=\{\theta=(\mu,\sigma^2):\ \mu\le\mu_0,\ \sigma^2>0\},$$

在Θ上, μ和σ^2的极大似然估计(MLE)为

$$\hat{\mu}=\bar{X},\qquad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2;$$

在Θ_0上, σ^2的MLE为

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu_0)^2.$$

故有

$$\sup_{\theta\in\Theta} f(\mathbf{x},\theta)=f(\mathbf{x},\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)=\Big(\frac{2\pi e}{n}\Big)^{-n/2}\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\Big)^{-n/2}$$

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} f(\mathbf{x},\theta)=f(\mathbf{x},\mu_0,\hat{\sigma}^2)=\Big(\frac{2\pi e}{n}\Big)^{-n/2}\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\Big)^{-n/2}. \tag{2.5}$$

从而有

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{x}) &= \Big[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\Big/\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\Big]^{-n/2}\\ &=\left[1+\left(\frac{\sqrt{n}|\bar{x}-\mu_0|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}\right)^2\right]^{n/2}=\Big(1+\frac{1}{n-1}T^2\Big)^{\frac{n}{2}},\end{aligned}$$

其中$T=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$), 由于$\lambda(\mathbf{X})$为$|T|$的增函数, 因此似然比检验的否定域为$D=\big\{\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n):\ \lambda(\mathbf{X})>c'\big\}=\{\mathbf{X}:\ |T|>c\}$.令

$$P(|T|>c|H_0)=\alpha.$$

利用下列事实:当H_0成立时$T\sim t_{n-1}$,则可知$c=t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})$. 因此

$$\varphi(\mathbf{x})=\begin{cases}1, & \text{当 } |T|\ge t_{n-1}(\alpha/2);\\ 0, & \text{当 } |T|<t_{n-1}(\alpha/2).\end{cases}$$

是(2.3)的一个水平为α的似然比检验,可以证明它是(2.3)水平为α的UMPU检验.

例5.5.2 问题与例5.5.1相同, 求下列检验

$$H_0:\mu\le\mu_0\longleftrightarrow H_1:\mu>\mu_0 \tag{2.6}$$

的水平为α的似然比检验.

解 此时似然函数$f(\mathbf{x},\theta)$和Θ与例5.5.1中相同, 但

$$\Theta_0=\{\theta=(\mu,\sigma^2):\mu\le\mu_0,\ \sigma^2>0\},$$

因此, $L_\Theta(\mathbf{x})=\sup\limits_{\theta\in\Theta} f(\mathbf{x},\mu,\sigma^2)$与例5.5.1 中完全相同. 但要注意到

$$\begin{aligned}L_{\Theta_0}(\mathbf{x}) &= \sup_{\theta\in\Theta_0}(2\pi\sigma)^{-n}exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\Big\}\Big\}\\ &= \sup_{\theta\in\Theta_0}(2\pi\sigma)^{-n}exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2-\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big\}.\end{aligned}$$

记$g(\mu)=exp\big\{-\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\big\}$.当$\sigma^2$ 固定,$\mu\le\bar{x}$时，$g(\mu)$关于μ单调增. 因此

(i)当$\bar{x}>\mu_0$时,若H_0成立，$g(\mu)$在$\mu=\mu_0$处达到最大，故有

$$\min_{\mu\le\mu_0}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2.$$

(ii)当$\bar{x} \le \mu_0$时, 若H_0成立，$g(\mu)$在$\mu = \bar{x}$处达到最大，故有

$$\min_{\mu \le \mu_0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

因此有

$$Ł_{\Theta_0}(\mathbf{x}) = \begin{cases} L_\Theta(\mathbf{x}), & \text{当 } \bar{x} \le \mu_0; \\ (\frac{2\pi e}{n})^{-n/2} \Big(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2 \Big)^{-n/2}, & \text{当 } \bar{x} > \mu_0. \end{cases}$$

