概率论与数理统计讲义

——概率论部分

张伟平

2007 Fall

目录

第一章　样本空间与概率

1.1　序言

我们周围的世界充满了我们认为是随机的或者不可预知的现象。我们把这些现象当作某种"实验"(随机实验)的结果，这里的“实验”应该从最广泛的角度理解。我们把这种实验的可能结果视为是一个“样本空间”的元素，而“样本空间”的子集称为“事件”，每个“事件”被赋予一个“概率”值，这个值位于0和1之间，来表示此“事件”发生的可能性大小。

1.2　样本空间与事件

定义 1.2.1. 样本空间*(Sample Space)*是一个集合，其元素描述了我们所感兴趣的实验结果。常记为Ω; 样本空间的元素，称为样本点，记为ω.

例1.2.1. 抛一枚色子，观察出现的点数。则$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

例1.2.2. 考察某一地区的年降雨量，则$\Omega = \{x|0 \le x < T\}$，这里$T$表示某个常数，表示降雨量不会超过$T$.

例1.2.3. 若我们从四个人那收到*4*封信，则样本空间是什么？

选择合适的样本空间

样本空间的元素应该是相互不同的, 根据试验的不同目的,样本空间应该予以不同的选择. 但是总的原则是样本空间应该尽可能详细, 即尽可能包含所有可能的结果. 看下面的例子

例1.2.4. *(1).* 将一枚硬币抛三次，考察正反面出现的情况*;*
(2). 将一枚硬币抛三次，考察正面出现的次数。

这两个试验的目的不同，因此样本空间的选取也不同。

定义 1.2.2. 样本空间的子集称为随机事件，简称为事件*(Event)*。事件通常用大写字母A, B, C等表示。我们称事件A发生，当且仅当该次实验的结果是事件A中的元素。特别，由一个样本点组成的事件称为基本事件；由于$\Omega \subseteq \Omega$且在每次试验中Ω必然发生，故称Ω为必然事件；空集ϕ不包含任何样本点但$\phi \subset \Omega$，故称其为不可能事件。

集合与事件的运算 事件是一个集合，因此集合之间的关系及运算法则同样适用于事件。集合的运算法则:

$$
\begin{aligned}
&S \cup T = T \cup S \qquad S \cup (T \cup U) = (S \cup T) \cup U \\
&S \cap (T \cup U) = (S \cap T) \cup (S \cap U) \qquad S \cup (T \cap U) = (S \cup T) \cap (S \cup U) \\
&(S^c)^c = S \qquad S \cap S^c = \phi \\
&S \cup \Omega = \Omega \qquad S \cap \Omega = S \\
&\left(\bigcup_n S_n\right)^c = \bigcap_n S_n^c \qquad \left(\bigcap_n S_n\right)^c = \bigcup_n S_n^c \quad (de\ Morgan's\ laws)
\end{aligned}
$$

事件之间也满足同样的运算法则。在概率论中，集合的关系赋予了特殊的表示意义：以下A, B, C等表示事件。

1. $A \subset B$: 表示当事件A发生时事件B必发生。若$A \subset B, B \subset A$，则称事件A, B 是相等的，记为$A = B$。
2. $A \cap B$(或者AB): 表示事件A, B同时发生，类似的对多个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，则这些事件同时发生表示为$\bigcap_n A_n$或者$\prod_n A_n$；
3. $A \cup B$(或者$A + B$): 表示事件A发生或者事件B发生或者称为事件A, B中至少发生一个。类似的对多个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，则这些事件至少发生一个表示为$\bigcup_n A_n$或者$\sum_n A_n$；
4. $A - B$: 表示事件A发生而事件B不发生。
5. A^c(或者$\bar{A}$): 表示A不发生，称为A的对立事件。显然，$A^c = \Omega - A$。
6. 若事件A, B不可能在同一次试验中同时发生，则称A, B是互斥的(此时$AB = \phi$)。若一些事件中任意两个事件都是互斥的，则称这些事件是两两互斥的。

通过事件的关系我们可以表示一些复杂的事件，如

例1.2.5. 设A, B, C是三个事件，试表示下列事件

1. 事件A, B发生而C不发生；*($AB\bar{C}$)*
2. 事件A, B, C不同时发生*; ($\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$)*
3. 事件A, B, C中至多有一个发生；*($A^cB^c+A^cC^c+B^cC^c$)*
4. 事件A, B, C中至少发生两个；*($AB+AC+BC$)*
5. 事件A, B, C中恰好发生两个；*($AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$)*

我们把如上的讨论结果列成一张表:

表 1.1: 集合和事件关系类比表

符　号	集合论意义	概率论意义
Ω	全集或空间	样本空间,必然事件
ϕ	空集	不可能事件
ω	元素	样本点,基本事件
A	可测子集	随机事件
$\omega \in A$	ω是A的元素	试验结果ω属于A,事件A发生
$A \subset B$	A包含在B中	若A发生,则B一定发生;事件A蕴涵事件B
$A = B$	A与B相等	A与B为同一事件;它们同时发生或同时不发生
$A \cap B$或AB	交集	表示A与B同时发生
$AB = \phi$	不相交	A与B不相容(互斥),它们不可能同时发生
$A \cup B$	并集	表示A或B发生,A与B中至少有一个发生
A^c	余集	对立事件;A^c发生表示A不发生
$A - B$或AB^c	差集	表示A发生,而B不发生
$A \triangle B$	对称差	表示A与B中恰有一个发生
$\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n$	上极限集合	表示事件序列$\{A_n\}$中有无穷多个事件发生
$\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=k}^{\infty} A_n$	下极限集合	表示序列$\{A_n\}$中至多有有限个事件不发生

1.3 概率及概率模型

1. 有限样本空间上的概率

我们想要表示一个事件有多大可能发生，为此，我们给每个事件赋予一个概率。给事件赋概一般来说并不简单。既然每个事件都要赋予一个概率，我们就称其为概率函数。其应该有如下两个性质

> **定义 1.3.1.** 一个有限样本空间Ω上的概率函数P，赋予Ω中每个事件A一个*0*和*1*之间的数值$P(A)$，并使得
>
> *(1)* $P(\Omega)=1$;
>
> *(2)* 若A,B不相容，则$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$.
>
> 则$P(A)$称为是事件A发生的概率。

