

第一章：事件及其概率

张伟平

zwp@ustc.edu.cn

Office: 东区管理科研楼 1006

Phone: 63600565

课件 <http://staff.ustc.edu.cn/~zwp/>

论坛 <http://fisher.stat.ustc.edu.cn>

第一章事件与概率

1.3	古典概型	2
1.4	几何概型	15

1.3 古典概型

称一个随机试验为**古典概型**, 如果

- 第一, (有限性) 试验结果只有有限个 (记为 n),
- 第二, (等可能性) 每个基本事件发生的可能性相同.

为计算事件 A 的概率, 设 A 中包含 m 个基本事件, 则定义事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

记号: 为方便起见, 以 $|A|$ 记事件 A 中基本事件的个数.
计算古典概率, 主要用到排列组合的知识.

计数原理

乘法原理 假定进行过程 I 有 n_1 中方式, 而对于过程 I 的每一个方式, 进行过程 II 都有 n_2 种方式。那么, 依次进行过程 I 与 II 共有 $n_1 n_2$ 种方式。

加法原理 假定进行过程 I 有 n_1 中方式, 进行过程 II 有 n_2 种方式。那么, 进行过程 I 或 II 共有 $n_1 + n_2$ 种方式。

排列组合

- 从 n 个不同的元素中, 有放回地取出 r 个元素组成的可重复排列的种数为 n^r 种。从 n 个不同的元素中, 不放回地取出 r 个元素组成的不重复排列的种数为 $n(n-1)\cdots(n-r+1) = P_n^r$ 。
- 从 n 个不同的元素中, 不放回地取 r 个组成的组合, 种数为

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- 从 n 个不同的元素中, 有放回地取 r 个组成的组合 (不考虑顺序), 种数为

$$\binom{n+r-1}{r}$$

在运用排列组合公式时, 要清楚次序问题.

甲乙丙丁四人进行乒乓球双打练习, 两人一对地结为对打的双方, 有多少种不同的结对方式?

↑Example

↓Example

可能有人 would 认为这个问题是简单的组合问题: 从四人中选出两人结为一对, 剩下的两人结为一对即可. 于是他们算得: 有 $C_4^2 = 6$ 种方式.

但事实是否如此呢? 注意此时并不要求两队之间的顺序, 所以一共只有 3 种结对方式: $C_4^2/2 = 3$

“组合”是一种“有编号的分组模式”，或者说，按照组合模式计算出的分组方式数目中，已经天然地把组的不同编号方式数目计算在内了。

欲将 6 个人分为 3 组，每组 2 人，分别从事 3 项不同工作，求分配方式数。

↑Example

↓Example

解：先取出两人从事第 1 项工作，有 C_6^2 种方式；再取出两人从事第 2 项工作，有 C_4^2 种方式；剩下的两人从事第 3 项工作。所以一共有：

$$C_6^2 \cdot C_4^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$$

种分配方式。

要把 7 人分为 3 个小组, 执行同一种任务, 其中一个组 3 人, 另两个组各 2 人, 求分组方式数.

↑Example

↓Example

解: 显然这这也是一个“无编号分组”问题. 但是却与上面的情况有所不同. 因为其中有一个 3 人组, 无论是否编号, 它都与其他两个组有所区别 (编号无非是为了对分出的组加以区分), 所以在按“有编号分组模式”算出分组方式数之后, 只应再除以 $2!$ (即除去两个不加区分的组的排列顺序数), 故得: 共有

$$\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{7!}{3! \cdot (2!)^3}$$

种分组方式.

为了适应这种分为多个“不同的”组的问题需求, 人们总结出如下的“多组组合模式”:

多组组合模式： 有 n 个不同元素, 要把它们分为 k 个不同的组, 使得各组依次有 $n_1, n_2, \dots, n_k$ 个元素, 其中 $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, 则一共有

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

种不同分法.

不尽相异元素的排列模式 有 n 个元素, 属于 k 个不同的类, 同类元素之间不可辨认, 各类元素分别有 $n_1, n_2, \dots, n_k$ 个, 其中 $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, 要把它们排成一列, 则一共有

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

种不同排法.