因此有

$$\lambda(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \bar{x} \le \mu_0; \\ \Big(\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \Big)^{\frac{n}{2}} = \big(1 + \frac{1}{n-1} T^2\big)^{\frac{n}{2}}, & \text{当 } \bar{x} > \mu_0. \end{cases}$$

此处$T = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0) / \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}$, 由于$\lambda(\mathbf{x})$为$T$的增函数, 因此似然比检验的否定域为

$$D = \{\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n) : \lambda(\mathbf{X}) > c'\} = \{\mathbf{X} : T > c\}.$$

由于检验水平α给定, c由下式确定:

$$P(T > c \mid \mu = \mu_0) = \alpha$$

当$\mu = \mu_0$时, $T \sim t_{n-1}$,故知$c = t_{n-1}(\alpha)$.

类似在§5.2中所述, 上述检验的功效函数$\beta\varphi(\mu)$是μ的单调增函数, 故有

$$\beta\varphi(\mu) \le \beta\varphi(\mu_0) = \alpha, \quad \text{当 } \mu \le \mu_0.$$

因此

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } T(\mathbf{x}) > t_{n-1}(\alpha); \\ 0, & \text{当 } T(\mathbf{x}) \le t_{n-1}(\alpha). \end{cases}$$

为检验问题(2.6)的水平为α的似然比检验. 可以证明它是(2.6) 的水平为α的UMPU检验.

类似方法可求得检验问题:

$$H_0 : \mu \ge \mu_0 \longleftrightarrow H_1 : \mu < \mu_0 \tag{2.7}$$

的水平为α的似然比检验, 这留给读者做练习.

例5.5.3 设$\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$为自正态分布总体$N(\mu, \sigma^2)$中抽取的随机样本, 考虑如下检验问题的水平为$\alpha$的似然比检验

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma^2 \ne \sigma_0^2, \tag{2.8}$$

此处σ_0^2和α给定.

解 此时似然函数仍为(2.4), 参数空间Θ如例5.5.1, 而

$$\Theta_0 = \{\theta = (\mu, \sigma^2) : -\infty < \mu < +\infty, \ \sigma^2 = \sigma_0^2\}, \tag{2.9}$$

$L_{\Theta}(\mathbf{x})$也与例5.5.1相同,但

$$L_{\Theta_0}(\mathbf{x}) = \sup_{\mu}\Big\{(2\pi\sigma_{_0}^2)^{-n/2} exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma_{_0}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_{_i}-\mu)^2\Big\}\Big\}$$
$$= (2\pi\sigma_{_0}^2)^{-n/2} exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma_{_0}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_{_i}-\bar{x})^2\Big\},$$

因此有

$$\lambda(\mathbf{x}) = \Big(\frac{e}{n}\Big)^{-n/2}\Big[\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\Big]^{-n/2} exp\Big\{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\Big\}$$

令$\xi = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_{_i}-\bar{x})^2$, $g(\xi) = \xi^{-\frac{n}{2}}e^{\xi/2}$, 则在$\xi > 0$时$g(\xi)$关于$\xi$先降后升, 且当$\xi \to 0$和$\xi \to \infty$时, $g(\xi)$的极限皆为$+\infty$,其形状如图5.5.1 . 因此似然比检验的接受域为

$$\bar{D} = \{\mathbf{X}:\ \lambda(\mathbf{X}) \le c\} = \Big\{\mathbf{X}:\ k_1 \le \frac{1}{\sigma_{_0}^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \le k_2\Big\}$$

由于在H_0成立时, $\frac{1}{\sigma_{_0}^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi^2_{n-1}$, 因而$k_1$和$k_2$为下列方程组的解

$$\begin{cases} g(k_1) = g(k_2) \\ P(k_1 \le \xi \le k_2 \mid H_0) = 1-\alpha \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} k_1^{n/2}e^{-k_1/2} = k_2^{n/2}e^{-k_2/2} \\ P(\xi < k_1|H_0) + P(\xi > k_2|H_0) = \alpha. \end{cases} \tag{2.10}$$

由方程组(2.10)的解得到的否定域确定的似然比检验不是UMPU的, 但与之相差不远. 可以证明: 若将(2.10)的第一个方程中的n改为$n-1$而解得的k_1和k_2, 则由其确定的似然比检验是UMPU的.