(1) 说明了试验的结果总是样本空间的一个元素。(2) 是概率函数的可加性。

例1.3.1. 比如两个人抛硬币公平的决定谁来洗碗，则这种公平性应该转换为正面和反面出现的可能性均等。从而我们赋予正面和反面出现的概率均为1/2. 如果考虑到现实中没有绝对质地均匀的硬币，比如我们也可以赋予正面出现的概率为*0.5001*，反面出现的概率为*0.4999.*

例1.3.2. 抛硬币的试验

试验者	掷硬币的次数	正面出现的次数	频率
蒲丰	*4040*	*2048*	*.5069*
皮尔逊	*12000*	*6019*	*.5016*
皮尔逊	*24000*	*12012*	*.5005*

从这个例子可以看出随着试验次数的增加，频率越来越接近1/2.

2. 无限的样本空间上的概率 比如我们重复的投掷一枚硬币直至出现第一个正面，试验的结果是直至第一次出现正面时的投掷次数，则样本空间$\Omega=\{1,2,\cdots\}$. 此试验的概率函数应该是什么呢？假设此枚硬币正面出现的可能性为p (0¡p¡1)，则反面为$1-p$。我们需要决定$P(n)$。显然$P(1)=p$，事件$\{2\}$表示$\{T,H\}$, 概率为$P(2)=(1-p)p$.类似的，我们可以得到$P(n)=(1-p)^{n-1}p, n=1,2,\cdots$

那么这样就定义了$\Omega=\{1,2,3,\cdots\}$上的概率函数了吗？按照以前的定义，应该满足$P(\Omega)=1$. 但是这个并不容易直接得到：由于样本空间不再是有限的，我们需要修改为如下定义

1. (非负性) 对任意事件A，$P(A) \geq 0$.
2. (可加性) 若A, B为两个互斥事件，则
$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$
更进一步，若$A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 为一列两两互斥的事件列，则
$$P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$
3. (规范性) $P(\Omega) = 1$.

现在我们就有

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(\{1,2,3,\cdots\}) = P(1) + P(2) + P(3) + \cdots \\ &= p + (1-p)p + (1-p)^2 p + \cdots = 1. \end{aligned}$$

一般并不把Ω的一切子集都作为事件，因为这样将对给定概率带来困难，比如若把不可测集也作为事件，将带来不可克服的困难。另一方面，又必须把感兴趣的事件都包括进来。因此我们引入如下定义的集合类$\mathcal{F}$，可以解决这些问题：

定义 1.3.2 (σ代数). 样本空间Ω上的集合类$\mathcal{F}$称为Ω上的事件σ代数，如果

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. 若$A \in \mathcal{F}$，则$\bar{A} \in \mathcal{F}$;
3. 若$A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \cdots$，则$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

这样的$\mathcal{F}$既包括了我们感兴趣的事件，又把不可测集排除在外。

定义 1.3.3. 定义于集合之上的取值为实值的函数称为集函数.

定义 1.3.4. 定义在事件σ域$\mathcal{F}$之上的集函数P称为概率，若它满足概率的公理化体系.

定义 1.3.5. 称三元组$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为概率空间.

由概率的公理化体系，可以得到有关概率的一些性质.

1. $P(\phi) = 0$

2. (有限可加性) 若$A_k \in \mathcal{F}, k=1,\cdots,n$且两两互斥，则

$$P(\sum_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

3. (可减性) 若$A, B \in \mathcal{F}$且$A \subset B$，则$P(B-A) = P(B) - P(A)$.

4. (单调性) 若$A, B \in \mathcal{F}$且$A \subset B$，则$P(A) \leq P(B)$.

5. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

6. (加法定理) 对任意的事件$A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$，有

$$\begin{aligned} P(\sum_{k=1}^{n} A_k) &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{1\leq i<j\leq n}^{n} P(A_iA_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n}^{n} P(A_iA_jA_k) \\ &\quad - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n) \end{aligned}$$

7. (次可加性) 对任意的事件$A_1, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{F}$，有$P(\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

8. (下连续性) 若$A_n \in \mathcal{F}$且$A_n \subset A_{n+1}, n=1,2,\cdots$,则

$$P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_n P(A_n)$$

9. (上连续性) 若$A_n \in \mathcal{F}$且$A_n \supset A_{n+1}, n=1,2,\cdots$,则

$$P(\prod_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_n P(A_n)$$

例1.3.3. 求证对任意n个事件$A_1, \cdots, A_n$有

$$P(\prod_{k=1}^{n} A_k) \geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - n + 1$$

概率模型是对随机现象的一种数学描述。它由试验的样本空间和赋予这个样本空间上的概率构成。概率相当于是从样本空间到实数空间的一个映射，如下图所示:

概率模型的构成：

- 样本空间Ω;
- 概率法则, 对每一个可能的结果集A赋予一个非负数$P(A)$(称为A的概率), 表示事件A发生的可能性大小。

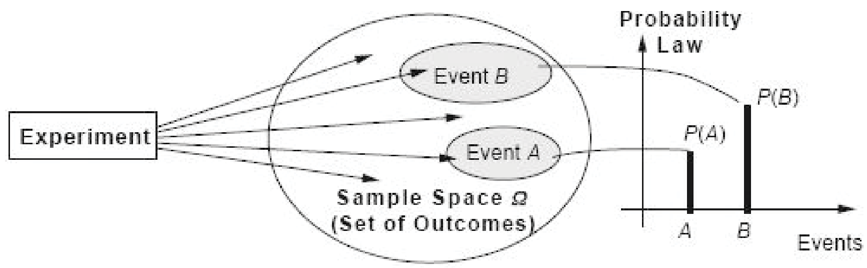


图 1.1: 概率映射关系

1.4 古典概型

定义 1.4.1. 若随机试验满足如下条件

1. 样本空间只含有有限个样本点，不妨记$\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$.

