第三章　随机变量的数字特征

3.1　数学期望及分位数

3.1.1　数学期望

数学期望是随机变量的一个最基本的数字特征。我们先看如下的一个例子

例3.1.1. *一个石油公司在一个钻探项目中所使用的钻头持续工作2，3，4小时的可能性为0.1, 0.7和0.2。现该公司有10个此类型的钻头，则此钻探项目可以持续多长时间？*

解: 人们一般使用加权平均

$$2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.7 + 4 \cdot 0.2 = 3.1$$

然后得到可以持续$10 \cdot 3.1 = 31$小时。

这里的加权平均我们称为**期望值**或者如下随机变量的**数学期望**：

X	2	3	4
P	0.1	0.7	0.2

对一般的离散型分布，我们有

定义 3.1.1. *设X为一离散型随机变量，其分布律为*

$$P(X = x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \cdots$$

如果$\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < +\infty$，则称

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

为随机变量X的数学期望(简称为期望或者均值)，用符号EX表示X的数学期望。若$\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i = +\infty$，则称$X$的数学期望不存在。

例3.1.2. 设$r.v.\ X$的分布律为

$$P\left(X=(-1)^k\frac{2^k}{k}\right)=\frac{1}{2^k},\quad k=1,2,\cdots$$

则X的数学期望不存在。

解: 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(-1)^k\frac{2^k}{k}|\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty$$

因此X的数学期望不存在。而尽管

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^k}{k}\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}=-ln2.$$

对连续型随机变量，其数学期望的定义如下

定义 3.1.2. 如果连续型随机变量ξ具有密度函数$p(x)$, 则当

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|p(x)dx<\infty$$

时, 我们将积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx$$

的值称为ξ的数学期望, 记作$E\xi$. 如果

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|p(x)dx=\infty,$$

则称ξ的数学期望不存在.

例3.1.3. (Cauchy分布)设

$$p(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad x\in\mathcal{R},$$

则: 该分布的期望不存在.

解:容易看出,$p(x)$非负, 并且

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{\pi}\arctan x\,|_{-\infty}^{\infty}=1,$$

所以$p(x)$是一个密度函数(称为Cauchy分布), 但是

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|p(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\infty,$$

所以Cauchy分布的期望不存在. #

一般，我们把上述两个定义写在一起：

定义 3.1.3. 设ξ为一随机变量，其分布函数为$F(x)$，如果$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|dF(x)<\infty$，则称

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xdF(x)$$

为随机变量ξ的数学期望，记为$E\xi$。

数学期望的一般性质如下

> 假设c为常数, 并且下面涉及的期望都是存在的。我们有
>
> 1. $Ec = c$
> 2. $Ec\xi = cE\xi$
> 3. $E(\xi+\eta) = E\xi + E\eta$
> 4. 若$\xi \geq 0$，则$E\xi \geq 0$
> 5. 若$\xi \geq \eta$，则$E\xi \geq E\eta$.
> 6. 设$g(x)$为一$Borel$可测函数(包括了连续函数、阶梯函数等)，则
>
> $$Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_\xi(x)$$

性质6说明了计算随机变量函数的期望直接从原来的随机变量分布出发.

例3.1.4. 设$r.v.\ X \sim N(0,1)$，求$Y = X^2+1$的数学期望。

例3.1.5. 飞机场载客汽车上有*20*位乘客，离开机场后共有*10*个车站可以下车，若某个车站没有人下车则该车站不停车。设乘客在每个车站下车的可能性相等，以X表示停车的次数，求EX。

解: 设

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个车站有人下车} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个车站无人下车} \end{cases} \qquad i = 1, \cdots, 20.$$

则显然$X = \sum\limits_{i=1}^{20} Y_i$，所以

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{i=1}^{20} EY_i = \sum_{i=1}^{20} P(\text{第 } i \text{ 个车站有人下车}) \\ &= \sum_{i=1}^{20}[1-0.9^{20}] = 8.784. \end{aligned}$$