一批产品有 N 个，其中废品有 M 个。现从中随机取出 n 个，在以下两种情形下，分别求“其中恰好有 m 个废品”这一事件的概率。(1) 有放回地选取； (2) 不放回地选取

↑Example

↓Example

解: 记 $A = \{\text{其中恰好有 } m \text{ 个废品}\}$, 则

(1) 有放回情形 $|\Omega| = N^n$, $|A| = \binom{n}{m} M^m (N - M)^{n-m}$, 所以

$$P(A) = \frac{C_n^m M^m (N - M)^{n-m}}{N^n} = \binom{n}{m} \left(\frac{M}{N}\right)^m \left(\frac{N - M}{N}\right)^{n-m}$$

(2) 不放回情形 $|\Omega| = C_N^n$, $|A| = C_M^m C_{N-M}^{n-m}$, 所以

$$P(A) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

n 个男生, m 个女生排成一排 ($m \leq n + 1$). 求事件 $A = \{\text{任意两个女孩不相邻}\}$ 的概率. 又若排成一圈, 又如何?

↑Example

↓Example

解: (1) 排成一排

$$|\Omega| = (n + m)!, \quad |A| = n! C_{n+1}^m m!$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n! C_{n+1}^m m!}{(n + m)!}$$

(2) 排成一圈

$$|\Omega| = (n + m - 1)!, \quad |A| = (n - 1)! C_n^m m!$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{(n - 1)! C_n^m m!}{(n + m - 1)!}$$

r 个不同的球任意放入编号为 1 至 n 的 n 个盒子, 每球入各盒均等可能, 求下列事件的概率

↑Example

(1) $A = \{\text{指定的 } r \text{ 个盒子各含一个球}\}$

(2) $B = \{\text{每盒至多有一球}\}$

(3) $C = \{\text{某指定盒中恰有 } m \text{ 个球}\}$

↓Example

解: $|\Omega| = n^r$

(1) $|A| = r!$

(2) $|B| = C_n^r r!$

(3) $|C| = C_r^m (n-1)^{r-m}$

又若球是相同的, 则在这里, r 个球是相同的, n 个盒子是互不相同的. 因此我们只需要关心各个盒子中的球数, 而无需考虑哪个球落在哪个盒子中. 我们可把问题设想为:

r 个相同的小球已经一字排开, 只须在它们之间加上 $n-1$ 块隔板, 把它们隔为 n 段, 然后让各段对号放入相应的盒子即可. 由于盒子可空, 相当于要将 $r+n-1$ 个不尽相异的元素进行排列, 其中 1 类

元素 (小球) 有 r 个, 另 1 类元素 (隔板) 有 $n - 1$ 个, 所以由不尽相异元素的排列模式知, 一共有

$$C_{r+n-1}^r = C_{r+n-1}^{n-1}$$

种不同分法. 因此

$$|\Omega| = \binom{n+r-1}{n-1}$$

(1) $|A| = 1$

(2) $|B| = C_n^r$

(3) $|C| = \binom{r-m+n-1-1}{r-m}$

注:

- 球相异和球相同两种情形下的样本空间是不同的, 即机会均等原则是不同的。(各是什么呢?)
- 这个例子是古典概型中一个很典型的问题, 不少实际问题可以归结为它

-
- 若把球解释为粒子，把盒子解释为相空间中的小区域，则这个问题便相应于统计物理学里的 Maxwell—Boltzmann 统计
 - 生日问题

求 r 个人中没有两个人生日相同的概率。若把 r 个人看作上面问题中的 r 个球，而把一年的 365 看作为盒子，则 $n = 365$ ，这时事件 B 的概率即为所求概率。例如当 $r = 40$ 时， $P(B) = 0.109$ ，这个概率已经相当小；而当 $r = 50$ 时， $P(B) = 0.03$ 。进一步当 $r = 55$ 时， $P(B)$ 之值只有 0.01，这实在是出乎意料地小。

设有方程 $x + y + z = 15$, 试分别求出它的正整数解和非负整数解 (x, y, z) 的组数.