2. 各样本点出现的可能性相等(机会均等)，即对每个$i = 1, \cdots, n$，有

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$$

则称此随机试验为古典型的。此时对每一个事件$A \subset \Omega$，易知有

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{number\ of\ elements\ of\ A}{number\ of\ elements\ of\ \Omega}.$$

在计算古典概型时，经常要碰到计数问题。因此有必要回顾一下计数原理。

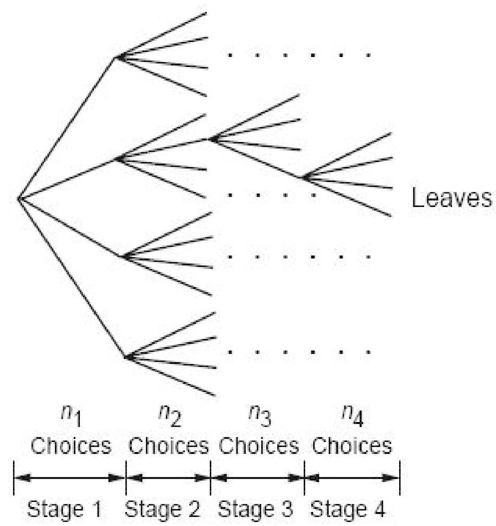
计数原理

乘法原理 假定进行过程I有n_1中方式，而对于过程I的每一个方式，进行过程II都有n_2种方式。那么，依次进行过程I与II共有$n_1 n_2$种方式。

加法原理 假定进行过程I有n_1中方式，进行过程II有n_2种方式。那么，进行过程I或II共有$n_1 + n_2$种方式。

排列组合

图 1.2: 乘法原理



1. 从n个不同的元素中, 有放回地取出r个元素组成的可重复排列的种数为n^r种。从n个不同的元素中，不放回地取出r个元素组成的不重复排列的种数为$n(n-1)\cdots(n-r+1)=P_n^r$.

2. 从n个不同的元素中,不放回地取r个组成的组合，种数为
$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{1.4.1}$$

3. 从n个不同的元素中,有放回地取r个组成的组合(不考虑顺序)，种数为
$$\binom{n+r-1}{r}$$

在运用排列组合公式时, 要清楚次序问题.

例1.4.1. *甲乙丙丁四人进行乒乓球双打练习,两人一对地结为对打的双方,有多少种不同的结对方式?*

可能有人会认为这个问题是简单的组合问题:从四人中选出两人结为一对,剩下的两人结为一对即可.于是他们算得:有$C_4^2=6$种方式.

但事实是否如此呢?我们还是实际地来排一排吧!不难看出,一共只有如下3种结对方式:

$$(1)\{甲,乙\}\ \{丙,丁\};\ \ (2)\{甲,丙\}\ \{乙,丁\};\ \ (3)\{甲,丁\}\ \{乙,丙\}.$$

这个事实说明,组合模式并不适用于这个问题.有人可能会问:这是为什么呢¿'组合" "组合", 不就是用来解决分组和结合问题的吗? 我们说:固然不错,"组合"是用来解决"分组"和"结合"问题的,但是这里仍然有着一个"顺序"问题. 固然,在按组合模式分出的"组内",元素之间是没有"顺序"的,但是需要指出的是:在"组"与"组"之间却存在着"顺序",或者叫做"编号"! 应当注意,在按"组合"模式计算时,我们计算的是"取出两个人"的所有不同取法数目. 假如我们把取出的两人算为一组, 而把留下的两个人算为另一组. 那么由于"取出甲,乙, 留下丙,丁"和"取出丙,丁, 留下甲,乙" 是两种不同的取出方式, 而在这种计算方法中, 被算作是两种不同的"分组"方式, 从而得到如下6种"分组"方式:

(1)第一组为:{甲,乙}; 第二组为: {丙,丁};

(2)第一组为:{丙,丁}; 第二组为: {甲,乙};

(3)第一组为:{甲,丙}; 第二组为: {乙,丁};

(4)第一组为:{乙,丁}; 第二组为: {甲,丙};

(5)第一组为:{甲,丁}; 第二组为: {乙,丙};

(6)第一组为:{乙,丙}; 第二组为: {甲,丁}.

这就是说, 在这种计算中, 我们已经把所分出的组编了号: 取出的两个人为第一组,剩下的两人为第二组的. 这就告诉我们:

"组合"是一种"有编号的分组模式", 或者说, 按照组合模式计算出的分组方式数目中,已经天然地把组的不同编号方式数目计算在内了.

例1.4.2. *欲将6个人分为3组,每组2人,分别从事3项不同工作,求分配方式数.*

解: 先取出两人从事第1项工作,有C_6^2种方式;再取出两人从事第2项工作, 有C_4^2种方式;剩下的两人从事第3项工作. 所以一共有:

$$C_6^2 \cdot C_4^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!}\frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$$

种分配方式.

在这里,3项工作是不同的,在它们之间天然地存在着"顺序",或者叫"编号",所以适用于组合模式.由于分出的组数多于两组,所以我们将分组过程分为几步进行.

例1.4.3. *要把7人分为3个小组,执行同一种任务,其中一个组3人,另两个组各2人, 求分组方式数.*

解:显然这也是一个"无编号分组"问题. 但是却与上面的情况有所不同. 因为其中有一个3人组,无论是否编号,它都与其余两个组有所区别(编号无非是为了对分出的组加以区分),所以在按"有

编号分组模式”算出分组方式数之后,只应再除以2! (即除去两个不加区分的组的排列顺序数),故得:共有

$$\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}\cdot\frac{1}{2!}=\frac{7!}{3!\cdot(2!)^3}$$

种分组方式.

为了适应这种分为多个“不同的”组的问题需求,人们总结出如下的“多组组合模式”:

4. **多组组合模式:** 有n个不同元素,要把它们分为k个不同的组,使得各组依次有$n_1, n_2, \cdots, n_k$个元素,其中$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$,则一共有

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$$

种不同分法.

4'. **不尽相异元素的排列模式** 有n个元素,属于k个不同的类,同类元素之间不可辨认,各类元素分别有n_1, n_2, $\cdots$, n_k个,其中$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$,要把它们排成一列,则一共有

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!}$$

种不同排法.