方程(2.10)的解不易得到, 一般取

$$P(\xi < k_1|H_0) = \alpha/2, \qquad P(\xi > k_2|H_0) = \alpha/2$$

得到

$$k_1 = \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2), \quad k_2 = \chi^2_{n-1}(\alpha/2)$$

由k_1, k_2确定的否定域与我们在§5.2中用直观方法求得的单个正态总体方差的检验结果是一致的. 因此检验问题(2.8)的水平为α 的似然比检验是

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2) < \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 < \chi^2_{n-1}(\alpha/2); \\ 1, & \text{其它}. \end{cases}$$

这一水平为α的检验与UMPU检验相差不多.

单边检验$H_0: \sigma^2 \ge \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$, 水平为$\alpha$的UMP检验已由例5.4.8给出. 这一检验问题及$H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$的水平为$\alpha$的似然比检验留给读者作为练习.

关于两样本正态总体均值差和方差比的似然比检验的方法与前面的例子相同，只是表达要复杂一些，已将其放到习题中，供读者练习。

例5.5.4 设$\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$为自均匀分布总体$U(0,\theta)$中抽取的随机样本, 求

$$H_0:\ \theta\le\theta_0 \longleftrightarrow H_1:\ \theta>\theta_0 \tag{2.11}$$

水平为α的似然比检验. 此处α和θ_0给定.

解 此时似然函数为

$$f(\mathbf{x},\theta)=\begin{cases}\theta^{-n}, & \text{当 } x_{(n)}\le\theta;\\ 0, & \text{当 } x_{(n)}>\theta.\end{cases}$$

样本空间 $\Theta=(0,\theta),\Theta_0=(0,\theta_0)$.由于$\max\limits_{1\le i\le n} X_i$为$\theta$的MLE, 故有

$$L_\Theta(\mathbf{x})=\sup_{\theta\in\Theta}f(\mathbf{x},\theta)=(x_{(n)})^{-n}$$

和

$$L_{\Theta_0}(\mathbf{x})=\sup_{\theta\in\Theta_0}f(\mathbf{x},\theta)=\begin{cases}L_\Theta(\mathbf{x}), & \text{当 } x_{(n)}\le\theta_0;\\ 0, & \text{当 } x_{(n)}>\theta_0.\end{cases}$$

因此有

$$\lambda(\mathbf{x})=\begin{cases}1, & \text{当 } x_{(n)}\le\theta_0;\\ \infty, & \text{当 } x_{(n)}>\theta_0.\end{cases}$$

检验的否定域为

$$D=\{\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n):\ \lambda(\mathbf{X})\ge 1\}.$$

将集合$G=\{\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n):\lambda(\mathbf{x})=1\}$分为两部分$G_1=\{\mathbf{x}:c<x_{(n)}\le\theta_0\},G_2=G-G_1$. 因此检验否定域的等价形式为

$$D=\{\mathbf{X}:\ X_{(n)}>c\}$$

由于$T=X_{(n)}$的密度函数为$f(t)=\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}I_{[0<t<\theta]}$,故由

$$\begin{aligned}\alpha=P(X_{(n)}>c|\theta=\theta_0)&=\int_c^\infty\frac{nt^{n-1}}{\theta_0^n}dt\\ &=\int_c^{\theta_0}\frac{nt^{n-1}}{\theta_0^n}dt=1-\left(\frac{c}{\theta_0}\right)^n,\end{aligned}$$