定理 3.1.1. 如果ξ和η是定义在同一个概率空间上的相互独立的随机变量, 它们的数学期望都存在, 则它们的乘积$\xi\eta$的数学期望也存在, 并且有

$$E\xi\eta = E\xi E\eta.$$

3.1.2 条件期望

我们知道条件分布也是一个概率分布，因此类似数学期望的定义，我们可以定义条件期望。

定义 3.1.4. 设$r.v.\,X$在$r.v.\,Y=y$的条件下的条件分布为$F(x|Y=y)$。则当$\int_{-\infty}^{\infty}|x|dF(x|Y=y)<\infty$时，我们称

$$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}xdF(x|Y=y)$$

为随机变量X在给定条件$Y=y$下的条件期望。

期望所具有的性质条件期望同样满足。

例3.1.6. 设$(X,Y)\sim M(N,p_1,p_2)$，试计算$E(X|Y=k)$。

解：由于$X|Y=k\sim B(N-k,\frac{p_1}{1-p_2})$, 所以由二项分布的性质知$E(X|Y=k)=(N-k)\frac{p_1}{1-p_2}$.

定理 3.1.2. 设X,Y为两个随机变量，$g(X)$为可积的随机变量。则有

$$Eg(X)=E\{E[g(X)|Y]\} \qquad \text{[全期望公式]}$$

Proof. 我们仅在连续型随机变量的情形下证明此定理。设Y的p.d.f 为$p(y)$，$X|Y=y$的p.d.f为$q(x|y)$。则

$$\begin{aligned} Eg(X) &= \iint_{-\infty}^{\infty} g(x)q(x|y)p(y)dxdy \\ &= \int\int_{-\infty}^{\infty} g(x)q(x|y)dxp(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}E[g(X)|Y=y]p(y)dy \\ &= E\{E[g(X)|Y]\} \end{aligned}$$

□

例3.1.7. 一窃贼被关在有3个门的地牢里，其中第一个门通向自由。出这门走3个小时便可以回到地面；第2个门通向另一个地道，走5个小时将返回到地牢；第3个门通向更长的地道，走7个小时也回到地牢。若窃贼每次选择3个门的可能性总相同，求他为获得自由而奔走的平均时间。

解：设这个窃贼需要走X小时才能到达地面，并设Y代表他每次对3个门的选择情况，Y各以1/3的概率取值1，2，3。则

$$EX = E[E(X|Y)] = \sum_{i=1}^{3} E(X|Y=i)P(Y=i)$$

注意到$E(X|Y=1)=3, E(X|Y=2)=5+EX, E(X|Y=3)=7+EX$，所以

$$EX = \frac{1}{3}[3+5+EX+7+EX]$$

即得到$EX=15$。

3.1.3 分位数和p分位数

我们已经知道，随机变量ξ的数学期望就是它的平均值，因此从一定意义上，数学期望刻画了随机变量所取之值的"中心位置"。但是，我们也可以用别的数字特征来刻画随机变量的“中心位置”。中位数就是这样一种数字特征。在不存在数学期望的随机变量，这种刻画工具显得尤为重要，即使对于存在数学期望的随机变量，中位数也是一种相当有用的数字特征。

定义 3.1.5. 称μ为随机变量ξ的中位数，如果

$$P(\xi \le \mu) \ge \frac{1}{2}, \quad P(\xi \ge \mu) = \frac{1}{2}.$$

例3.1.8. 设$r.v.\ \xi \sim B(1, \frac{1}{2})$，求$\xi$的中位数。

解：由于ξ的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

由中位数的定义知区间(0,1)内的每一个数都是ξ的中位数。

定义 3.1.6. 设$0 < p < 1$，称μ_p是随机变量ξ的p分位数，如果

$$P(\xi \le \mu_p) \ge p, \quad P(\xi \ge \mu_p) \ge 1-p.$$

3.2 方差、协方差和矩

3.2.1 随机变量的矩与方差

除了期望外，如果随机变量ξ为r次可积时，我们还可以考虑$E\xi^r$及$E|\xi - E\xi|^r$。分别称为随机变量ξ的r阶原点矩和中心矩。定义如下

定义 3.2.1. 设随机变量ξ r次可积，即

$$E|\xi|^r = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r dF_\xi(x) < \infty$$