例1.4.4. 一批产品有N个，其中废品有M个。现从中随机取出n个，在以下两种情形下，分别求“其中恰好有m个废品”这一事件的概率。

(1) 有放回地选取； *(2)* 不放回地选取

解: 记$A=\{$其中恰好有m个废品$\}$，则

(1) 有放回情形

$$|\Omega|=N^n,\quad |A|=\binom{n}{m}M^m(N-M)^{n-m}$$
$$P(A)=\frac{C_n^m M^m(N-M)^{n-m}}{N^n}=\binom{n}{m}\Big(\frac{M}{N}\Big)^m\Big(\frac{N-M}{N}\Big)^{n-m}$$

(2)不放回情形

$$|\Omega|=C_N^n,\quad |A|=C_M^m C_{N-M}^{n-m}$$
$$P(A)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

例1.4.5. n个男生, m个女生排成一排$(m\le n+1)$. 求事件$A=\{$任意两个女孩不相邻$\}$的概率。又若排成一圈，又如何?

解: (1) 排成一排

$$|\Omega| = (n+m)!, \quad |A| = n!C_{n+1}^{m}m!$$
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n!C_{n+1}^{m}m!}{(n+m)!}$$

(2) 排成一圈

$$|\Omega| = (n+m-1)!, \quad |A| = (n-1)!C_{n}^{m}m!$$
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)!C_{n}^{m}m!}{(n+m-1)!}$$

例1.4.6. *r个不同的球任意放入编号为1至n的n个盒子，每球入各盒均等可能，求下列事件的概率*

(1) A={指定的r个盒子各含一个球}

(2) B={每盒至多有一球}

(3) C={某指定盒中恰有m个球}

解: $|\Omega| = n^r$

(1) $|A| = r!$

(2) $|B| = C_n^r r!$

(3) $|C| = C_r^m (n-1)^{r-m}$

又若球是相同的，则在这里,r个球是相同的,n个盒子是互不相同的. 因此我们只需要关心各个盒子中的球数,而无需考虑哪个球落在哪个盒子中. 我们可把问题设想为：

r个相同的小球已经一字排开,只须在它们之间加上$n-1$块隔板,把它们隔为n段, 然后让各段对号放入相应的盒子即可. 由于盒子可空, 相当于要将$r+n-1$个不尽相异的元素进行排列,其中1类元素(小球)有r个, 另1类元素(隔板)有$n-1$个,所以由不尽相异元素的排列模式知, 一共有

$$C_{r+n-1}^{r} = C_{r+n-1}^{n-1}$$

种不同分法.因此

$$|\Omega| = \binom{n+r-1}{n-1}$$

(1) $|A| = 1$

(2) $|B| = C_n^r$

(3) $|C| = \binom{r-m+n-1-1}{r-m}$

注： 球相异和球相同两种情形下的样本空间是不同的，即机会均等原则是不同的。(各是什么呢？) 这个例子是古典概型中一个很典型的问题，不少实际问题可以归结为它. 例如，若把球

解释为粒子，把盒子解释为相空间中的小区域，则这个问题便相应于统计物理学里的Maxwell－Boltzmann统计．概率论历史上有一个颇为有名的问题，要求参加某次集会的r个人中没有两个人生日相同的概率．若把r个人看作上面问题中的r个球，而把一年的365看作为盒子，则$n=365$，这时事件B的概率即为所求概率。例如当$r=40$时，$P(B)=0.109$，这个概率已经相当小；而当$r=50$时, $P(B)=0.03$。进一步当$r=55$时，$P(B)$之值只有0.01，这实在是出乎意料地小。总之，投球问题中球相遇的概率比预料的大得多，这种意外在研究随机现象中时常遇见，也算是随机现象的特性之一吧!

例1.4.7. *设有方程$x+y+z=15$,试分别求出它的正整数解和非负整数解(x,y,z) 的组数.*

解：本题可以设想为将15个无区别的小球分入3个不同的盒子,再分别将第$1,2,3$个盒中的球数对应为x,y,z的值即可.所以,非负整数解的组数(相当于允许出现空盒的情况)为：

$$C_{15+3-1}^{15}=C_{17}^{2}=\frac{17\times16}{2}=136;$$

而正整数解的组数(相当于不允许出现空盒的情况)为：

$$C_{15-1}^{3-1}=C_{14}^{2}=\frac{14\cdot13}{2}=91.\quad\#$$

注: 此例的方法即是证明公式(1.4.1)的方法。

例1.4.8. *设有n个人随机地坐到礼堂第一排N个座位上去，试求下列事件的概率：(1)任何人都没有邻座；(2) 每人恰有一个邻座；(3) 关于中央座位对称的两个座位至少有一个空着。*

解: 分别用A,B,C表示上述(1)-(3)各事件。则$|\Omega|=P_N^n$.

(1) 视此n个人为“女生”，$N-n$个座位为“男生”，则$|A|=C_{N-n+1}^{n}n!$

(2) $|B|=C_{N-n+1}^{n/2}n!$

(3)

$$|C|=\begin{cases}C_{N/2}^{n}2^n n!, & N\ is\ even\\ nC_{(N-1)/2}^{n-1}2^{n-1}(n-1)!+C_{(N-1)/2}^{n}2^n n!, & N\ is\ odd\end{cases}$$

1.5 条件概率

条件概率提供了一种在我们已经获得部分信息的前提下考察事件发生的概率的方法。

定义 1.5.1. *设$(\Omega,\mathcal{F},P)$为一概率空间，$B\in\mathcal{F}$满足$P(B)>0$, 对任何$A\in\mathcal{F}$，取*

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

作为$\mathcal{F}$上之A的集函数，则$P(\cdot|B)$满足概率的公理化体系定义。称$P(A|B)$为已知事件B发生后A的条件概率。

定理 1.5.1. [**乘法定理**] 设$(\Omega,\mathcal{F},P)$为一概率空间，$A_k\in\mathcal{F},k=1,\cdots,n.$ 如果$P(A_1\cdots A_{n-1})>0$, 则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$$

例1.5.1. 罐中放有7个白球和3个黑球,从中无放回地随机抽取3个球.已知其中之一是黑球,试求其余二球都是白球的概率.