解出$c=\theta_0\sqrt[n]{1-\alpha}$,故否定域为

$$D=\{\mathbf{X}:\ X_{(n)}>\theta_0\sqrt[n]{1-\alpha}\}.$$

检验的功效函数为

$$\begin{aligned}&\beta_\varphi(\theta)=P(X_{(n)}>\theta_0\sqrt[n]{1-\alpha})=\int_{\theta_0\sqrt[n]{1-\alpha}}^\infty\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}dt\\ &=\int_{\theta_0\sqrt[n]{1-\alpha}}^{\theta}\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}dt=\frac{1}{\theta^n}(\theta^n-\theta_0^n(1-\alpha))\\ &=1-(1-\alpha)(\theta_0/\theta)^n.\end{aligned}$$

它是θ的单调增函数, 故有

$$\beta_\varphi(\theta) \le \beta_\varphi(\theta_0), \qquad \text{对一切 } \theta \le \theta_0,$$

因此以D为否定域的检验水平为α. 因此

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } X_{(n)} > \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha}; \\ 0, & \text{当 } X_{(n)} \le \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha}. \end{cases}$$

为检验问题(2.11)的水平为α的似然比检验.

例5.5.5 设样本$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$取自指数分布总体，其密度函数为

$$f(x, \theta) = \frac{1}{2} exp\{-(x-\theta)/2\}, \ \ x \ge \theta, \ \ -\infty < \theta < \infty$$

求检验问题

$$H_0: \ \theta = \theta_0 \longleftrightarrow H_1: \ \theta \ne \theta_0 \tag{2.12}$$

水平为α的似然比检验. 此处α和θ_0给定.

解 此时似然函数为

$$f(\mathbf{x}, \theta) = \frac{1}{2^n} exp\Big\{ -\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^n x_i - n\theta \Big) \Big\}.$$

参数空间和H_0对应的参数空间的子集分别为

$$\Theta = \{\theta: \ -\infty < \theta < \infty\}, \qquad \Theta_0 = \{\theta: \ \theta = \theta_0\}$$

在Θ和Θ_0上似然函数的最大值分别为

$$L_\Theta(\mathbf{x}) = \frac{1}{2^n} exp\Big\{ -\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^n x_i - n x_{(1)} \Big) \Big\},$$

$$L_{\Theta_0}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2^n} exp\Big\{ -\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^n x_i - n\theta_0 \Big) \Big\},$$

此处$x_{(1)} = min\{X_1, \ldots, X_n\}$.似然比为

$$\lambda(\mathbf{x}) = L_\Theta(\mathbf{x}) / L_{\Theta_0}(\mathbf{x}) = exp\Big\{ n(x_{(1)} - \theta_0)/2 \Big\}$$

为$x_{(1)}$的单调增函数，故有

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } X_{(1)} > c \\ 0, & \text{当 } X_{(n)} < c. \end{cases}$$

令$T(\mathbf{X}) = X_{(1)}$,易知T的密度函数为

$$g(t) = \frac{n}{2} \, exp\{-n(t-\theta)/2\}.$$

因此有

$$\alpha = P(X_{(1)} > c | H_0) = \int_c^\infty \frac{n}{2} exp\{-n(t-\theta_0)/2\} dt = e^{-n(c-\theta_0)/2}.$$

两边取对数得方程: $-n(c-\theta_0)/2 = log\, \alpha$. 解方程得$c = \theta_0 - \frac{2}{n} log\, \alpha$.因此检验的否定域为

$$D = \Big\{ \mathbf{X}: \ X_{(1)} > \theta_0 - \frac{2}{n} log\, \alpha \Big\}.$$

三、似然比的渐近分布

在本节第一部分似然比检验的定义5.5.1中，为了定出(2.2)式中的c和r，就需要知道似然比$\lambda(\mathbf{X})$)在零假设成立时的分布. 在简单的例子中，如本节第二部分的几个例子中，似然比的精确分布可以求得. 但在许多情况下，似然比有很多复杂的形状，其精确分布无法求得. 1938年，S.S. Wilks证明了：若$X_1,\ldots,X_n$是独立随机样本，则当$n\to\infty$时，在零假设成立之下，似然比有一个简单的极限分布. 利用它的极限分布可近似决定(2.2)式中的c和r.