↑Example

↓Example

解: 本题可以设想为将 15 个无区别的小球分入 3 个不同的盒子, 再分别将第 1, 2, 3 个盒中的球数对应为 x, y, z 的值即可. 所以, 非负整数解的组数 (相当于允许出现空盒的情况) 为:

$$C_{15+3-1}^{15} = C_{17}^2 = \frac{17 \times 16}{2} = 136;$$

而正整数解的组数 (相当于不允许出现空盒的情况) 为:

$$C_{15-1}^{3-1} = C_{14}^2 = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91. \quad \#$$

注: 此例的方法即是证明前面排列组合的方法。

设有 n 个人随机地坐到礼堂第一排 N 个座位上去, 试求下列事件的概率: (1) 任何人都没有邻座; (2) 每人恰有一个邻座; (3) 关于中央座位对称的两个座位至少有一个空着。

↑Example

↓Example

解: 分别用 A, B, C 表示上述 (1)-(3) 各事件。则 $|\Omega| = P_N^n$.

(1) 视此 n 个人为“女生”, $N - n$ 个座位为“男生”, 则 $|A| = C_{N-n+1}^n n!$

(2) $|B| = C_{N-n+1}^{n/2} n!$

(3)

$$|C| = \begin{cases} C_{N/2}^n 2^n n!, & N \text{ is even} \\ n C_{(N-1)/2}^{n-1} 2^{n-1} (n-1)! + C_{(N-1)/2}^n 2^n n!, & N \text{ is odd} \end{cases}$$

1.4 几何概型

在实际中，我们还会碰到样本点无限多的情形。几何概型是其中的一种。

设 Ω 是欧氏空间中确定的集合，满足条件 $0 < m(\Omega) < +\infty$ 。

对 Ω 中的任何可测子集 A ，称

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

Definition

为事件 A 的几何概率。这里等可能性体现在“落在区域 A 的概率与区域 A 的测度成正比并且与其形状位置无关。”

这里 $m(\Omega)$ 表示 Ω 的“大小”。

甲乙两人约定在 $[0, T]$ 时段内去某地会面，规定先到者等候一段时间 $t(t \leq T)$ 再离去。试求事件 $A = \{\text{甲乙将会面}\}$ 的概率。

↑Example

↓Example

解：以 x, y 分别表示甲乙到达会面地点的时间。则

$$\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq T\}$$

而 $A = \{(x, y) | |x - y| \leq t\}$ ，因此

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = 1 - (1 - \frac{t}{T})^2.$$

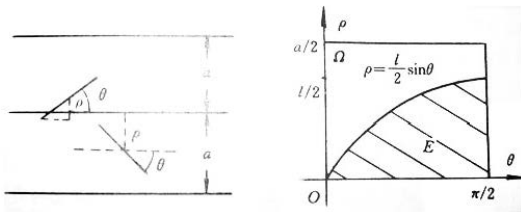
桌面上画满间隔均为 a 的平行线，现向桌面任意投放一长为 l ($l < a$) 的针，求事件 $E = \{\text{针与某直线相交}\}$ 的概率。

↑Example

↓Example

解：如下图所示，针的位置由针的中点到最近直线的距离 ρ 及针与

图 1.1: 针和平行线位置关系



直线所夹锐角 θ 决定。于是 $\Omega = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq a/2, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$. 由针的任意性, 样本点 (ρ, θ) 在 Ω 中均匀分布, 是几何概型。而针与某直线相交, 当且仅当 $\rho \leq \frac{l}{2} \sin \theta$. 即

$$E = \{(\rho, \theta) \in \Omega : \rho \leq \frac{l}{2} \sin \theta\}$$

$$m(\Omega) = \frac{\pi a}{4}, \quad m(E) = \int_0^{\pi/2} \frac{l}{2} \sin \theta d\theta$$

所以

$$P(E) = \frac{m(E)}{m(\Omega)} = \frac{2l}{\pi a}.$$

从而

$$\pi \approx \frac{2l}{\hat{p}a}$$

值得注意的是这里采用的方法: 建立一个概率模型, 它与某些我们感兴趣的量——这里是常数 π ——有关, 然后设计随机试验, 并通过这个试验的结果来确定这些量。这也就是 Monte-Carlo 思想。

在圆周上任取三点 A, B, C ，求事件 $E = \{\triangle ABC \text{ 为锐角三角形}\}$ 的概率。 $(1/4)$

[↑Example](#)

[↓Example](#)

在圆上任取两点 A, B 连成一条弦，再任取两点 C, D 连成一弦，求 AB 与 CD 相交的概率。 $(1/3)$

[↑Example](#)

[↓Example](#)