解:我们以A表示其中有一个球为黑球的事件,以B表示所取3个球为1黑2白的事件,要来计算条件概率$P(B|A)$.为此我们以Ω表示一切可能的选取结果的集合,易知

$$|\Omega|=C_{10}^3,\quad |B|=C_3^1C_7^2=63.$$

对于事件A,应当注意其含义."有一个球为黑球"在这里应当理解为"至少有一个球为黑球",而其对立事件A^c则表示"所取3个球全是白球",因此$|A^c|=C_7^3$,从而$|A|=C_{10}^3-C_7^3=85$.又注意到$B\subset A$,故有$AB=B$.现在我们可以求得:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{85}{C_{10}^3},\ \ P(AB)=P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{63}{C_{10}^3}.$$

于是按照条件概率的定义,算得

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{63}{85}\ .$$

但是,我们也可以把A视为样本空间,按照(2.3.1)式直接算得

$$P(B|A)=\frac{|AB|}{|A|}=\frac{|B|}{|A|}=\frac{63}{85}\ .$$

例1.5.2. 将n根短绳的$2n$个端头任意两两连接,试求恰好连成n个圈的概率.

解:以Ω表示所有不同连结结果的集合,设想把$2n$个端头排成一行,然后规定将第$2k-1$个端头与第$2k$个端头相连接,$k=1,2,\cdots,n$.于是每一种排法对应一种连结结果,从而$|\Omega|=(2n)!$.以A表示恰好连成n个圈的事件.设想已将n根短绳作了编号,以A_k表示第k号短绳被连成1个圈的事件,于是有$A=\bigcap\limits_{k=1}^n A_k$.

当A_1发生时,1号短绳被连成1个圈,这相当于有一个$k\in\{1,2,\cdots,n\}$, 使得在$2n$个端头的排列中,1号短绳的两个端头排在第$2k-1$和第$2k$个位置上,所以$|A_1|=2n(2n-2)!$.因此

$$P(A_1)=\frac{|A_1|}{|\Omega|}=\frac{1}{2n-1}\ .$$

我们来求$P(A_2|A_1)$,即要在已知1号短绳被连成1个圈的情况下,求2号短绳也被连成1个圈的概率.既然1号短绳已经自成1个圈,我们就可以不考虑它,只要对剩下的$n-1$根短绳讨论其中的头一号短绳被连成1个圈的问题就行了.就是说,我们只要在变化了的概率空间上按计算无条件概率的公式来计算条件概率$P(A_2|A_1)$就行了.由于现在的情况与原来的情况完全类似,只不过总的绳数变为$n-1$根,故通过类比,即知

$$P(A_2|A_1)=\frac{1}{2(n-1)-1}=\frac{1}{2n-3}\,.$$

同理可得

$$P(A_k|A_1A_2\cdots A_{k-1})=\frac{1}{2[n-(k-1)]-1}=\frac{1}{2n-2k+1},\quad k=3,4,\cdots,n.$$

于是由概率乘法定理中的(2.3.6)式得到

$$P(A)=P(\bigcap_{k=1}^{n}A_k)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{2n-2k+1}=\frac{1}{(2n-1)!!}\,.$$

在这个解法中,充分体现了利用变化了的概率空间计算条件概率的好处.

1.6 全概率公式和Bayes公式

利用条件概率的定义，我们可以得到

$$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})$$

把这个思想推广，我们可以得到

定义 1.6.1. 设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$中的一组事件,称它们是对样本空间Ω的一个划分,如果它们两两不交,且有$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=\Omega$.

定理 1.6.2. (全概率公式) 设$(\Omega,\mathcal{F},P)$为概率空间, $A_1,A_2,\cdots,A_n$是对Ω的一个划分,如果$P(A_k)>0,\ k=1,2,\cdots,n$,则对任何$B\in\mathcal{F}$,都有

$$P(B)=\sum_{k=1}^{n}P(A_kB)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)\,. \tag{1.6.1}$$

在可列情形下相应地有:

$$P(B)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_kB)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)P(B|A_k)\,. \tag{1.6.2}$$

例1.6.1. 某工厂的第一,二,三号车间生产同一产品,产量各总占产量的$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$,次品率分别为1%, 1%和2%.现从该厂产品中随机抽取一件,试求该产品是次品的概率.

解:以Ω表示所有可能的抽取结果,以B表示取出的产品是次品的事件.问题在于不知该产品是哪个车间生产的.于是再分别以A_1, A_2, A_3表示该产品是第一,二,三号车间生产的事件.于是A_1, A_2, A_3就是对Ω的一个分划,并且有

$$P(A_1) = \frac{1}{2},\ \ P(A_2) = \frac{1}{3},\ \ P(A_3) = \frac{1}{3},$$

$$P(B|A_1) = P(B|A_2) = 1\%,\ \ P(B|A_3) = 2\%$$

将它们代入(1.6.1)式,即得

$$P(B) = \sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(B|A_k) = 0.01 \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + 0.02 \cdot \frac{1}{6} \approx 0.0117\ .$$

例1.6.2. (Polya 罐子模型)罐中放有a个白球和b个黑球,每次从罐中随机抽取一个球,并连同c个同色球一起放回罐中,如此反复进行.试证明:在第n次取球时取出白球的概率为$\frac{a}{a+b}$.

证:以A_k表示在第k次取球时取出白球的事件,于是A_k^c就是在第k次取球时取出黑球的事件.我们来对n作归纳.显然有$P(A_1) = \frac{a}{a+b}$.假设$n = k-1,\ k \geq 2$时结论成立,要证$n = k$时结论也成立.我们以A_1和A_1^c作为对Ω的一个分划.注意此时可将$P(A_k|A_1)$看成是从原来放有$a+c$个白球和b 个黑球的罐中按规则取球,并且在第$k-1$次取球时取出白球的概率,因此由归纳假设知$P(A_k|A_1) = \frac{a+c}{a+b+c}$,同理亦有$P(A_k|A_1^c) = \frac{a}{a+b+c}$,于是由全概率公式得

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(A_1)P(A_k|A_1) + P(A_1^c)P(A_k|A_1^c) \\ &= \frac{a}{a+b}\,\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c}\,\frac{a}{a+b+c} = \frac{a}{a+b}\ . \end{aligned}$$

因此结论对一切n成立.