$Wilks$定理的确切陈述需要陈述一大堆关于总体概率分布的假定，其证明也很复杂. 我们略去这些陈述，只强调其条中一个至关重要之点，即要求参数空间Θ 的维数要高于零假设成立时的Θ_0的维数. 如样本$X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. $\sim N(\mu,\sigma^2)$, $H_0: \mu=\mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu\neq\mu_0$,则$\Theta=\{\theta=(\mu,\sigma^2): -\infty<\mu<+\infty,\ \sigma^2>0\}$是$R_2$中的上半平面，$\Theta$的维数是2; 而$\Theta_0=\{\theta=(\mu,\sigma^2): \mu=\mu_0,\ \sigma^2>0\}$,它是$\Theta$中的一条直线，其维数为1.因此此例中$\Theta$维数高于$\Theta_0$的维数. 又如，球体是三维集，空间的一个点是零维集. 明确了这一点，Wilks的定理大致可表达为

定理5.5.1　设Θ的维数为k, Θ_0的维数为s, 若$k-s=t>0$, 则对检验问题(2.1) 在零假设H_0成立之下，当样本大小$n\to\infty$时有

$$2\log\lambda(\mathbf{X}) \xrightarrow{\mathscr{L}} \chi_t^2.$$

定理的详细陈述及证明可参看参考文献[1]P_{326}.还有一点需要明确：零假设Θ_0中可以包含不止一个点，这时定理5.5.1的含义是：不论真参数落在Θ_0中何处，$2\log\lambda(\mathbf{X})$的极限分布总是自由度为t的χ^2分布.

例5.5.7　设样本$\mathbf{X}_i=(X_{i_1},\cdots,X_{i_n})$, i.i.d. $\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$, $1\leq i\leq m$,且全部样本独立. 要检验假设

$$H_0:\ \sigma_1^2=\cdots=\sigma_m^2 \longleftrightarrow H_1:\ \sigma_1^2=\cdots=\sigma_{_m}^2\text{不完全相同}.$$

记

$$S_i^2=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2,\quad \bar{X}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}.$$

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}n_{_i}s_{_i}^2,\quad n=\sum_{i=1}^{m}n_{_i}$$

则不难算出

$$\lambda(X_1,X_2,\cdots,X_m)=S^n/\prod_{i=1}^{m}S_i^{n_i}.$$

而

$$Y_n\equiv 2\log\lambda=n\log S-\sum_{i=1}^{n}n_i\log s_i.$$

记k为参数空间Θ的维数，r为H_0成立时参数空间子集Θ_0的维数. 据定理5.5.1, 当H_0成立时，且$\min\{n_1,n_2,\ldots,n_m\}\to\infty$ 时，有

$$Y_n \xrightarrow{\mathscr{L}} \chi_{k-r}^2=\chi_{m-1}^2,$$

此处$k-r=2m-(m+1)=m-1$.由此得到大样本检验有水平近似为α的否定域

$$D=\{(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_m):Y_n>\chi^2_{m-1}(\alpha)\}.$$

3 Wald 检验

注意到若$\hat{\theta}$为参数θ的MLE, 则由似然估计的渐近正态性知在正则化条件下

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta)\xrightarrow{d}N(0,I^{-1}(\theta))$$

从而对零假设$H_0:\theta=\theta_0$, Wald 检验统计量定义为

$$W=n(\hat{\theta}-\theta_0)'I(\theta_0)(\hat{\theta}-\theta_0)$$

在零假设下, W渐近服从χ^2分布.

4 Score 检验

Score检验则是基于Score 函数构造记Score 函数为

$$S(\theta)=\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta}$$

在零假设$H_0:\theta=\theta_0$下一般有

$$\frac{1}{\sqrt{n}}S(\theta)\xrightarrow{d}N(0,I(\theta_0))$$

则对零假设的Score检验统计量为

$$U=\frac{1}{n}S(\theta_0)'I^{-1}(\theta_0)S(\theta_0)$$

在零假设下, U渐近服从χ^2分布.