则我们称

$$E\xi^r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r dF_\xi(x)$$
$$E|\xi - E\xi|^r = \int_{-\infty}^{\infty} |x - E\xi|^r dF_\xi(x)$$

分别为随机变量ξ的r阶原点矩和中心矩。当$r = 2$时，称$E(\xi - E\xi)^2$为随机变量ξ的方差，记为$D(\xi)$或者$Var(\xi)$。显然有

$$D(\xi) = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

对随机变量的方差，我们可以得到

定理 3.2.3. 设以下随机变量的*2*阶矩存在有限，c为常数. 则有

1. $0 \le D(\xi) = E\xi^2 - (E\xi)^2$, 因此$D(\xi) \le E\xi^2$.
2. $D(c\xi) = c^2 D(\xi)$
3. $D(\xi) = 0$当且仅当$P(\xi = c) = 1$，其中$c = E\xi$。
4. 对任何常数c有，$D(\xi) \le E(\xi - c)^2$，其中等号成立当且仅当$c = E\xi$。
5. 如果随机变量ξ和η相互独立，a, b为常数。则$D(a\xi + b\eta) = a^2 D(\xi) + b^2 D(\eta)$。

为证明上述定理，我们介绍一个引理。

引理 3.2.1. 如果ξ为退化于*0*的随机变量，则有$E\xi^2 = 0$；反之，如果随机变量ξ的*2*阶矩存在而且$E\xi^2 = 0$，则ξ必为退化于*0*的随机变量.

Proof. 如果ξ为退化于0的随机变量，则有$P(\xi = 0) = 1$, 故有$E\xi^2 = 0$。反之，如果随机变量ξ平方可积，并且$E\xi^2 = 0$，但是ξ不退化于0，则有$P(\xi = 0) < 1$。那么就存在$\delta > 0$ 和$0 < \epsilon < 1$，使得$P(|\xi| > \delta) > \epsilon$，于是$E\xi^2 > \delta^2\epsilon$。导致矛盾，所以$\xi$必退化到0. □

例3.2.1. $Possion$分布$P(\lambda)$的方差是λ, 二项分布$B(n, p)$的方差是$np(1 - p)$，正态分布$N(a, \sigma^2)$ 的方差为σ^2。

定义 3.2.2. 设非退化的随机变量ξ平方可积，我们称

$$\xi^* = \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D(\xi)}}$$

为ξ的标准化随机变量，其中$\sqrt{D(\xi)}$成为ξ的标准差。易见$E\xi^* = 0, D(\xi^*) = 1.$

我们引入标准化随机变量是为了消除由于计量单位的不同而给随机变量带来的影响. 例如, 我们考察人的身高, 那么当然可以以米为单位, 得到ξ_1, 也可以以厘米为单位, 得到ξ_2. 于是就有得到$\xi_2 = 100\xi_1$. 那么这样一来, ξ_2与ξ_1的分布就有所不同. 这当然是一个不合理的现象. 但是通过标准化, 就可以消除两者之间的差别, 因为我们有$\xi_2^* = \xi_1^*$.

3.2.2 协方差和协方差阵

如果ξ和η是定义在同一个概率空间上的两个随机变量, 且ξ, η平方可积, 那么我们就可以求$\xi + \eta$的方差:

$$\begin{aligned} D(\xi+\eta) &= E\left((\xi+\eta) - E(\xi+\eta)\right)^2 = E\left((\xi - E\xi) + (\eta - E\eta)\right)^2 \\ &= E(\xi - E\xi)^2 + E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) + E(\eta - E\eta)^2 \\ &= D\xi + E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) + D\eta. \end{aligned}$$

在上式中出现了加项$E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$, 由于对任何实数$x, y$, 都有$|xy| \le \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, 所以我们有

$$|E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)| \le E|\xi - E\xi||\eta - E\eta| \le \frac{1}{2}(D\xi + D\eta).$$

所以只要ξ, η平方可积, 那么就有$E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$存在.