在上面解答中的对Ω的分划的选取方式值得我们注意.这里易走的一条歧路是把A_{k-1}和A_{k-1}^c作为对Ω的分划.在这种选取之下,我们难以利用归纳假设算出条件概率$P(A_k|A_{k-1})$和$P(A_k|A_{k-1}^c)$.因为此时我们只知道罐中有$a+b+(k-1)c$个球,而难于知道其中的白球和黑球数目.相反地,在A_1和A_1^c发生的情况下,罐中的白球和黑球数目则十分清楚.这个事实再次表明正确选取分划方式的重要性.

定理 1.6.3. (Bayes 公式)设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为概率空间, $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$是对$\Omega$的一个分划,如果$P(A_k) > 0,\ k = 1, 2, \cdots, n$, 则对任何$B \in \mathcal{F}$,只要$P(B) > 0$,就都有

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}\ ,\ \ k = 1, 2, \cdots, n.$$

例1.6.3. *某种疾病的患病率为0.5%,通过验血诊断该病的误诊率为5%(即非患者中有5%的人验血结果为阳性,患者中有5%的人验血结果为阴性).现知某人验血结果为阳性,试求他确患有此病的概率.*

解:以A表示患有此病的事件,以B表示验血结果为阳性的事件.我们要求的是条件概率$P(A|B)$.由已知条件知

$$P(A) = 0.5\% \ , \quad P(B|A) = 95\% \ , \quad P(B|A^c) = 5\% \ .$$

注意A和A^c是对Ω的一个分划,故由Bayes公式得

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)} = \frac{0.5\% \ 95\%}{0.5\% \ 95\% + 99.5\% \ 5\%} = 0.087 \ .$$

这个结果出人意料的小,其原因在于人群中该病的患病率很低,仅为0.5%,所以尽管通过验血诊断该病的误诊率不算高,为5%,但与患病率相比已是10倍之多.从而上式中的分母已经差不多是分子的11倍了.这个事实告诉我们,当验血结果为阳性时,确患有此病的概率并不一定就很大.因为患病的概率除了依赖于验血时的准确率之外,还与人群中该病的患病率有关.这一点对于罕见病的诊断尤为重要,在获知验血结果为阳性时,切切不要紧张.

Bayes 公式虽然很简单,但是它却很有哲理意义.这个公式是以18世纪英国哲学家Bayes 冠名的, Bayes 本人并不专门研究概率统计,只不过是对统计问题感兴趣而已. 他生前没有发表这个公式,而是在他死后两年,由他的一个朋友整理遗物时从他的笔记中发现后发表出来的.我们可以这样来理解这个公式:假设某个过程具有$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 这样n个可能的前提(原因),而$\{P(A_k),\ k = 1, 2, \cdots, n\}$是人们对这$n$个可能前提(原因)的可能性大小的一种事前估计,称之为先验概率.当这个过程有了一个结果B之后,人们便会通过条件概率$\{P(A_k|B),\ k = 1, 2, \cdots, n\}$来对这$n$个可能前提的可能性大小作出一种新的认识,因此将这些条件概率称为后验概率.而Bayes 公式恰恰提供了一种计算后验概率的工具.大家可以从上面的疾病诊断的例子体会出这种思想. 重要的是,后来从这种先验概率和后验概率的理念中发展出了一整套统计理论和方法,并形成了概率统计中的一个很大的学派.该学派为了表明自己的基本理念的最初来源,将自己称为Bayes 学派. Bayes 学派对概率统计问题有自己的独特理解,在处理许多问题时有自己的独到之处,给出了许多很好的统计方法,但也有一些观念上的难以自圆其说之处,主要焦点是对先验概率的解释和处理上面,经常受到经典学派的批评和指责.后来有人为了取其之长避其之短,发展出所谓经验Bayes 方法.在计算机广为应用的今天, Bayes 方法和经验Bayes 方法的实用价值大大提高.大多数统计学者的做法是以兼容并蓄的态度对待两个学派的理论和方法.

1.7 独立性

条件概率$P(A|B)$表示的是在B提供了部分信息的前提下A发生的概率。感兴趣的是当B没有提供任何有关A的信息的情形，即A的发生与B没有任何关系。

定义 1.7.1. 设A和B是同一概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$中的两个事件,如果有

$$P(AB) = P(A)P(B), \tag{1.7.1}$$

则称事件A与事件B相互独立,简称为独立.

如上所说,A与B相互独立,意味着A发生与否对B的发生概率没有影响,B发生与否对A的发生概率也没有影响.

定理 1.7.4. 设A和B是同一概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$中的两个事件,则当事件A与事件B相互独立时,如下各对事件之间也相互独立:(1) A与B^c； (2) A^c与B； (3)A^c 与B^c.

例1.7.1. 向区间$[0,1)$中随机抛掷一个点,以A_1表示该点落在区间$[0,\frac{1}{2})$中的事件,以A_2表示该点落在区间$[\frac{1}{4},\frac{3}{4})$中的事件,试问,$A_1$与$A_2$是否相互独立?

解:这里适用于几何概型.易知$A_1A_2 = [\frac{1}{4},\frac{1}{2})$, 故$P(A_1A_2) = \frac{1}{4}$而$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$.所以(1.7.1)式成立, 因此$A_1$与$A_2$相互独立.

例1.7.2. 甲乙二人相互独立地各自抛掷一枚均匀的硬币,试求在分别抛掷n次之后,两人掷出的正面次数相等的概率.

解:在这里,假定甲乙二人“独立地”抛掷硬币,当然是合理的.

以E表示二人掷出的正面次数相等的事件,再分别以A_k和B_k表示甲和乙掷出k次正面的事件,$k=0,1,2,\cdots,n$,易知$E=\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_kB_k$, 并且当$i\neq j$时,事件A_iB_i与A_jB_j互不相交,故有

$$P(E) = \sum_{k=0}^{n} P(A_kB_k) \ .$$

由于两人相互独立地抛掷硬币,所以对每个k,事件A_k与B_k都相互独立.由于硬币是均匀的,所以$P(A_k) = P(B_k) = C_n^k \frac{1}{2^n}$,从而

$$P(E) = \sum_{k=0}^{n} P(A_kB_k) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k)P(B_k) = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k \frac{1}{2^n}\right)^2 = C_{2n}^n \frac{1}{4^n} \ .$$

在这个例题中,同时出现了“相互独立”和“互不相交”两个不同的概念,我们要在下题中进一步指出“相互独立”和“互不相容”这两个概念的区别.

