

## 1.2: 古典概型和几何概率

张伟平

课件 <http://staff.ustc.edu.cn/~zwp/>

论坛 <http://fisher.stat.ustc.edu.cn>

---

## 第一章事件与概率

1.3 古典概型 . . . . .	2
1.4 几何概型 . . . . .	15

---

## 1.3 古典概型

称一个随机试验为**古典概型**, 如果

- 第一, (有限性) 试验结果只有有限个 (记为  $n$ ),
- 第二, (等可能性) 每个基本事件发生的可能性相同.

为计算事件  $A$  的概率, 设  $A$  中包含  $m$  个基本事件, 则定义事件  $A$  的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|} \left( \text{或} \frac{\#A}{\#\Omega} \right)$$

记号: 为方便起见, 以  $|A|$  或  $\#A$  记事件  $A$  中基本事件的个数.  
计算古典概率, 主要用到排列组合的知识.

---

## 计数原理

**乘法原理** 假定进行过程 I 有  $n_1$  中方式，而对于过程 I 的每一个方式，进行过程 II 都有  $n_2$  种方式。那么，依次进行过程 I 与 II 共有  $n_1 n_2$  种方式。

**加法原理** 假定进行过程 I 有  $n_1$  中方式，进行过程 II 有  $n_2$  种方式。那么，进行过程 I 或 II 共有  $n_1 + n_2$  种方式。

## 排列组合

- 从  $n$  个不同的元素中，有放回地取出  $r$  个元素组成的可重复排列的种数为  $n^r$  种。从  $n$  个不同的元素中，不放回地取出  $r$  个元素组成的不重复排列的种数为  $n(n-1)\cdots(n-r+1) = P_n^r$ 。
- 从  $n$  个不同的元素中，不放回地取  $r$  个组成的组合，种数为

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_n^r$$

- 
- 从  $n$  个不同的元素中, 有放回地取  $r$  个组成的组合 (不考虑顺序), 种数为

$$\binom{n+r-1}{r}$$

在运用排列组合公式时, 要清楚次序问题.

甲乙丙丁四人进行乒乓球双打练习, 两人一对地结为对打的双方, 有多少种不同的结对方式?

↑Example

↓Example

“组合”是一种“有编号的分组模式”, 或者说, 按照组合模式计算出的分组方式数目中, 已经天然地把组的不同编号方式数目计算在内了.

---

欲将 6 个人分为 3 组, 每组 2 人, 分别从事 3 项不同工作, 求分配方式数.

↑Example

↓Example

---

要把 7 人分为 3 个小组, 执行同一种任务, 其中一个组 3 人, 另两个组各 2 人, 求分组方式数.

↑Example

↓Example

为了适应这种分为多个“不同的”组的问题需求, 人们总结出如下的“多组组合模式”:

**多组组合模式：**有  $n$  个不同元素，要把它们分为  $k$  个不同的组，使得各组依次有  $n_1, n_2, \dots, n_k$  个元素，其中  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ，则一共有

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

种不同分法。

**不尽相异元素的排列模式** 有  $n$  个元素，属于  $k$  个不同的类，同类元素之间不可辨认，各类元素分别有  $n_1, n_2, \dots, n_k$  个，其中  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ，要把它们排成一列，则一共有

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

种不同排法。



---

一批产品有  $N$  个，其中废品有  $M$  个。现从中随机取出  $n$  个，在以下两种情形下，分别求“其中恰好有  $m$  个废品”这一事件的概率。(1) 有放回地选取； (2) 不放回地选取

↑Example

↓Example

解:

---

$n$  个男生,  $m$  个女生排成一排 ( $m \leq n + 1$ ). 求事件  $A =$   
 $\{\text{任意两个女孩不相邻}\}$  的概率。又若排成一圈, 又如何?

↑Example

↓Example

解:

---

$r$  个不同的球任意放入编号为 1 至  $n$  的  $n$  个盒子，每球入各盒均等可能，求下列事件的概率

(1)  $A = \{\text{指定的 } r \text{ 个盒子各含一个球}\}$

(2)  $B = \{\text{每盒至多有一球}\}$

(3)  $C = \{\text{某指定盒中恰有 } m \text{ 个球}\}$

↑Example

↓Example

解:



---

注：

- 球相异和球相同两种情形下的样本空间是不同的，即机会均等原则是不同的。(各是什么呢?)
- 这个例子是古典概型中一个很典型的问题，不少实际问题可以归结为它
- 若把球解释为粒子，把盒子解释为相空间中的小区域，则这个问题便相应于统计物理学里的 Maxwell-Boltzmann 统计
- **生日问题**

求  $r$  个人中没有两个人生日相同的概率. 若把  $r$  个人看作上面问题中的  $r$  个不可辨球，而把一年的 365 看作为盒子，则  $n = 365$ ，这时记  $B$  为所求概率事件。则

例如当  $r = 40$  时， $P(B) = 0.109$ ，这个概率已经相当小；而当  $r = 50$  时， $P(B) = 0.03$ ， $r = 55$  时， $P(B) = 0.01$ ，这实在是出乎意料地小。

---

设有方程  $x + y + z = 15$ , 试分别求出它的正整数解和非负整数解  $(x, y, z)$  的组数.

↑Example

↓Example

---

设有  $n$  个人随机地坐到礼堂第一排  $N$  个座位上去，试求下列事件的概率：(1) 任何人没有邻座；(2) 每人恰有一个邻座；(3) 关于中央座位对称的两个座位至少有一个空着。

↑Example

↓Example

解：

---

## 1.4 几何概型

在实际中，我们还会碰到样本点无限多的情形。几何概型是其中的一种。

设  $\Omega$  是欧氏空间中确定的集合，满足条件  $0 < m(\Omega) < +\infty$ 。  
对  $\Omega$  中的任何可测子集  $A$ ，称

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

Definition

为事件  $A$  的几何概率。这里等可能性体现在“落在区域  $A$  的概率与区域  $A$  的测度成正比并且与其形状位置无关。”

这里  $m(\Omega)$  表示  $\Omega$  的“大小”。



---

甲乙两人约定在  $[0, T]$  时段内去某地会面，规定先到者等候一段时间  $t(t \leq T)$  再离去。试求事件  $A = \{\text{甲乙将会面}\}$  的概率。

↑Example

↓Example

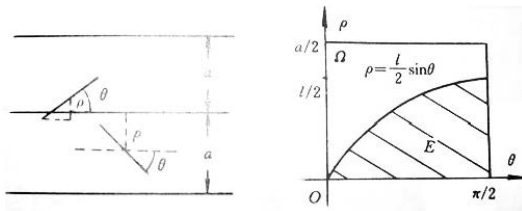
解:

(Buffon's needle) 桌面上画满间隔均为  $a$  的平行线，现向桌面任意投放一长为  $l (l < a)$  的针，求事件  $E = \{\text{针与某直线相交}\}$  的概率。

↑Example

↓Example

图 1.1: 针和平行线位置关系



---

值得注意的是这里采用的方法：建立一个概率模型，它与某些我们感兴趣的量——这里是常数  $\pi$ ——有关，然后设计随机试验，并通过这个试验的结果来确定这些量。这也就是 Monte-Carlo 思想。

---

在圆周上任取三点  $A, B, C$ ，求事件  $E = \{\triangle ABC \text{ 为锐角三角形}\}$  的概率。(1/4)

↑Example

↓Example

在圆上任取两点  $A, B$  连成一条弦，再任取两点  $C, D$  连成一弦，求  $AB$  与  $CD$  相交的概率。(1/3)

↑Example

↓Example