定义 3.2.3. 设随机变量ξ, η平方可积, 我们称

$$cov(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$$

为ξ与η的协方差, 其中cov是英文单词$Covariance$的缩写.

由协方差的定义我们可以得到

协方差具有如下性质：

1. $cov(\xi,\eta)=cov(\eta,\xi)$
2. $D(\xi+\eta)=D(\xi)+cov(\xi,\eta)+D(\eta)$
3. $cov(\xi,\eta)=E(\xi\eta)-(E\xi)(E\eta)$
4. 对任何实数a_1,a_2,b_1,b_2，有
$$cov(a_1\xi_1+a_2\xi_2,b_1\eta_1+b_2\eta_2)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_ib_jcov(\xi_i,\eta_j)$$

如果$\xi_1,\cdots,\xi_n$是定义在同一概率空间下的随机变量，并且其中每个随机变量都是平方可积的。称矩阵

$$\begin{aligned}\Sigma &= (b_{ij})=(cov(\xi_i,\xi_j))\\ &= \begin{pmatrix} D(\xi_1) & cov(\xi_1,\xi_2) & \cdots & cov(\xi_1,\xi_n)\\ cov(\xi_2,\xi_1) & D(\xi_2) & \cdots & cov(\xi_2,\xi_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ cov(\xi_n,\xi_1) & cov(\xi_n,\xi_2) & \cdots & D(\xi_n)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

为$\xi_1,\cdots,\xi_n$的协方差矩阵。显然$\Sigma\geq 0$。

例3.2.2. 设$(X,Y)\sim N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则$(X,Y)$的协方差矩阵为

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$$

3.2.3 相关系数

在介绍相关系数的定义之前，我们看如下引理。

引理 3.2.2. $[Cauchy-Schwarz\ Inequality]$ 设ξ,η均平方可积，则有

$$[E\xi\eta]^2\leq E\xi^2E\eta^2$$

等号成立当且仅当$P(\xi=t_0\eta)=1$，其中t_0为一常数。

Proof. 易知, 对任何$t\in\mathcal{R}$, 都有

$$g(t):=E\eta^2\cdot t^2-2E\xi\eta\cdot t+E\xi^2=E(\xi-t\eta)^2\geq 0\,,$$

所以二次函数$g(t)$的判别式

$$\Delta = 4(E\xi\eta)^2 - 4E\xi^2 \cdot E\eta^2 \le 0,$$

故得不等式.

如果存在$t_0 \in \mathcal{R}$, 使得$P(\xi = t_0\eta) = 1$, 显然就有

$$(E\xi\eta)^2 = E\xi^2 E\eta^2.$$

反之, 如果不等式等号成立, 那么方程$g(t) = 0$有唯一的实根t_0, 即有

$$E(\xi - t_0\eta)^2 = g(t_0) = 0,$$

于是由引理3.2.1知$\xi - t_0\eta$是退化于0的随机变量, 即有$P(\xi = t_0\eta) = 1$. □

推论 3.2.1. 设随机变量ξ, η平方可积, 则有

$$cov(\xi, \eta) \le \sqrt{D\xi} \cdot \sqrt{D\eta},$$

并且等号成立, 当且仅当存在$t_0 \in \mathcal{R}$, 使得$P(\xi = t_0\eta) = 1$.

现在我们来给出相关系数的定义:

定义 3.2.4. 设随机变量ξ, η平方可积, 我们称

$$\rho_{\xi,\eta} = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi} \cdot \sqrt{D\eta}},$$

为ξ与η的相关系数. 如果$r_{\xi,\eta} = 0$, 则称ξ与η不相关.