多个事件的独立性

定义 1.7.2. 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是同一个概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 中的n个事件,称它们相互独立,如果对任何正整数k, $2 \le k \le n$,及任何正整数

$$1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n\,,$$

都有

$$P(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_k}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2})\cdots P(A_{j_k})\,.$$

应当注意,在上式中一共包括了$2^n - n - 1$个关系式.也就是说,n个事件的相互独立性与这$2^n - n - 1$个关系式同时成立等价.换言之,n个事件的相互独立蕴涵了其中任意一部分事件相互独立;但是反过来,即使其中任何$n-1$事件都相互独立,也不能保证n个事件在整体上相互独立.

定义 1.7.3. 设A_1, A_2, A_3是同一个概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$中的3个事件,称它们相互独立,如果如下4个关系式都成立

$$\begin{aligned}
P(A_1A_2A_3) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3);\\
P(A_1A_2) &= P(A_1)P(A_2);\\
P(A_2A_3) &= P(A_2)P(A_3);\\
P(A_3A_1) &= P(A_3)P(A_1).
\end{aligned}$$

在这里,当且仅当4个关系式都满足,才能说3个事件A_1, A_2, A_3相互独立.如果仅有后面的3个关系式满足,则称事件A_1, A_2, A_3**两两独立**.

例1.7.3. (两两独立而不相互独立的反例) 有四个同样的小球, 分别在其上写上“*1*”,“*2*”,“*3*”和“*1,2,3*”。引进三个事件: A_i={随机取一球,球上有数字i}, $i = 1, 2, 3$. 试讨论事件A_1, A_2, A_3是否相互独立.

解:易知$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$,$P(A_1A_2) = P(A_2A_3) = P(A_3A_1) = \frac{1}{4}$,但是却有$P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{4} \ne P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, 所以事件$A_1, A_2, A_3$两两独立,但不相互独立.这个例子说明**两两独立不一定独立**。

与$n = 2$的情形相类似,当事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立时,把它们中的任意一部分或全体换为相应的对立事件后,所得到的n个事件也相互独立.

现在我们给出事件序列的独立性定义.

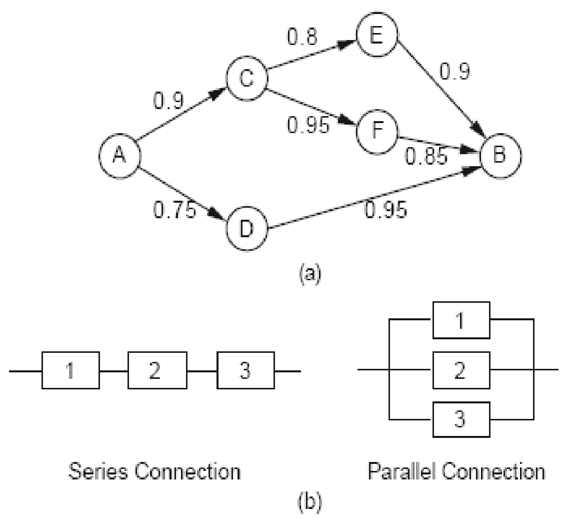
定义 1.7.4. 设$A_1, A_2, \cdots$是同一个概率空间概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 中的一列事件,称它们相互独立,如果对任何正整数$n \geq 2$,其中任何n个事件都相互独立.这时,我们将事件序列$\{A_n,\ n \in \mathcal{N}\}$称为该概率空间中的独立事件序列或独立事件族.

可靠性

在涉及到包含几个部分的复杂系统的概率模型中，经常假定各个部分的工作是相互独立的。

例1.7.4. 一个计算机网络上的节点A, B通过节点C, D, E, F连接起来，如图所示。假定任何两个直接相连的节点，记为i, j，通路的概率是p_{ij}。并假定任何两个连接失效是相互独立的。求A, B是通路的概率。

图 1.3: 节点网络关系



解: 用$X \to Y$表示在节点X和Y之间有连接。则

$$
\begin{aligned}
P(C \to B) &= 1 - (1 - P(C \to E \& E \to B))(1 - P(C \to F \& F \to B)) \\
&= 1 - (1 - p_{CE}p_{EB})(1 - p_{CF}p_{FB}) \\
&= 1 - (1 - .8 \times .9)(1 - .85 \times .95) \\
&= .946 \\
P(A \to C \& C \to B) &= P(A \to C)P(C \to B) = .9 \times .946 = .851 \\
P(A \to D \& D \to B) &= P(A \to D)P(D \to B) = .75 \times .95 = .712
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} P(A \to B) &= 1 - (1 - P(A \to C \& C \to B))(1 - P(A \to D \& D \to B)) \\ &= 1 - (1 - .851)(1 - .712) = .957 \end{aligned}$$

1.8 求概率的一些方法

全概率公式是概率论前期发展中的一个重要里程碑,其意义和价值远远超出了时间的局限. 它的要点是在Ω中引入一个适当的分划,把概率条件化,以达到化难为易的目的. 因此在概率的计算中占有非常重要的地位。

1. 选择合适的样本空间

例1.8.1. *口袋中有a个黑球和b个白球，他们除颜色不同外，其他方面没有任何区别。现把球随机的一个一个摸出来，求第k次摸得一个黑球的概率。*

解法1 把a个黑球及b个白球都看作是不同的(例如设想把它们进行编号). 若把摸出的球依次放在排列成一直线的$a+b$个位置上，则可能的排列法相当于把$a+b$个元素进行全排列，总数为$(a+b)!$. 有利场合数为$a \times (a+b-1)!$，这是因为第k次模得黑球有a种取法，而另外$a+b-1$次摸球相当于把$a+b-1$只球进行全排列. 故所求概率为

$$p = \frac{a \times (a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b}$$

解法2 把a个黑球看作是没有区别的，把b个白球也看作是没有区别的. 仍把摸出的球依次放在排列成一直线的$a+b$ 个位置上，因若把a个黑球的位置固定下来则其他位置必然是放白球，而黑球的位置可以有$\binom{a+b}{a}$种放法. 这时有利场合数为$\binom{a+b-1}{a-1}$，这是由于第k次模得黑球，这个位置必须放黑球，剩下的黑球可以在$a+b-1$个位置上任取$a-1$个位置，因此共有$\binom{a+b-1}{a-1}$种故法. 所以所求概率为

$$p = \frac{\binom{a+b-1}{a-1}}{\binom{a+b}{a}} = \frac{a}{a+b}$$

这钟情况的出现并不奇怪，这说明对于同一随机现象，可以用不同的模型来描述，只要方法正确，结论总是一致的.