由此定义，我们可以立即得到

相关系数的性质

1. 若ξ和η相互独立，则$\rho_{\xi,\eta} = 0$
2. $|\rho_{\xi,\eta}| \le 1$, 等号成立当且仅当ξ, η之间存在严格的线性关系，即

$$\rho_{\xi,\eta} = 1, \qquad \text{则存在 } a > 0, b \in \mathbb{R} \text{ 使得 } \xi = a\eta + b \qquad \text{(正相关)}$$
$$\rho_{\xi,\eta} = -1, \qquad \text{则存在 } a < 0, b \in \mathbb{R} \text{ 使得 } \xi = a\eta + b \qquad \text{(负相关)}$$

例3.2.3. 设$X \sim U(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，而$Y = cosX$，则

$$cov(X, Y) = EXY = \int_{-1/2}^{1/2} xcosxdx = 0$$

所以X, Y不相关。但是X, Y之间存在着非线性的函数关系。

此例说明**相关系数是衡量随机变量之间的线性关系的**.

定理 3.2.4. *对任何非退化的随机变量ξ,η平方可积, 如下四个命题相互等价:*

$$(1)\ \xi\text{与}\eta\text{不相关}; \qquad (2)\ cov(\xi,\eta)=0;$$
$$(3)\ E\xi\eta=E\xi E\eta\ ; \qquad (4)\ D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta.$$

我们来讨论不相关与独立性之间的关系.

定理 3.2.5. *对任何非退化的平方可积的随机变量ξ,η而言, 如果ξ与η独立, 那么它们不相关; 但是如果它们不相关却未必相互独立.*

例3.2.4. 试证明若(X,Y)服从单位圆内的均匀分布，则X,Y不相关但不独立。

例3.2.5. 设随机变量ξ和η的分布律分别为

$$\xi\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}, \qquad \eta\sim\begin{pmatrix} 0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

并且$P(\xi\cdot\eta=0)=1$. 则ξ与η不独立, 也不相关.

解: 由ξ和η的分布律, 知$E\xi=0$, $E\eta=1/2$. 又因为$P(\xi\cdot\eta=0)=1$, 所以$E(\xi\cdot\eta)=0$. 因此$cov(\xi,\eta)=E(\xi\cdot\eta)-E\xi\cdot E\eta=0$, 故知$\xi$与$\eta$不相关. 但是

$$P(\xi=1)=\frac{1}{4},\quad P(\eta=1)=\frac{1}{2},\quad P(\xi=1,\ \eta=1)\le P(\xi\cdot\eta=1)\le P(\xi\cdot\eta\neq 0)=0,$$

所以

$$P(\xi=1)P(\eta=1)=\frac{1}{8}\neq 0=P(\xi=1,\ \eta=1),$$

可见ξ与η不独立.

事实上, 利用ξ与η的边缘分布和条件$P(\xi\cdot\eta=0)=1$, 不难求出(ξ,η)的联合分布律为:

p_{ij}	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/2	0	1/2
$p_{\cdot j}$	1/4	1/2	1/4	1

这是一个利用条件$P(\xi\cdot\eta=0)=1$, 由边缘分布律反推联合分布律的例子. 其做法是: 先在表中填入$p_{i\cdot}$和$p_{\cdot j}$, 再在两个随机变量的乘积等于0的位置上填上概率0, 然后利用第i行概率之和等于$p_{i\cdot}$, 第j列概率之和等于$p_{\cdot j}$, 推断出其余各处的概率值.

例3.2.6. 设随机变量ξ和η皆为$Bernoulli$随机变量, 有

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \eta \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

现知$Cov(\xi,\eta) = -\frac{1}{6}$. 试求$(X,Y)$的联合分布律.

3.3 其他一些数字特征

- 平均绝对差$E|X-EX|$
- 矩母函数Ee^{tX}，其中$t \in \mathbb{R}$。
- 特征函数$Ee^{itX} = \int e^{itx}dF(x)$，其中$t \in \mathbb{R}, i$ 为虚数.

定义 3.3.1. 设$F(x)$为一维分布函数, 我们将

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x), \quad t \in \mathcal{R}$$

称为$F(x)$的特征函数. 如果$F(x)$是随机变量ξ的分布函数, 则该$f(t)$也称为ξ 的特征函数, 此时有

$$f(t) = Ee^{it\xi}.$$

由特征函数的定义容易得到: 如果离散型随机变量ξ的分布律为$P(\xi = a_n) = p_n$, $n \in \mathbb{N}$, 那么

$$f(t) = Ee^{it\xi} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{ita_n} p_n.$$

如果连续型随机变量ξ的密度函数为$p(x)$, 那么

$$f(t) = Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x) dx.$$

关于随机变量线性函数的特征函数, 我们有如下结论:

1°. $|f(t)| \le f(0) = 1, \ \forall\, t \in \mathcal{R}$;

2°. $f_{a+b\xi}(t) = e^{ita} f_\xi(bt)$.

定理 3.3.6. (唯一性定理) 分布函数由特征函数唯一确定.

结合反演公式(此处略)知，**分布函数与特征函数相互唯一确定.**

利用特征函数，我们可以很方便的了解某一分布是否具有再生性。看如下的例子：

例3.3.1. 设$X \sim B(n,p), Y \sim B(m,p)$且$X, Y$相互独立，则$X+Y \sim B(n+m,p)$。

Proof. 由于$X \sim B(n,p)$，故X的特征函数为$(q+pe^{it})^n$。再由X与Y相互独立，所以$X+Y$的特征函数为

$$Ee^{it(X+Y)} = Ee^{itX}Ee^{itY} = (q+pe^{it})^{n+m}$$

因此$X+Y \sim B(n+m,p)$。 □

另外，利用特征函数我们还可以很方便的知道这些常见分布之间的关系。比如

- n个独立同分布$B(1,p)$的0-1分布随机变量之和为二项分布$B(n,p)$;
- 有限个独立二项随机变量(成功的概率相同)之和仍为二项分布;
- 有限个独立的$Poisson$分布随机变量之和服从$Poisson$分布，参数相加；
- r个独立同分布几何分布$G(p)$的随机变量之和服从参数为r和p的$Pascal$分布；
- 任意有限个独立的正态分布随机变量的线性组合仍然服从正态分布;

常见分布的特征函数

我们由下述的常见分布表给出

表 3.1: 常见分布表

分布名称	参数	概率密度	期望	方差	特征函数	备注
退化分布	c	$\binom{c}{1}$	c	0	e^{ict}	关于参数c具有再生性
二点分布	p $(0<p<1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$	p	pq	$q+pe^{it}$	为$n=1$的二项分布
二项分布 $B(n,p)$	$n\geq 1$ $0<p<1$	$\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$ $k=0,\cdots,n$	np	npq	$(q+pe^{it})^n$	关于n具有再生性
几何分布	p $(0<p<1)$	$q^{k-1}p, k=1,2,\cdots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$	无记忆
巴斯卡分布	r,p $r\in\mathbb{N}$ $0<p<1$	$\binom{k-1}{r-1}p^rq^{k-r}$, $k=r,r+1,\cdots$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$	$(\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}})^r$	关于r具有再生性
波松分布$P(\lambda)$	$\lambda(\lambda>0)$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,\cdots$	λ	λ	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$	关于λ具有再生性
超几何分布	$M,N,n\in\mathbb{N}$	$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM}{N}\frac{(N-M)}{N}\frac{N-n}{N-1}$		
均匀分布 $U(a,b)$	$a,b(a<b)$	$\frac{1}{b-a}I_{a<x<b}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$	
正态分布 $N(a,\sigma^2)$	a,σ^2	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	a	σ^2	$e^{iat-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$	关于a,σ^2具有再生性
指数分布	$\lambda(\lambda>0)$	$\lambda e^{-\lambda x}I_{x>0}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$(1-\frac{it}{\lambda})^{-1}$	
χ^2分布	$n(n\geq 1)$	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}e^{-x/2}$ $x>0$	n	$2n$	$(1-2it)^{-n/2}$	关于n具有再生性

参考文献

[1] 苏淳., 概率论, 北京: 科学出版社, 2004.