2. 递推法(条件化)

例1.8.2. *将n根短绳的$2n$个端头任意两两连接,求恰好连成n个圈的概率.*

解:现在再来利用全概率公式给出一个解答. 以A_n表示n根短绳恰好连成n个圈的事件,记$p_n = P(A_n)$.再以B表示第1根短绳连成1个圈的事件,用B和B^c作为对Ω的一个分划.于是由全概率公式得

$$p_n = P(A_n) = P(B)P(A_n|B) + P(B^c)P(A_n|B^c).$$

在前面例子中已经求得$P(B) = \frac{1}{2n-1}$;易见$P(A_n|B^c) = 0$;而$P(A_n|B)$ 则是在已知第1根短绳连成1个圈的条件下,其余$n-1$根短绳连成$n-1$个圈的概率,此时第1根短绳已经与其余$n-1$根短绳无关,所以$P(A_n|B) = P(A_{n-1}) = p_{n-1}$,代入上式即可得到

$$p_n = P(A_n) = \frac{1}{2n-1} p_{n-1} \ , \ \ n = 2, 3, \cdots .$$

反复利用该式,并注意$p_1 = 1$,即得

$$p_n = \frac{1}{(2n-1)!!} \ , \ \ n = 1, 2, \cdots .$$

例1.8.3. 一罐内有a个黑球和b个白球,从中任意取一球,如果是白球则将它放回去,如果是黑球,则从另一罐内取一白球替换它放回去。在重复n次这样的做法后,求第n+*1*次取出的是白球的概率。

解: 记A={第n次取出的是白球},$p_n = P(A)$,B为所求事件。则

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) \\ &= p_n * p_n + (p_n + \frac{1}{a+b})(1 - p_n) \\ &= \Big(1 - \frac{1}{a+b}\Big) p_n + \frac{1}{a+b} \end{aligned}$$

结合初值$p_1 = \frac{a}{a+b}$,得到

$$p_{n+1} = 1 - \Big(1 - \frac{1}{a+b}\Big)^n \frac{b}{a+b}.$$

3. 利用概率性质求解

例1.8.4. 参加集会的n个人将他们的帽子放在一起,会后每人任取一顶帽子戴上. 求恰有k个人戴对自己的帽子的概率。

解: 为叙述方便,我们把"一个人戴对自己的帽子"简称为"1个配对",并记$A_k =${恰有k个配对}。

先看$k = 0$的情形,即求$A_0 =${n个人中无配对}的概率。令$B_i =${第i个人配对}, $i = 1, \cdots, n$. 则$\bar{A}_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} B_i$. 从而

$$P(\bar{A}_0) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(B_i B_j) + \cdots + (-1)^{n-1} P(B_1 \cdots B_n).$$

不妨设n顶帽子已排放完毕，样本点就是n个人的全排，即$|\Omega| = n!$，易见

$$|B_i| = (n-1)!, \quad |B_iB_j| = (n-2)!, \quad |B_iB_jB_k| = (n-3)!, \cdots, |B_1\cdots B_n| = 0! = 1$$

代入可得

$$P(\bar{A}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} - \sum_{1\le i<j\le n} \frac{1}{n(n-1)} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

整理得到

$$P(A_0) = 1 - P(\bar{A}_0) = 1 - [\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}] = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{1}{i!}.$$

下面对一般的$k \ge 1$求$P(A_k)$. 为此记$C_k =${恰好某指定k个人配对}。由乘法原理可得$|A_k| = C_n^k \cdot |C_k|$, 注意到恰好某$k$个人配对相当于其余$n-k$个人无配对，由上述$A_0$所得结果知

$$P(C_k) = \sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{1}{i}$$

注意到此时共有$n-k$个人，故上述概率等于$|C_k|/(n-k)!$，由此可得

$$|C_k| = (n-k)!\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{1}{i}$$

我们最终得到

$$P(A_k) = \frac{C_n^k|C_k|}{n!} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{1}{i}$$

此结果对于$k = 0, 1, \cdots, n$全成立。令$n \to \infty$的极限概率为$e^{-1}/k!$。

例1.8.5. (配对问题续) 要给n个单位发会议通知,由两个人分别在通知上写单位名称和写信封.如果写完之后,随机地把通知装入信封.试求下述各事件的概率:(1)恰有k份通知装对信封;(2)至少有m份通知装对信封.

解:用E_k表示恰有k份通知装对信封的事件,用A_m表示至少有m份通知装对信封的事件.在上题中我们已经求出E_k的概率.

所以

$$P(E_k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j\frac{1}{j!}\ .$$

最后,由于$A_m = \bigcup_{k=m}^{n} E_k$,且事件$E_m, E_{m+1}, \cdots, E_n$两两不交,所以立知

$$P(A_m) = \sum_{k=m}^{n} P(E_k) = \sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j\frac{1}{j!} = \sum_{k=m}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^j\frac{1}{k!j!}\ .$$

参考文献

[1] 杨振明, 概率论, 南开大学数学教学丛书. 北京: 科学出版社, 2001.

[2] 苏淳, 概率论, 北京: 科学出版社, 2004.

[3] 陈希孺, 概率论与数理统计., 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1995.

[4] W. 费勒, 概率论及其应用(上册)., 胡迪鹤, 林向清译. 北京: 科学出版社, 1980.

[5] P.B. Dimitri & N. T. John, Introduction to Probability, M.I.T. lecture note ,Fall 2000.